

Sumário da Semana 10

Cálculo/Cálculo I/Matemática Aplicada I – 2024/25 ESTG/IPBragança

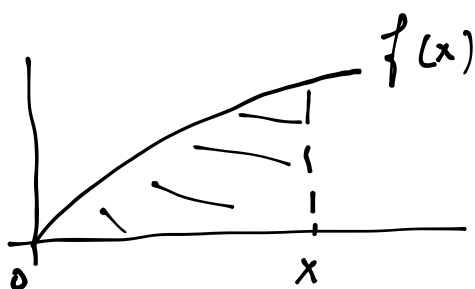
Sumário

- Cap3. Integrais de Funções Reais de Uma Variável Real.
 - Integral definido.
 - Primitivação por Substituição.
 - Exercícios.

Leitura e Vídeos:

- Sebenta teórica, Capítulo 3: páginas 2-10.
- Vídeos Cap3. 3.10 a 3.16.

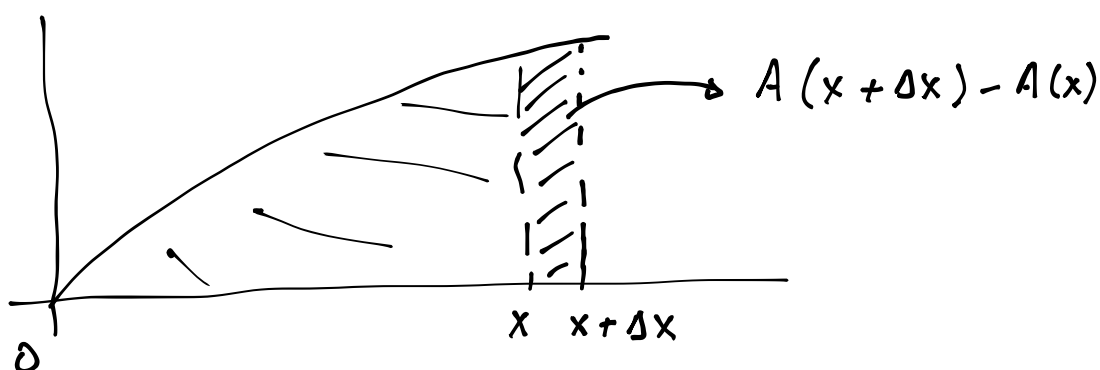
O essencial



Fórmula para a área da região delimitada pelo gráfico de $f(x)$, e o eixo dos xx , no intervalo $[0, x]$?

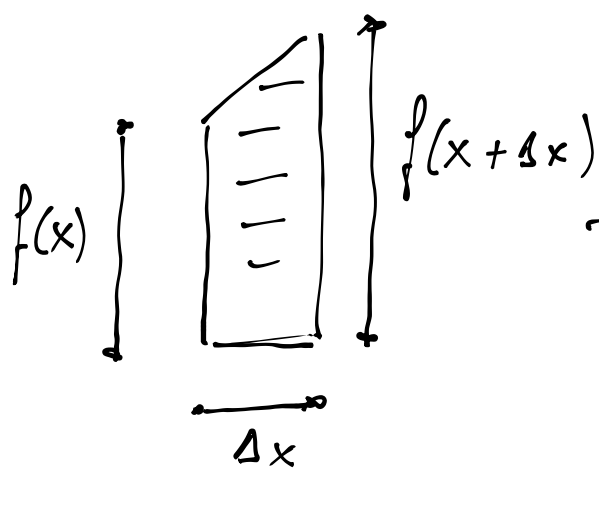
Área : $A(x)$

Vamos mostrar que $A'(x) = f(x)$



$$A'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Se Δx é muito pequeno, a região correspondente à área $A(x+\Delta x) - A(x)$ é, aproximadamente, a do trapézio



$$\begin{aligned} \text{Área} &= f(x) \cdot \Delta x + \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot \Delta x}{2} \\ &= \frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{2} \cdot \Delta x \right] / \Delta x \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Se } A'(x) = f(x)$$

$$\text{então } \int A'(x) dx = \int f(x) dx$$

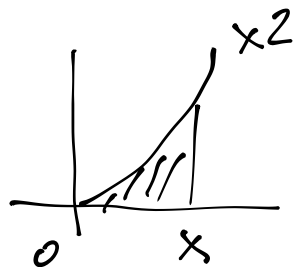
$$\Leftrightarrow A(x) = \int f(x) dx$$

Exemplos

$$1) f(x) = x^2$$

(a) Área com respeito ao intervalo $[0, x]$?

$$A(x) = \int f(x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$



Como deve ser $A(0) = 0$,
temos

$$A(0) = 0 = \frac{0^3}{3} + C \Rightarrow C = 0$$

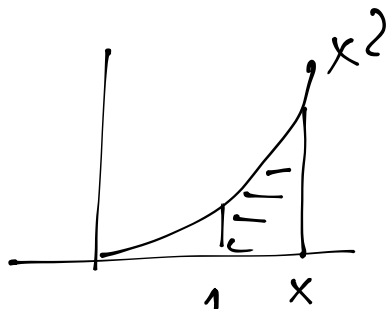
$$\therefore A(x) = \frac{x^3}{3}$$

Se $x = 2$, a área da região no intervalo

$$[0, 2] \text{ é } A(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

(b) Área com respeito ao intervalo $[1, x]$?

Como deve ser $A(1) = 0$, temos



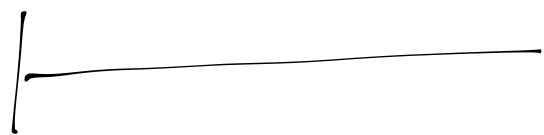
$$A(1) = 0 = \frac{1^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

$$A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Por exemplo, a área da região no intervalo $[1, 3]$ é

$$A(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$



Notar que o valor do parâmetro C é escolhido usando o ponto do eixo dos x no qual queremos iniciar a medida da área.

$$A(x) = \int x^2 dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{F(x)} + C$$

Área no intervalo $[0, x]$:

$$C = 0 = F(0)$$

Área no intervalo $[1, x]$:

$$C = -\frac{1}{3} = -F(1)$$

Para a Área no intervalo $[-1, x]$:

$$C = -F(-1) = -\frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{e } A(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

No caso geral temos

$$\begin{aligned} \text{Área no intervalo } [a, b] &= \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

e indica-se esta expressão da forma

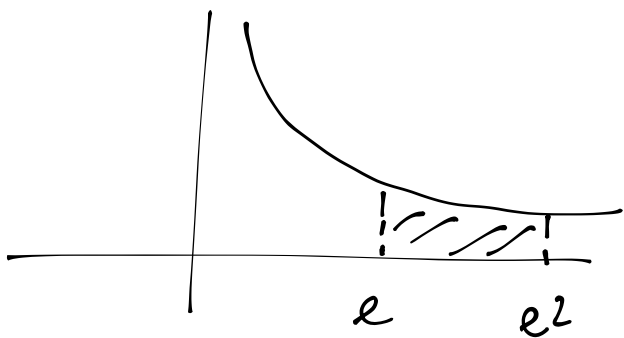
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Integral definido de $f(x)$ no
intervalo $[a, b]$

Exemplo

Calcular a área da região definida
pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ e o eixo
dos xx , no intervalo $[e, e^2]$

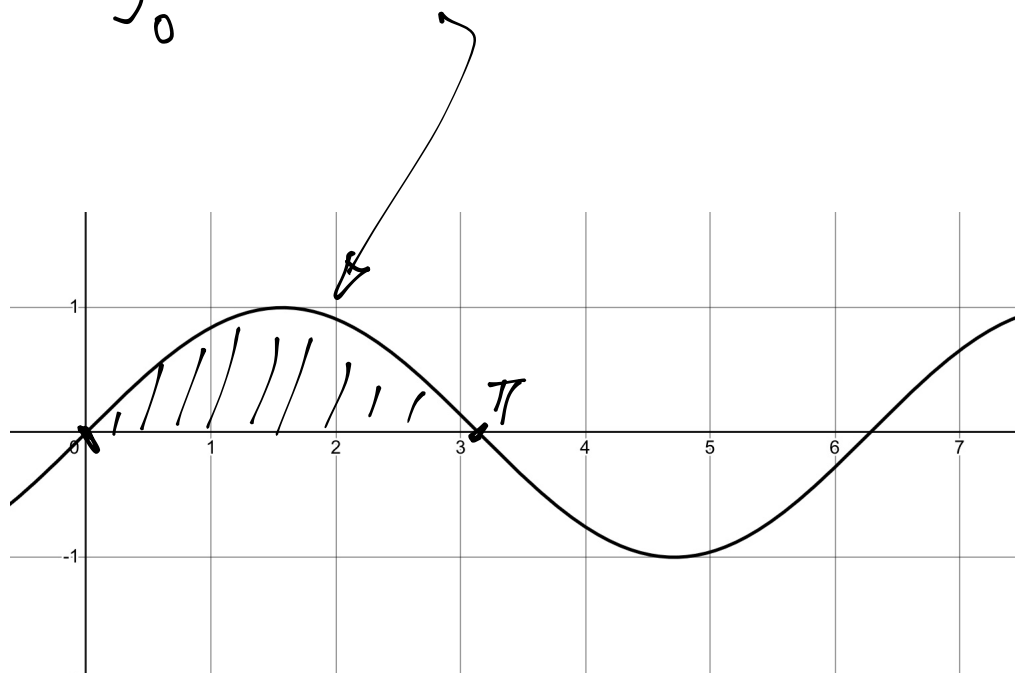
Resposta



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_e^{e^2} \\ &= \ln(e^2) - \ln(e) \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Exercício

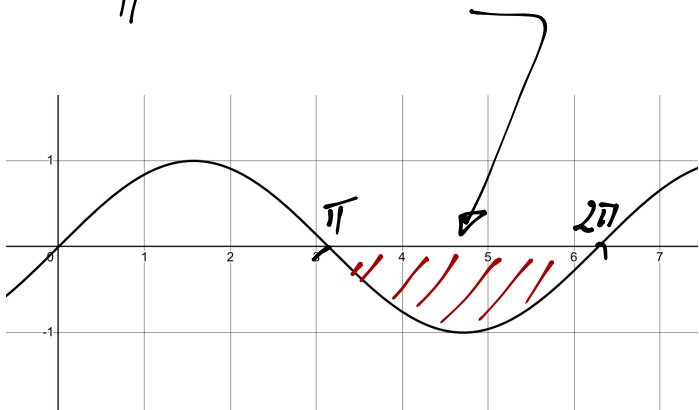
$$(a) I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$



$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi}$$
$$\uparrow$$
$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$I = -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \left(-\underbrace{\cos(0)}_{-1} \right) = 1 + 1 = 2$$

$$b) I = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx$$



$$I = -\cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \underbrace{-\cos(2\pi)}_1 - \underbrace{(-\cos(\pi))}_1$$

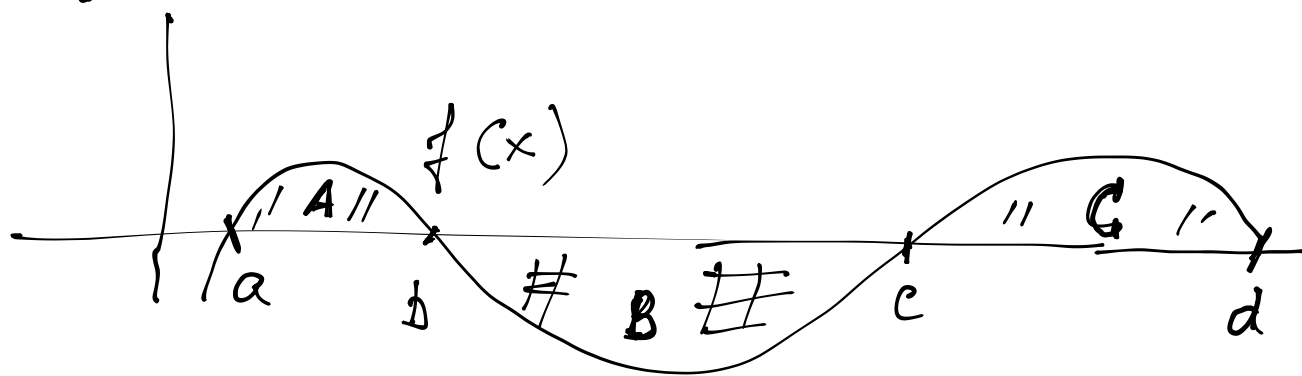
$$I = -1 - 1 = -2$$



Se o gráfico se encontrar abaixo do eixo dos xx , o valor do integral definido dá-nos o simétrico do valor da área.



CASO GERAL



A : valor da área no intervalo $[a, b]$

B : valor da área no intervalo $[b, c]$

C : valor da área no intervalo $[c, d]$

$$\int_a^d f(x) dx = F(d) - F(a) = A - B + C$$

$$\int_a^d f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

