

Sumário da Semana 11

Cálculo/Cálculo I/Matemática Aplicada I – 2024/25 ESTG/IPBragança

Sumário

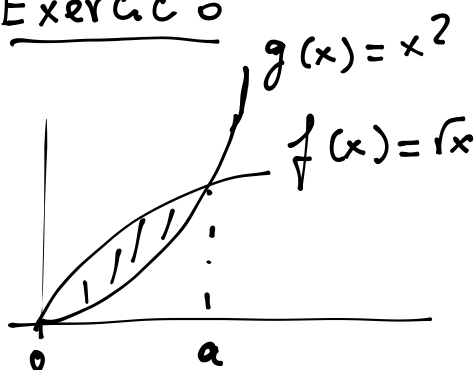
- Cap3. Integrais de Funções Reais de Uma Variável Real.
 - Primitivação por substituição. Uso de uma tabela de primitivas.
 - Primitivação por partes. Exercícios.
 - Problema de introdução às séries numéricas.
 - 2º miniteste de avaliação.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 3: páginas 12-15.
- Vídeos Cap3. 3.17, 3.18.

O essencial

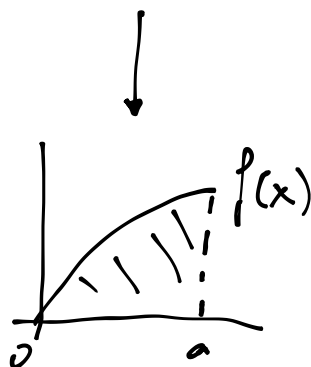
Exercício



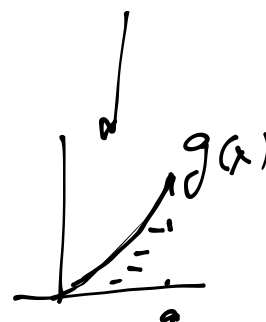
Área = ?

Resolução

$$\text{Área} = \text{Área}_{\text{curva}} - \text{Área}_{\text{triângulo}}$$



$$A_1 = \int_0^a f(x) dx$$



$$A_2 = \int_0^a g(x) dx$$

$$\text{Área} \text{ (shaded)} = \int_0^a f(x) dx - \int_0^a g(x) dx$$

$$= \int_0^a (f(x) - g(x)) dx$$

$$= \int_0^a (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$\begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C \\ \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \end{array} \left| \begin{array}{l} = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ = \frac{2}{3} a^{3/2} - \frac{a^3}{3} \end{array} \right.$$

Cálculo de a :

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow \sqrt{a} = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^{1/2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^{3/2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

dividir
ambos os
membros por $a^{1/2}$

Então $f(x) = g(x)$ para $a=0$ e $a=1$,
Como se pode observar nos gráficos.

$$\therefore \text{Área} \text{ (shaded)} = \frac{2}{3} (1)^{3/2} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Primitivação por Substituição

Exemplo

$$1) I = \int \sqrt{1-2x} dx$$

$$\text{C.A.} \left[\begin{array}{l} u = 1-2x \\ \frac{du}{dx} = (1-2x)' \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{2} \end{array} \right.$$

$$I = \int \underbrace{\sqrt{u} \left(-\frac{du}{2}\right)}_{\sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C = -\frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$I = -\frac{1}{3} (1-2x)^{3/2} + C$$

2) $I = \int_{-2} e^{3x+1} dx$

$$\begin{cases} u = 3x+1 \\ \frac{du}{dx} = (3x+1)' = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{3} \end{cases}$$

$$I = \int \underbrace{-2 e^u \frac{du}{3}}_{\left(-\frac{2}{3}\right) e^u du} = -\frac{2}{3} \int e^u du$$

$$I = -\frac{2}{3} e^u + C = -\frac{2}{3} e^{3x+1} + C$$

verificação

$$\begin{aligned} I' &= \left(-\frac{2}{3} e^{3x+1} \right)' = -\frac{2}{3} (e^{3x+1})' \\ &= -\frac{2}{3} \underbrace{(3x+1)'}_{=3} e^{3x+1} = -2 e^{3x+1} \checkmark \end{aligned}$$

3) $I = \int \frac{x}{x+1} dx$

$$\text{c.4.} \begin{cases} x+1 = u \\ (x+1)' = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = du \end{cases}$$

$$I = \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \underbrace{\int 1 du}_u - \underbrace{\int \frac{1}{u} du}_{\ln(|u|)} = u - \ln(|u|) + C$$

$$I = (x+1) - \ln(|x+1|) + C$$

Primitivas por Partes

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\Leftrightarrow \int (f \cdot g)' dx = \int f'g dx + \int fg' dx$$

$$\Leftrightarrow f \cdot g = \int f'g dx + \int fg' dx$$

$$\Leftrightarrow \int f'g dx = f \cdot g - \int fg' dx \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \int fg' dx = f \cdot g - \int f'g dx \quad (2)$$

Exercícios

$$1) I = \int x e^x dx$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \swarrow \\ f = x \quad g' = e^x \\ f' = 1 \quad g = e^x \end{array} \rightarrow \text{uma primitiva qualquer de } g'$$

Fórmula 2

$$I = fg - \int f'g dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx$$

$$I = x e^x - e^x + C$$

$$2) \quad I = \int_1^2 \ln(x) dx$$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\begin{array}{ll} \downarrow & \swarrow \\ f' = 1 & g = \ln(x) \\ f = x & g' = \frac{1}{x} \end{array}$$

Formula ①

$$I = fg \Big|_1^2 - \int_1^2 fg' dx$$

$$= (x \ln(x)) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^2 1 dx = x \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$I = 2 \ln(2) - 1 \cdot \underset{0}{\ln(1)} - 1$$

$$I = 2 \ln(2) - 1$$

$$3) \quad I = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int x^{-1/2} \cdot \ln(x) dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} \downarrow & \swarrow \\ f' = x^{-1/2} & g = \ln(x) \\ f = 2x^{1/2} & g' = \frac{1}{x} \end{array} \right]$$

Formula ②

$$I = fg - \int fg' dx$$

$$= 2x^{1/2} \ln(x) - \int 2x^{1/2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$2 \int x^{-1/2} dx = 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= 4x^{1/2} + c$$

$$I = 2x^{1/2} \ln(x) + 4x^{1/2} + c$$

