Sumário

- **Cap4. Séries Numéricas e Séries de Potências.**
  - Expansão de um polinómio em torno de um ponto.
  - Série de potências de x das funções e^x, $sin(x)$, $cos(x)$. Obtenção da série da função $cos(x)$ por derivação da série de $sin(x)$.
  - Série de Taylor de uma função em torno de um ponto.
  - Critério de convergência de d'Alembert. Intervalo de convergência de uma série.
  - Fórmula de Euler.
  - Exercícios (exercício de otimização; função objetivo; restrições do problema)

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 4: páginas 6-8; 13-20.

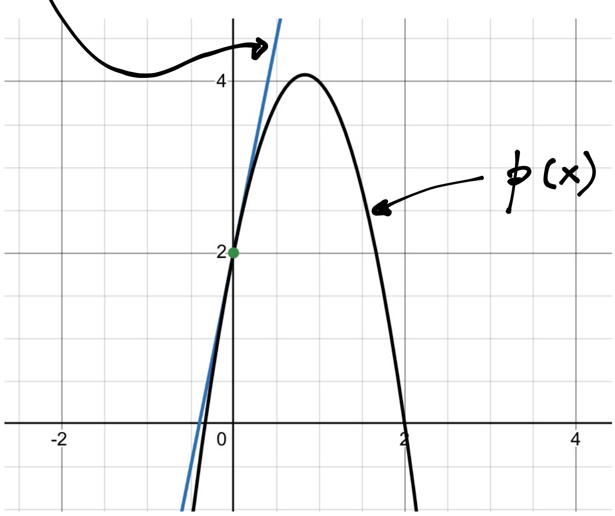
O essencial

$$p(x) = 2 + 5x - 3x^2 = 2 + 5(x-0) - 3(x-0)^2$$

Expansão de $p(x)$ em série de potências de x em torno do ponto $\underline{x = 0}$

$p(0) = 2$

$y = 2 + 5x$: reta tangente ao gráfico de $p(x)$ no ponto $(0, 2)$



Expansão de $p(x)$ em potências de $(x-1)$

$$p(x) = 2 + 5\big((x-1)+1\big) - 3\underbrace{\big((x-1)+1\big)^2}_{(x-1)^2+2(x-1)+1}$$

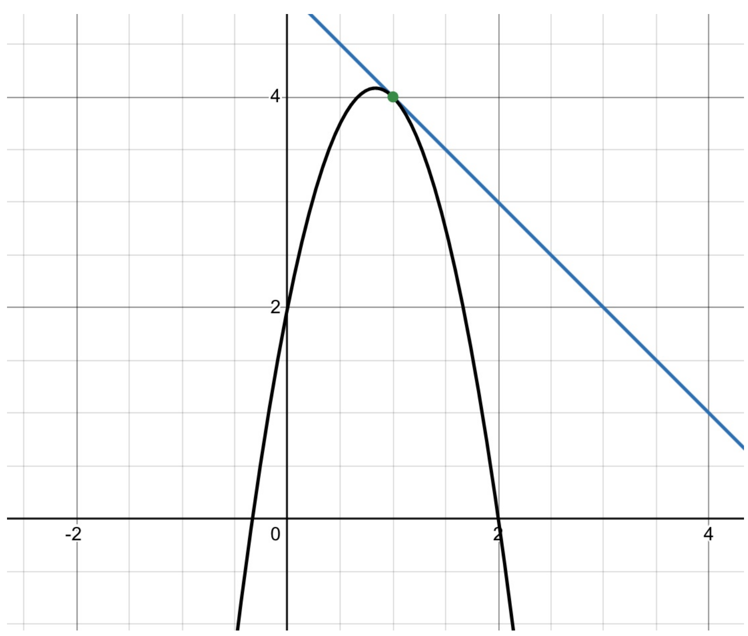
$$p(x) = 4 - (x-1) - 3(x-1)^2$$

é o mesmo polinómio (tem o mesmo gráfico)

$p(1) = 4$

$y = 4 - (x-1) = -x + 5$

é a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(1,4)$



Relação entre os coeficientes de um polinómio e $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$, $\cdots$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$\underline{a_0}$ $\quad a_0 = p(0) \qquad a_0 = \dfrac{p^{(0)}(0)}{0!}$

$\underline{a_1}$ $\quad p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

$a_1 = p'(0) \qquad a_1 = \dfrac{p^{(1)}(0)}{1!}$

$\underline{a_2}$

$$p''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + 3\cdot 4 a_4 x^2$$

$$p''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{p''(0)}{2} = \frac{p^{(2)}(0)}{2!}$$

$\underline{a_3}$

$$p'''(x) = 2\cdot 3 a_3 + 2\cdot 3\cdot 4 a_4 x$$

$$p'''(0) = 2\cdot 3 a_3 = (3!) a_3$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{p'''(0)}{3!} = \frac{p^{(3)}(0)}{3!}.$$

$\underline{a_4}$

$$p^{(4)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4 a_4 = (4!) a_4$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{p^{(4)}(0)}{4!}$$

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

$$b_n = \frac{p^{(n)}(a)}{n!}$$

Expansão de e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ em série de Taylor em torno do ponto $x=0$ (ver Sebenta)

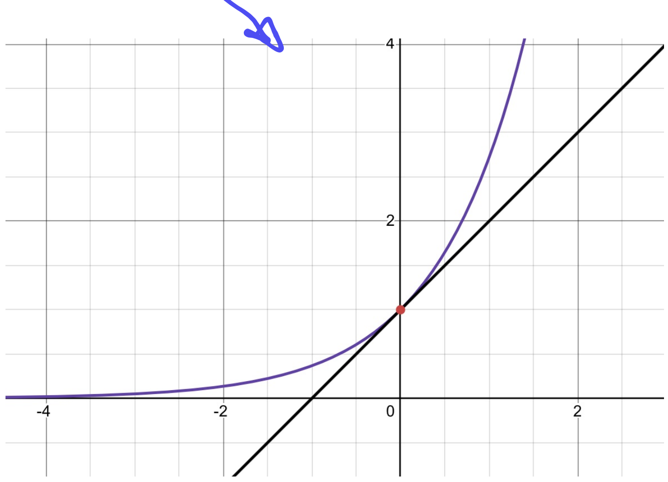
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

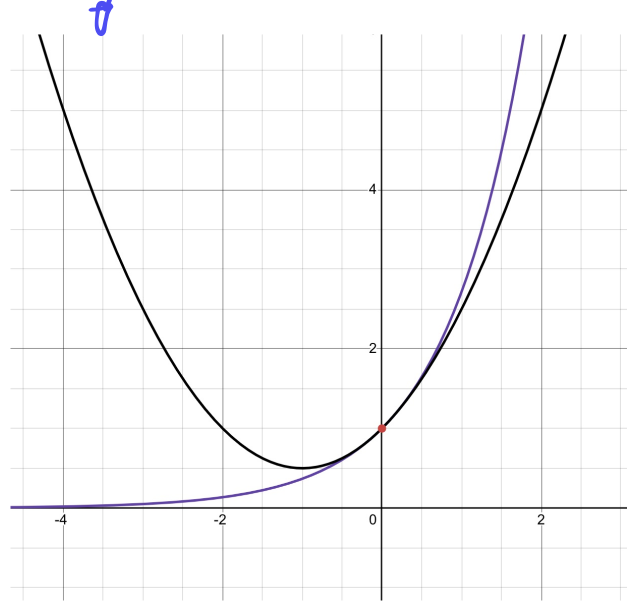
$y = 1 + x$: reta tangente ao gráfico de e^x no ponto $(0, e^0) = (0, 1)$

$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$: parábola tangente ao gráfico de e^x no ponto $(0,1)$

↓

melhor aproximação quadrática numa vizinhança pequena do ponto $x=0$ do domínio de e^x.





Expansão de e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ em série de Taylor em torno do ponto $x = b$ (ver Sebenta)

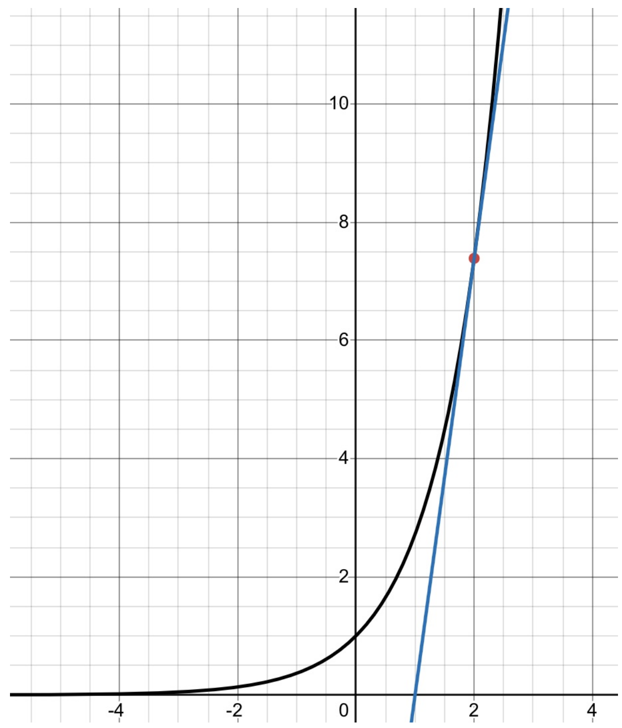
$$f(x) = c_0 + c_1(x-b) + c_2(x-b)^2 + \cdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

Exemplo (Sebenta)

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \cdots$$

$$\underbrace{y = e^2 + e^2(x-2)}_{\text{reta tangente ao gráfico de } e^x \text{ no ponto } (2, e^2)} = e^2 x - e^2$$



Fórmula de Euler (Sebenta)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exercício de Otimização

Otimizar: maximizar ou minimizar o valor de uma função no seu domínio ou em algum intervalo contido no domínio.

Problema. Maximizar a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa tem medida 8. [ver Exercícios de Otimização, na semana 9]

• Critério da Raiz

ou de d'Alembert

Método para estudar a convergência de algumas séries numéricas de termos positivos

Enunciado

Sebenta, Cap 4

Seja $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ uma série de termos positivos,

e $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Se

- $L < 1$, a série converge
- $L > 1$, " " diverge
- $L = 1$, nada se pode concluir

Dois exemplos de $L = 1$.

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

é divergente. Para esta série temos

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/n}{(n+1)/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{1/n}_{\to 0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ Critério inconclusivo

2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e tem soma $\pi^2/6$.

Aplicando o critério:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{(n^2+2n+1)/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = 1$$

$\therefore$ Critério inconclusivo.

Verificamos pois que o conhecimento do valor $L=1$ do limite, só por si, não nos permite concluir se a série converge ou não.

Neste caso, procurar um método melhor!

Aplicação deste critério para determinar o intervalo de convergência da série de e^x, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. VER SEBENTA!