Sumário

- Cap 4: justificação da notação para o integral de Riemann; Teorema Fundamental do Cálculo; volumes de sólidos de revolução.
- **Cap5. Funções de Várias Variáveis.**
  - Domínio; representação geométrica.
  - Marcação de pontos num referencial xyz simulado no plano.
  - Equação do plano.
  - Exercícios.
  - 3º miniteste de avaliação.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 3: páginas 10-12.
- Volume de sólidos de revolução: apontamentos colocados da Semana 14: páginas 6-7.
- Sebenta teórica, Capítulo 5: páginas 2-9.
- Vídeos: primeiros quatro do cap 5, colocados na página da disciplina, Semana 14.

O essencial

Notação dos Integrais Definidos

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Justificação: ler Sebenta, Cap 3, páginas 10 – 12

Exercício

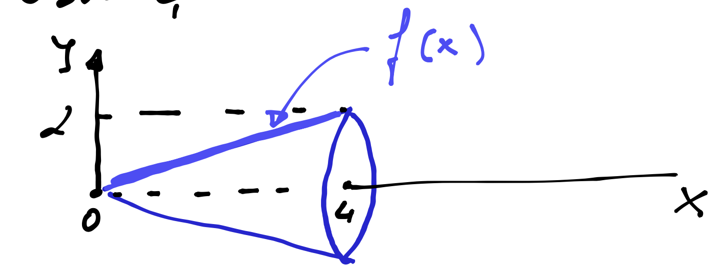
Calcular o volume do cone circular reto de

- raio da base = 2
- altura = 4

Resolução

(ver apontamentos na Semana 14, páginas 6 - 7)

Resolução



$$\text{Volume} = \int_0^4 \pi\, f^2(x)\, dx$$

$f(x)$: segmento da reta definida pelos pontos $(0,0)$, $(4,2)$

$$y = \frac{x}{2} = f(x) \quad \text{(verificar!)}$$

$$\text{Volume} = \int_0^4 \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4 x^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\, \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}\pi \ \text{unidades cúbicas}$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\,\text{Volume}$$

$$\text{Volume} = \text{Área da base} \times \text{Altura} = \pi r^2 h$$

$$\text{Volume} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Cap 5. Funções Reais de Várias Variáveis Reais

$f(x) = \sqrt{x}$

$x \to \boxed{f} \to \sqrt{x}$

$f(4) = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R}$

$4 \in$ Domínio de $f(x)$

$f(-4) = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

$-4 \notin$ Domínio de $f(x)$

$f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$x, y \to \boxed{f} \to \sqrt{x-y}$

$f(4,0) = \sqrt{4-0} = 2 \in \mathbb{R}$

$(4,0) \in$ Domínio de f

$f(0,4) = \sqrt{0-4} \notin \mathbb{R}$

$(0,4) \notin$ Domínio de f

O domínio de uma função de uma variável, $f(x)$, está contido em $\mathbb{R}$.

↳ geometricamente é uma parte da reta real

O domínio de uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, está contido em $\mathbb{R}^2$

↳ geometricamente é uma parte do plano cartesiano

Conjunto de todos os pares ordenados de números reais

a ordem dos números interessa! $(4,0) \neq (0,4)$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Exercícios

Determinar os domínios das funções e representá-los no plano cartesial

(a) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$

(b) $z = \dfrac{1}{x - y^2}$

(c) $z = \sqrt{x - y}$

Resolução

(a) Domínio de $z = \{ \underbrace{(x,y) \in \mathbb{R}^2}_{} : \underline{1 - x^2 - y^2 > 0} \}$

Forma dos elementos do Conjunto Domínio de z

Condição sobre o argumento de $\ln(\_)$

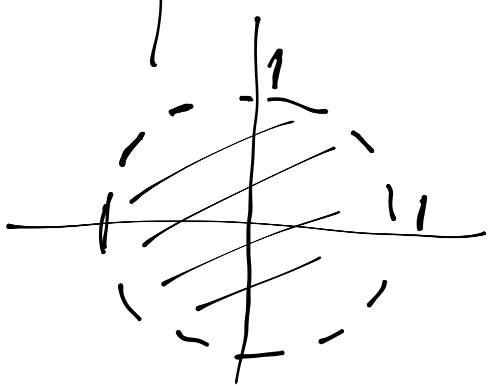
↳ deve ser > 0 para se poder calcular $\ln$.

A condição $1-x^2-y^2>0$ define que pontos do plano formam o Domínio de z

↳ todos aqueles cujas coordenadas satisfazem a condição.

$$1-x^2-y^2>0 \iff x^2+y^2<1$$

pontos cuja distância à origem é menor do que 1, exclui os pontos sobre a circunferência.



(b) $$z = \frac{1}{x-y^2}$$

$$\text{Domínio de } z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y^2 \neq 0\}$$

$$x-y^2 \neq 0 \iff x \neq y^2$$

Queremos todos os pontos (x,y) excepto aqueles cujas coordenadas satisfazem

$$x = y^2$$

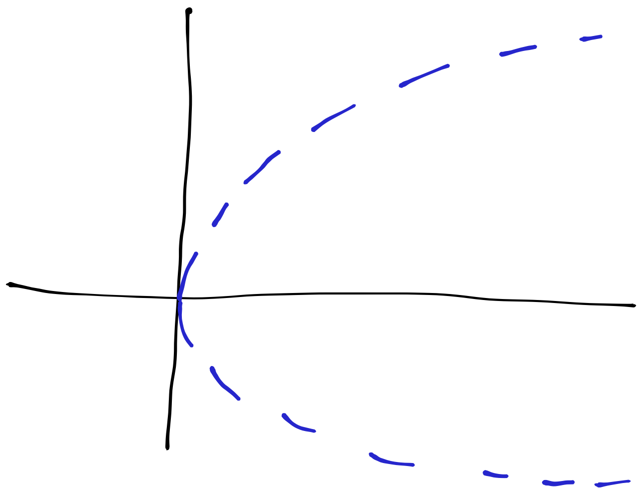


gráfico de $x = y^2$ a tracejado, para indicar que <u>excluimos</u> estes pontos do domínio.

O domínio de z compreende todos os pontos do plano cartesiano, excepto os desta parábola.

<u>Exemplo</u>

O ponto $(x, y) = (4, 2)$ pertence à parábola, porque $4 = 2^2$. A função não tem imagem neste ponto

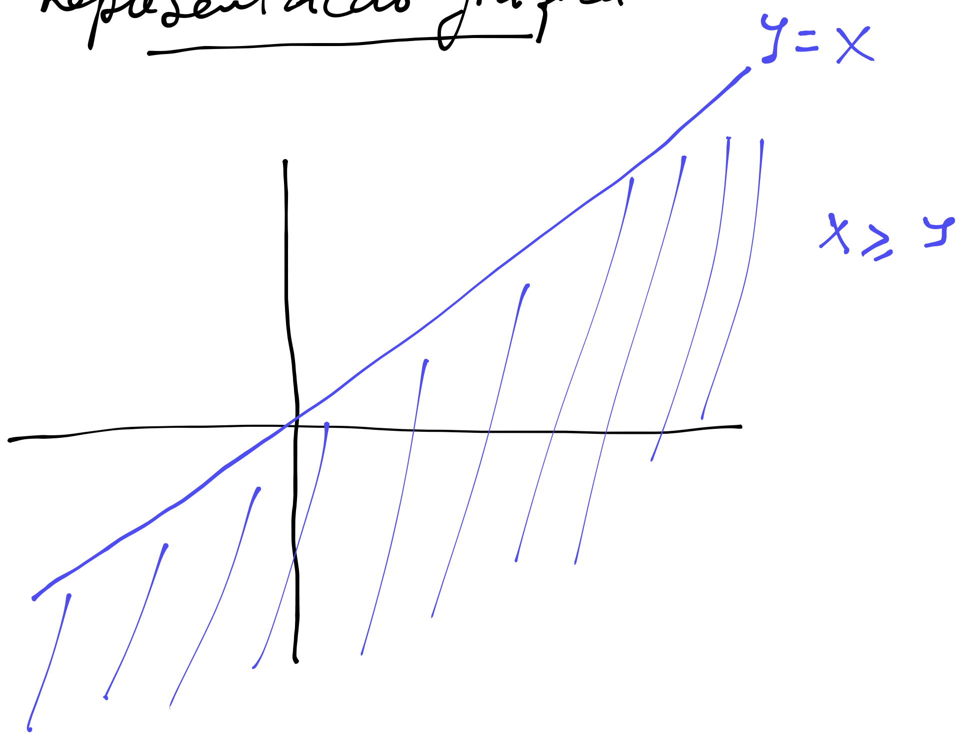
$$f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$$

$$f(4, 2) = \frac{1}{4 - 2^2} = \frac{1}{0} \; !$$

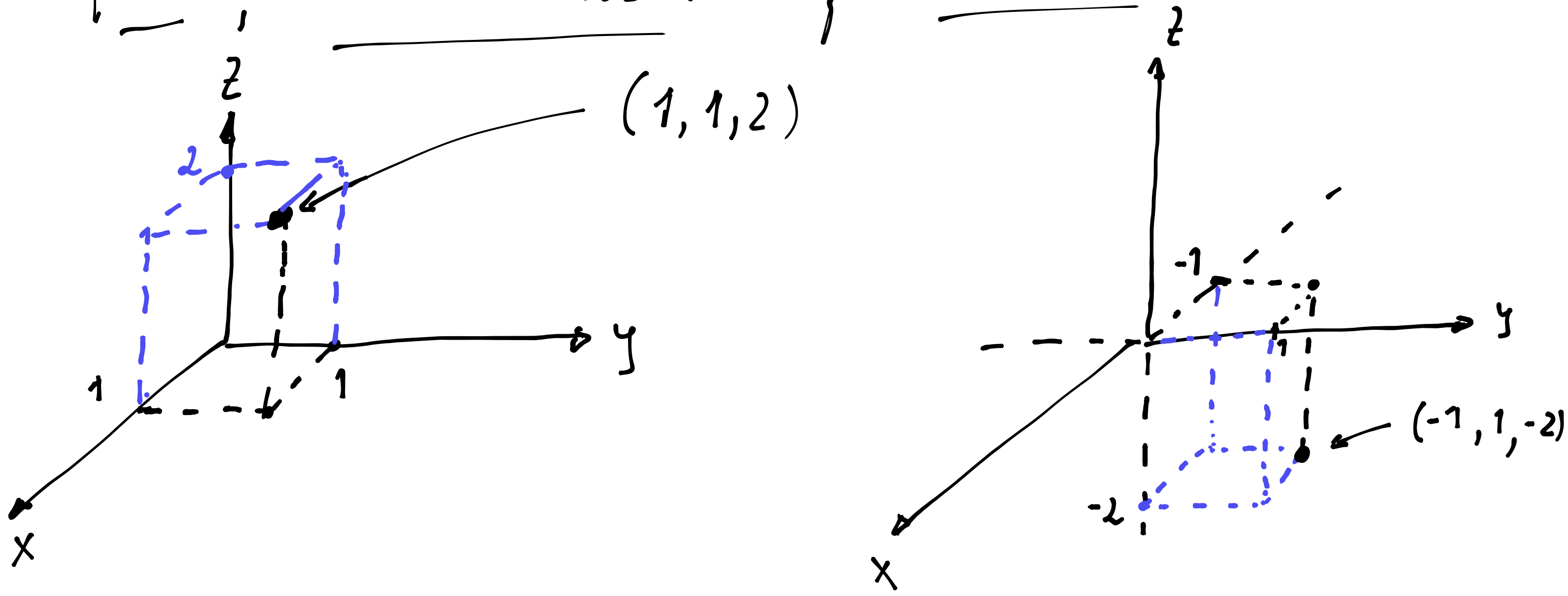
(e) $z = \sqrt{x - y}$

Domínio de $z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

Representação gráfica



Marcação de Pontos no Referencial Cartesiano xyz.



Equação geral do plano

$$ax + by + cz = d \qquad a, b, c, d \text{ : constantes}$$

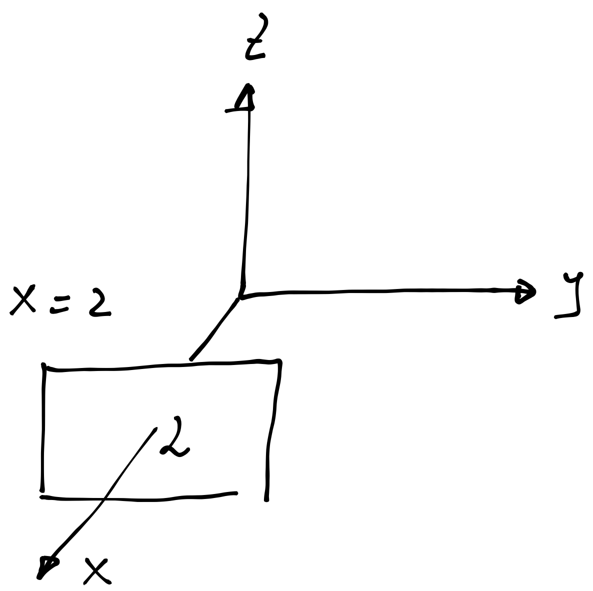
[ver Sebenta, Cap 5]

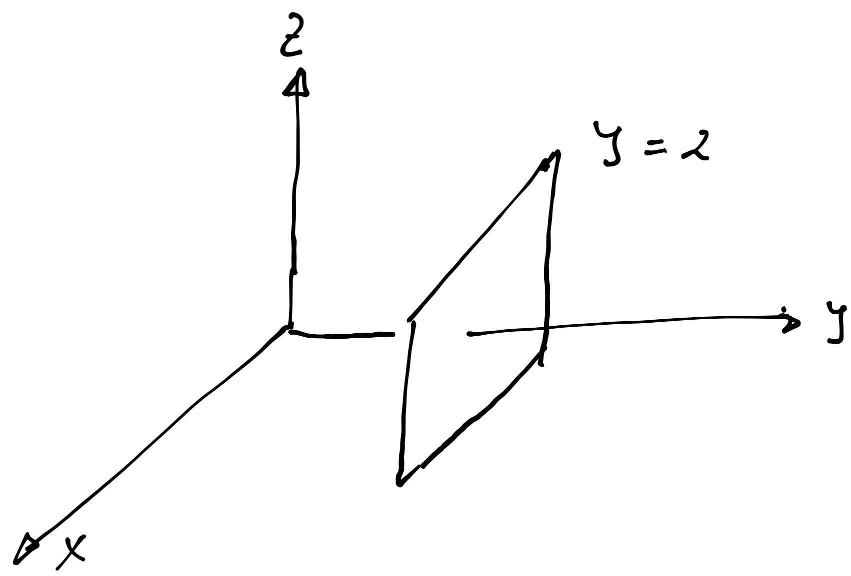
Exemplos

$x = 2$ $\quad$ $a=1;\ b=c=0;\ d=2$

$y = 2$ $\quad$ $a=c=0;\ b=1;\ d=2$

$z = 2$ $\quad$ $a=b=0;\ c=1;\ d=2$





Exercício

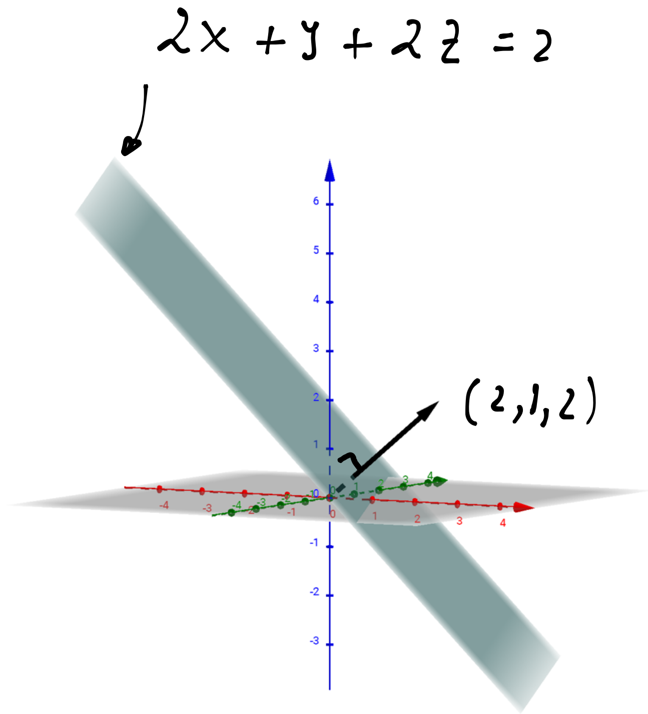
Determinar os pontos de interseção do plano

$$2x + y + 2z = 2$$

com os eixos coordenados.

Resolução: ver Sebenta, Cap 5

O vetor (a, b, c) é perpendicular ao plano $ax + by + cz = d$



Exemplo

Plano $2x + y + 2z = 2$

Vetor $(2, 1, 2)$