Sumário

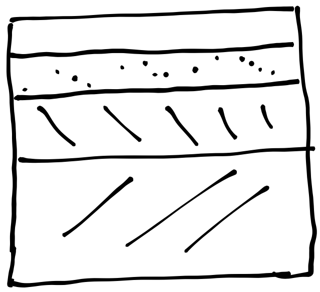
- Cap4. Séries Numéricas e de Potências.
  - Séries numéricas, termo geral, somas parciais, notação sigma.
  - Convergência/ divergência. Soma de uma série convergente.
  - Série harmónica; prova da divergência desta série.
  - Séries geométricas; soma dos primeiros n termos; critério de convergência; soma de uma série geométrica convergente.
  - Expansão de um polinómio em torno de um ponto.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 4: páginas 2-6, 8-13.

O essencial

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad \underline{\text{ou}} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\underline{\text{ou}} \quad \sum_{n=-3}^{\infty}\frac{1}{2^{n+4}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \cdots$$

<u>Série numérica</u>

termos termo geral

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

Somas Parciais $\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2 \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 \\ \vdots \\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n \end{cases}$

Uma série diz-se convergente se existe o

$$\lim_{n \to \infty} S_n ,$$

e diz-se divergente se este limite não existe.

No caso de ser convergente o valor do limite diz-se soma da série [Consultar a Sebenta]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

Série harmónica : esta série é divergente (ver sebenta)

. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ é também divergente, porque os seus termos são maiores que os da série harmónica.

• A série $\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2^n} + \cdots$

é convergente porque os seus termos são menores que os da série convergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Séries Geométricas [ver sebenta]

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

1.º termo : a
razão : r

Soma dos primeiros n termos

$$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

- A série converge se $|r|<1$. Neste caso a sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Ex

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots$$

$a = 4$

$r = 1/3 \qquad |r| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$

A série é convergente

Soma da série

$$S = \frac{4}{1-1/3} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$$

- $3 - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n} = 3 - \frac{1}{3}(6) = 1$

Ex $\quad 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \cdots$

$a = 4$

$r = -\frac{1}{3} \qquad |r| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$

A série converge

A soma da série é

$$S = \frac{4}{1-(-1/3)} = \frac{4}{4/3} = 3$$

Problema

Um veículo tem como propósito elevar-se a 50 m do solo

- Massa do veículo $T = 100\,kg$
- Combustível necessário : 0.5 ℓ por quilograma da massa total levantada.
- Massa de 1 litro de combustível : 0.8 kg

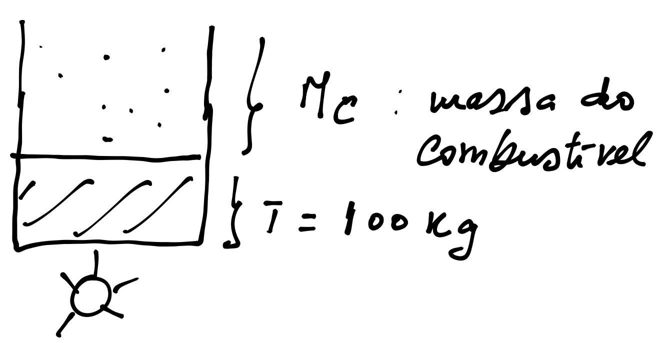
Pretendemos saber

(a) Número de litros de combustível necessários

(b) Se o consumo fosse de 50 ℓ no primeiro metro da subida, e em cada um dos metros seguintes apenas 90% do combustível consumido no metro anterior, qual seria o total de combustível consumido?

Resolução

(a) **Um método**



Massa total : M

$$M = T + M_c$$

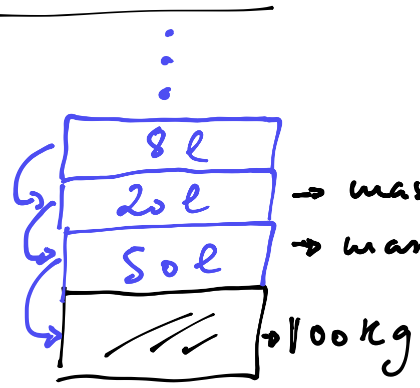
$$M_c = 0.8 \times (\underbrace{\text{nº de litros}}_{= 0.5 \times M})$$

$$M_c = 0.8 \times 0.5 \times M = 0.4M$$

$$M = T + 0.4M \iff M = \frac{T}{0.6} = \frac{100}{0.6} = 166.66\,kg$$

Consumo $= 0.5\,M = 83.33\ldots$ litros

Outro método



→ massa $= 20 \times 0.8 = 16\,kg$

→ massa $= 50 \times 0.8 = 40\,kg$

No esquema, cada quantidade de combustível serve para elevar a massa imediatamente abaixo

exemplo: os 8 l são a quantidade de combustível necessária para elevar a massa correspondente aos 20 l : $(\underbrace{20\,l \times 0.8\,kg/l}_{\text{massa dos } 20\,l}) \times 0.5\,l/kg$

$$= 20 \times (0.5 \times 0.8)$$

Combustível gasto nos 50 m de subida

$$= \underbrace{50}_{1\,m} + \underbrace{(0.5 \times 0.8)\,50}_{2\,m} + \underbrace{(0.5 \times 0.8)^2\,50}_{3\,m} +$$

$$+ \ldots + \underbrace{(0.5 \times 0.8)^{49}\,50}_{50\,m}$$

Temos aqui a soma dos primeiros 50 termos da série geométrica de primeiro termo 50 e razão $0.5 \times 0.8 = 0.4$

$$S_{50} = 50 \frac{1 - 0.4^{50}}{1 - 0.4} = 83.33\ldots \text{ litros}$$

(b) Consumos metro a metro

1.º metro — $50\ \ell$

2.º metro — $0.9 \times 50 = 45\ \ell$

3.º metro — $0.9 \times (0.9 \times 50) = 0.9^2 \times 50 = 40.5\ \ell$

$\vdots$

50.º metro — $0.9^{49} \times 50\ \ell$

Total de combustível consumido:

$$\underbrace{50 + 0.9 \times 50 + 0.9^2 \times 50 + \cdots + 0.9^{49} \times 50}_{\text{soma dos primeiros 50 termos de uma série geométrica de 1.º termo 50 e razão 0.9}}$$

$$S_{50} = 50 \frac{1 - 0.9^{50}}{1 - 0.9} \approx 497.42 \text{ litros}$$