SEMANA1: Notas das Aulas – 2021/22
Cálculo II – Engenharia Mecânica – ESTG/IPB
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Capítulo 1. Complementos sobre Derivadas e Integrais

As operações aritméticas, $+, -, \div, \times$, e a operação de limite, permitem construir os operadores de derivação e integração, que são o coração do Cálculo.

Integral

Tal como uma multiplicação pode reverter uma divisão, no sentido em que de $x \div 3 = 4$ podemos recuperar x efectuando a multiplicação 3×4, também, a integração é uma operação que pode reverter uma derivação, no sentido em que de $f'(x) = 2x$ podemos recuperar $f(x)$, a menos de uma constante, calculando o integral indefinido de $2x$. Tal como a operação de derivação é uma máquina sofisticada para efectuar divisões, a operação de integração é uma máquina sofisticada para efectuar multiplicações.

Exemplo — ***Função área***

A figura 1 representa o gráfico da função $f(x) = 2x$. A região triangular sombreada é delimitada pelo gráfico da função e pelo eixo das abcissas no intervalo $[0, x_0]$ de valores de x, e a função $A(x) = x^2$ representa a sua área. Se for $x_0 = 5$, por exemplo, a área da região sombreada correspondente é

$$A(x) = \frac{base \times altura}{2} = \frac{x_0 \times 2x_0}{2} = x_0^2 \Rightarrow A(5) = 5^2 = 25. \qquad (1)$$

Podemos verificar que a derivada da função área $A(x)$ é a função $f(x)$, isto é $A'(x) = f(x) \Leftrightarrow (x^2)' = 2x$.

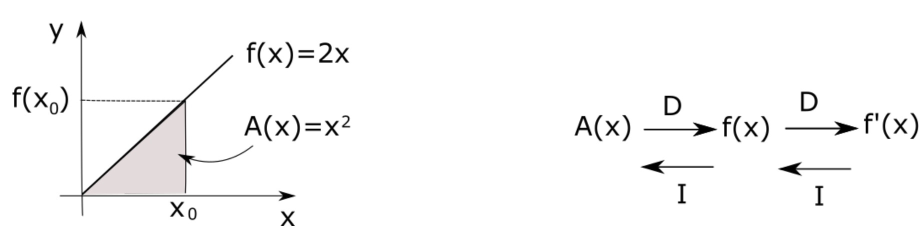

Figura 1: A função área $A(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$.

$A(x)$ é uma *função primitiva* de $f(x)$. O conjunto de todas as funções primitivas de $f(x)$ diz-se *integral indefinido* de $f(x)$ e escreve-se:

$$\int f(x)dx = A(x) + C \Rightarrow \int 2xdx = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Qualquer função primitiva x^2+C é candidata a função área de $f(x) = 2x$. A escolha do parâmetro C depende do valor de $A(x)$ para algum valor particular de x. Como para $x = 5$, por exemplo, temos $A(5) = 5^2 = 25$, então deve ser $5^2 + C = 25$ o que dá $C = 0$, sendo x^2 a primitiva de $f(x) = 2x$ pretendida. O valor da área da região triangular correspondente ao intervalo $[0, x_0]$ de valores de x é $A(x_0)$ e escreve-se

$$\int_0^{x_0} 2x dx = A(x_0) - A(0) \tag{3}$$

com $A(0) = 0$.

A afirmação feita acima de que $A'(x) = f(x)$ é uma consequência da chamada parte 1 *do Teorema Fundamental do Cálculo.*

Teorema Fundamental do Cálculo - parte 1. *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Então a derivada $F'(x)$ existe em todos os pontos do intervalo (a, b) e $F'(x) = f(x)$.*

□

A parte 2 do *Teorema Fundamental do Cálculo* é a seguinte.

Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2. *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ neste intervalo. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

□

Esta parte 2 do teorema permite-nos calcular a área da região correspondente ao intervalo $[3, 5]$ de valores de x, na região sombreada da figura 1, que é dada por $A(5) - A(3)$.

$$\int_4^5 2x dx = A(5) - A(3) = 5^2 - 3^2 = 16. \tag{5}$$

Neste cálculo usámos a primitiva x^2 de $2x$, mas poderíamos ter usado qualquer outra primitiva x^2+C, como se mostra a seguir para o caso geral.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Como um integral representa um produto envolvendo $f(x)$ e x, as unidades em que se exprime são o produto das unidades de $f(x)$ e das unidades de x.

O valor de um integral definitdo representa uma área somente quando o gráfico da função integranda não toma valores negativos. No caso geral temos (figura 2) temos

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Área A - Área B},$$

, sendo o valor do integral positivo somente quando a região de integração definida pelo parte do gráfico que fica acima do eixo das abcissas tem uma área maior que a da região de integração definida pela parte do gráfico que fica abaixo do eixo das abcissas.

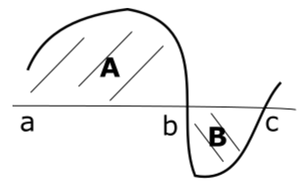

Figura 2:

0.1 Algumas Aplicações dos integrais

Exercícios.

Exercício ***Área de uma região definida por duas curvas***

Determinar a área da região finita delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$.

Na figura 3 estão representados os gráficos da duas funções. A região que queremos considerar corresponde ao intervalo $[a, b]$ de valores de x. A expressão que nos dá a área dessa região é

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Note-se que o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$ neste intervalo. A justificação para este integral fica clara se o escrevermos da forma

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \; = \; \int_a^0 (g(x) - f(x))\, dx + \int_0^d (g(x) - f(x))\, dx + \int_d^b (g(x) - f(x))\, dx. \tag{7}$$

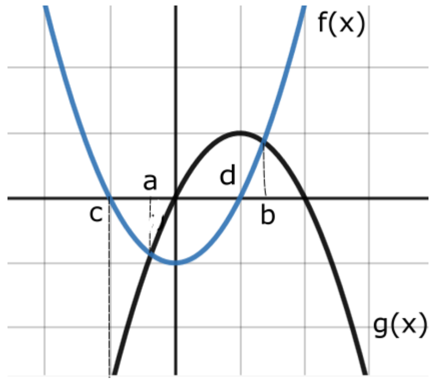

Figura 3: Área da região delimitada por duas curvas no intervalo $[a, b]$.

Vejamos o significado de cada um dos três integrais no segundo membro de (7).

1. No intervalo $[a, 0]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abcissas estão ambas abaixo deste eixo, o que sinifica que tanto $\int_a^0 f(x)dx$ como $\int_a^0 g(x)dx$ são negativos. O integral $\int_a^0 (g(x) - f(x))\, dx$ corresponde a uma diferença de áreas.

2. No intervalo $[0, d]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abcissas estão acima do eixo das abcissas, no caso de $g(x)$, e abaixo deste eixo, no caso de $f(x)$. Daqui decorre $\int_0^d f(x)dx < 0$ e $\int_0^d g(x)dx > 0$. O integral $\int_0^d (g(x) - f(x))\, dx$ corresponde a uma soma de áreas.

3. No intervalo $[d, b]$ as regiões delimitadas pelos gráficos e pelo eixo das abcissas estão ambas acima deste eixo, o que sinifica que tanto $\int_d^b f(x)dx$ como $\int_d^b g(x)dx$ são positivos. O integral $\int_d^b (g(x) - f(x))\, dx$ corresponde a uma diferença de áreas.

Para calcular o integral em (7) é preciso determinar os valores de a e b. Como são os dois únicos valores de x para os quais se tem $f(x) = g(x)$, temos que resolver esta equação.

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 \;=\; -x^2 + 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 1 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow \left(x \;=\; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(x \;=\; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

O cálculo da área é imediato.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx &= \int_{(1-\sqrt{3})/2}^{(1+\sqrt{3})/2} (-2x^2+2x+1)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+x\right]_{(1-\sqrt{3})/2}^{(1+\sqrt{3})/2} \\
&= -\frac{2}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)- \\
&\quad -\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

A área da região delimitada pelas duas curvas é $\sqrt{3}$.

Exercício

Determinar a área da região finita delimitada pelos gráficos das funções $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=-x^2+2x$ no intervalo $[c,b]$.

Exercício ***Comprimento de um arco de curva***

Usar um integral para obter uma fórmula para o comprimento do *arco de curva* (= bocado de curva) correspondente ao gráfico de uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ de valores de x.

Na esquerda da figura 4 está representada uma curva a traço grosso, de comprimento L_1. Podemos obter um valor aproximado para L_1 somando as medidas de segmentos de recta apoiados na curva. Seja L_3 a soma das medidas dos segmentos de recta de cor vermelha. É imediato verificar que $L_3 < L_1$ (porquê?). Uma aproximação melhor que L_3 pode ser conseguida substituindo cada segmento de recta a vermelho por dois segmentos tracejados, conforme se vê na imagem esquerda da figura. Se L_2 é o comprimento da linha quebrada a tracejado, podemos escrever $L_3 < L_2 < L_1$. Podemos melhorar ainda mais a aproximação, substituindo cada segmento de recta a tracejado por dois segmentos de recta apoiados na curva a traço grosso, somando depois os comprimentos dos segmentos que formam a linha quebrada resultante. Repetindo sucessivamente o processo, vamos obtendo linhas quebradas com cada vez mais segmentos, cujos comprimmentos são aproximações cada vez melhores para o comprimento L_1.

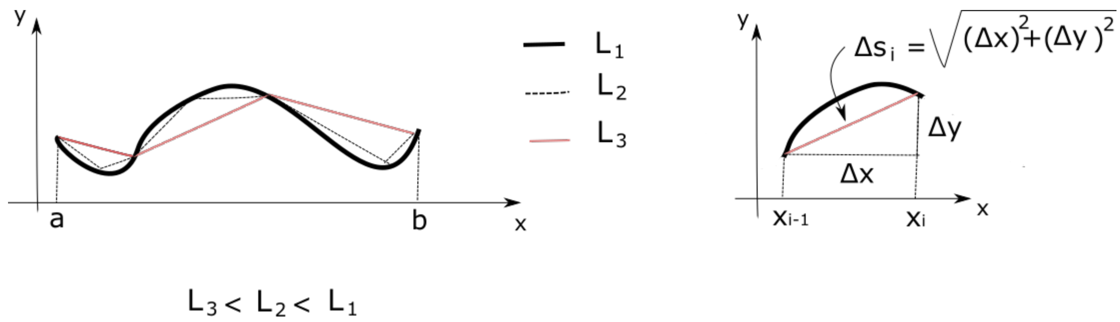

Figura 4: Comprimento de um arco de curva.

Na imagem da direita no figura 4 está representado um arco da curva e um segmento de recta aproximante (a vermelho). O comprimento Δs_i do segmento de recta pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras e as diferenças de ordenadas, Δy_i, e de abcissas, Δx, dos pontos inicial e final do arco. A figura sugere a forma de obter uma linha quebrada formada pela justaposição de segmentos de recta: dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de medida Δx, correspondendo a cada uma um pedaço da curva e o respectivo segmento de recta aproximante. O comprimento do i-ésimo segmento é $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. A soma S_n dos comprimentos dos n segmentos da linha quebrada é

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Fazendo $n \to \infty$ a taxa de variação $\Delta y_i / \Delta x$ tende para a derivada da função y' no ponto x_i. Se o limite existe, então pode exprimir-se somo um integral definido, bastando que a função $\sqrt{1 + (y')^2}$ seja contínua no intervalo $[a, b]$, o que acontece se $y' = f'(x)$ for contínua neste intervalo. Obtemos uma fórmula para o comprimento de uma curva suave $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ de valores de x.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Exercício ***Volume de um sólido de revolução***

Usar um integral para determinar a fórmula do volume de um sólido gerado pela revolução da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo das abcissas.

Na revolução de uma curva em torno de um eixo, cada ponto da curva descreve uma trajectória circular em torno do eixo e perpendicular a este. O sólido cuja superfície é formada pela reunião de todas as trajectórias circulares dos pontos da curva, diz-se *sólido de revolução.*

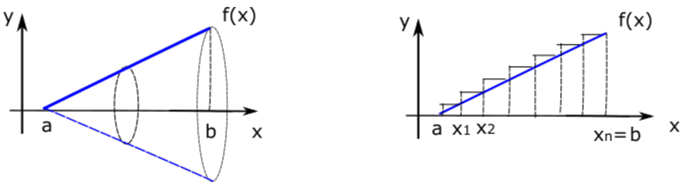

Figura 5: Sólido de revolução.

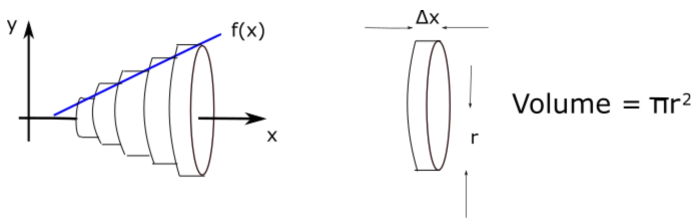

Figura 6: Volume de um sólido de revolução.

Na imagem esquerda da figura 5 está esboçado o cone gerado pela revolução do segmento de recta a traço grosso em torno do eixo das abcissas. Podemos obter uma aproximação para o volume do cone a partir da revolução em torno do eixo das abcissas da função em escada representada na imagem da direita na figura 5. A largura de cada 'degrau' é $\Delta x = (b-a)/n$. O sólido gerado é a sequência de discos na imagem da esquerda da figura 6. O volume V_n deste sólido obtém-se somando os volumes dos discos envolvidos.

$$V_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k)\Delta X, \tag{8}$$

sendo $\pi f^2(x_k)$ a área da base do k-ésimo disco e Δx a sua largura. Quanto maior for o número de discos usado, melhor a aproximação ao valor do volume do sólido. O valor V deste volume obtém-se calculando o limite do somatório quando $n \to \infty$.

$$V \;=\; \lim_{n\to\infty} V_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k)\Delta X \;=\; \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Esta é a expressão geral para o volume do sólido gerado pela revolução do arco de curva definido por $f(x),\ a \le x \le b$, em torno do eixo das abcissas. Como exemplo, se $f(x) = x^2$ e $[a,b] = [1,4]$, o volume V do sólido de revolução é calculado da forma que se segue.

$$V \;=\; \int_1^4 \pi x^4 dx \;=\; \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^4 \;=\; 1023\pi/5$$

Lição 4 - Integração de funções racionais

Uma *função racional* na variável x é da forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} \tag{9}$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinómios. Se $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$ a função racional diz-se *própria*, dizendo-se *imprópria* no caso contrário. As técnicas de integração que vamos estudar aplicam-se a funções racionais próprias. No caso da integração de uma função racional imprópria, efectua-se previamente a divisão $p(x) \div q(x)$ (usando um algoritmo adaptado do algoritmo usual da divisão aritmética), que permite escrever $p(x)$ da forma $p(x) = q(x)Q(x) + R(x)$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(q)$. O integral de (9) pode então ser escrito da forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx \;=\; \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}dx \tag{10}$$

sendo $R(x)/q(x)$ uma função racional prória.

A propósito da discussão da integração de funções racionais, vamos rever alguns aspectos sobre números complexos, como sejam a sua representação e o cálculo de raízes e potências.[1] Vamos também discutir alguns aspectos da factorização de polinómios.

Números complexos

O conjunto dos números complexos representa-se por $\mathbb{C}$ e é constituido por todos os números da forma $z = x + iy$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. x designa-se por *parte real* do número z e abrevia-se neste texto por $Re(z)$; y designa-se por *parte imaginária* do número z e abrevia-se neste texto por $Im(z)$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ está contido no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, porque qualquer número real x pode ser escrito da forma $x + i0$. Se $Im(z) = 0$ o número z diz-se real; se $Re(z) = 0$, o número z diz-se *imaginário puro*.

[1] O uso dos números complexos na física e na engenharia tem como finalidade simplificar a formalização matemática, no que diz respeito aos procedimentos de cálculo e à simbologia das fórmulas.

Exemplos

1. $z = -1/2 - i3$	$Re(z) = -1/2$	$Im(z) = -3$
2. $z = i\sqrt[3]{5} + \pi$	$Re(z) = \pi$	$Im(z) = \sqrt[3]{5}$
3. $z = -27$	$Re(z) = -27$	$Im(z) = 0$
4. $z = 11i$	$Re(z) = 0$	$Im(z) = 11$

Unidade imaginária

$i^0 = \mathbf{1}$

$i^1 = \sqrt{-1}$

$i^2 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = -1(-1) = \mathbf{1}$

$\ldots$

Representação de números complexos

Os números complexos aparecem representados na literatura de duas formas. A forma *cartesiana*, $z = x + iy$, é a mais adequada para operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão (figura 7). A forma *polar* ou *trigonométrica*, $z = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$ ou $z = |z|e^{i\theta}$, com $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*módulo* de z), é mais adequada para o cálculo de potências, raízes e logarítmos (figura 7).[2] [3] O ângulo θ designa-se por *argumento* de z e escreve-se $arg(z)$. Este argumento pode tomar uma infinidade de valores que diferem entre si por múltiplos de 2π. O valor do argumento pertencente ao intervalo $]-\pi, \pi]$ chama-se *argumento principal* de z.

[2] *Fórmula de Euler*: $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.

[3] Em alguns textos mais antigos, a representação de um número complexo z na forma polar tem a simbologia $z = |z|cis(\theta)$, sendo que '*cis*' remete para 'co-seno i seno', com $cis(\theta) = cos(\theta) + isen(\theta)$.

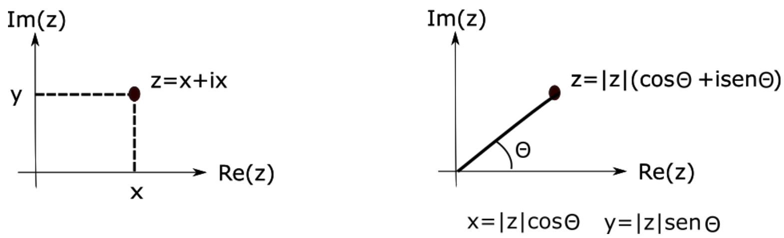

Figura 7: Plano complexo

Exemplos

Exemplo 1.

$$z = 3e^{i\pi/3} = 3e^{i(\pi/3+2k\pi)}.$$

As expressões $3e^{i\pi/3}$, $3e^{i(\pi/3-4\pi)}$ e $3e^{i(\pi/3+2\pi)}$, por exemplo, representam o mesmo número complexo.

Exemplo 2. A forma trigonométrica do número $z = -2+i6$ é $z = \sqrt{40}e^{i\Theta}$, com $\Theta = arctan(-3)+\pi$. Notar que a função $arctan(x)$ devolve ângulos no primeiro quadrante (quando é positiva) ou no quarto quadrante (quando é negativa), estando o afixo[4] de $z = -2+i6$ no segundo quadrante.

Exemplo 3. A forma cartesiana do número $z = 3e^{-i\pi/3}$ é $z = x+iy = 3/2 - i3\sqrt{3}/2$, com $x = 3cos(-\pi/3)$ e $y = 3sen(-\pi/3)$.

Exercício. Seja $z = e^{i2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Mostrar que $z = 1$.

Exercício ***Raízes de um número complexo***

Determinar as raízes sextas do número 64.

Pretendemos encontrar todas as soluções z da equação $z^6 = 64$, ou seja, determinar as raízes do polinómio $z^6 - 64 = 0$. Sabemos, pelo *Teorema Fundamental da Álgebra* (enunciado adiante neste texto), que qualquer polinómio de grau 6 tem seis raízes complexas, podendo haver raízes repetidas. Seja $z = |z|e^{i\Theta}$. Por ser

[4] *Afixo* de um número complexo, é o ponto que representa o número no plano complexo.

$64 = 64e^{i2k\pi}$, sendo k um inteiro qualquer, podemos escrever

$$\begin{aligned} z^6 &= 64 \Leftrightarrow z = 64^{1/6} \\ \Leftrightarrow |z|e^{i\Theta} &= 64^{1/6}e^{i2k\pi/6} \Leftrightarrow |z|e^{i\Theta} = 2ei^{k\pi/3}. \end{aligned}$$

Da última equação resulta $|z| = 2$ e $\Theta = k\pi/3$. Os argumentos das seis raízes complexas de 64 obtêm-se substituindo k sucessivamente por $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$k = 0$	$\Theta = (0 \times \pi)/3 = 0$	$z_0 = 2e^{i0} = 2$
$k = 1$	$\Theta = (1 \times \pi)/3 = \pi/3$	$z_1 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$
$k = 2$	$\Theta = (2 \times \pi)/3 = 2\pi/3$	$z_2 = 2e^{-i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3}$
$k = 3$	$\Theta = (3 \times \pi)/3 = \pi$	$z_3 = 2e^{i\pi} = -2$
$k = 4$	$\Theta = (4 \times \pi)/3 = 4\pi/3$	$z_4 = 2e^{i\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$
$k = 5$	$\Theta = (5 \times \pi)/3 = 5\pi/3$	$z_5 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}.$

É imediato verificar o seguinte:

- z_0 e z_3 são as duas raízes sextas reais de 64;
- z_1, z_5 e z_2, z_4 são dois pares de raízes sextas complexas conjugadas de 64.

Como enunciaremos adiante, se um polinómio de coeficientes reais admite uma raiz complexa z, então admite também a sua conjugada $\overline{z}$.

Polinómios

Um *polinómio* na variável x é uma expressão na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

sendo n um inteiro não negativo que representa o *grau* do polinómio, e sendo os termos a_i, $0 \leq i \leq n$, constantes reais ou complexas ditas *coeficientes do polinómio*. Uma função cuja fórmula é um polinómio designa-se por *função racional inteira*.

Exemplos

$\frac{3}{2}x^3 - x^2 + 2$	polinómio de grau 3 de coeficientes reais
4	polinómio de grau 0; é igual a $4x^0$
$x^2 - x^{-1} + 2$	não é um polinómio (o expoente de x^{-1} não é um inteiro não negativo)
$2ix^2 - 3x + 2 - 4i$	polinómio de grau 2 de coeficientes complexos

Designa-se *raiz* ou *zero* de um polinómio $p(x)$, todo o número r, real ou complexo, tal que $p(r) = 0$.

Exemplos

---

1. $x = 2$ é uma raiz do polinómio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$, porque $p(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 4 = 0$.

2. $x = i$ é uma raiz do polinómio $p(x) = x^2 + 1$, porque $p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

3. $x = -1$ não é uma raiz do polinómio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$, porque $p(-1) = 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 = -9 \neq 0$.

Divisão de polinómios

Na figura 8 aplica-se um algoritmo semelhante ao usado na divisão aritmética, cujo objectivo é escrever uma fracção racional $p(x)/q(x)$ da forma

$$p(x) = q(x).Q(x) + R(x),$$

com $grau(R) < grau(q)$. Se $R(x) = 0$, diz-se que $p(x)$ é *divisível* por $q(x)$ ou que $q(x)$ *divide* $p(x)$.

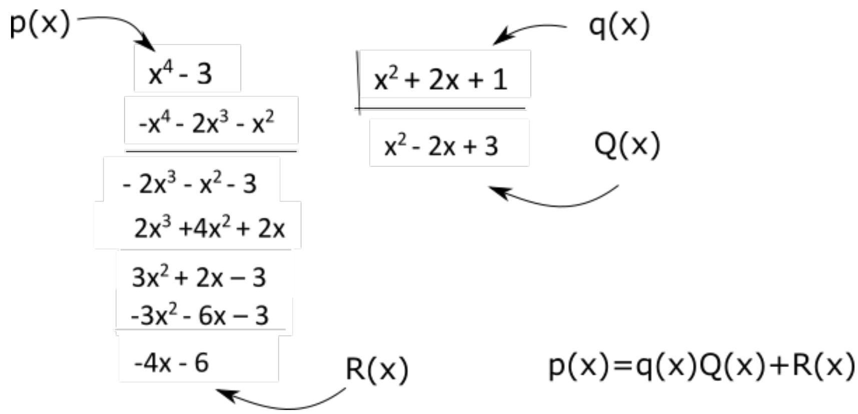

Figura 8: Divisão de polinómios

Exemplos

---

1. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é divisível pelo polinómio $x - 1$, uma vez que $q(x)$ se pode escrever $q(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. $q(x)$ é tambem divisível por $x^2 - 5x + 6$ (porquê?).

2. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ não é divisível pelo polinómio $x - 5$, uma vez que

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-5)(x^2 - x + 6) + 24.$$

   Esta igualdade representa uma divisão da seguinte forma: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é o dividendo; $x - 5$ é o divisor; $x^2 - 5x + 6$ é o quociente; 24 é o resto da divisão.

Factorização de polinómios

Um polinómio $p(x)$ diz-se *factorizado* no produto dos k polinómios $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)$, se pode ser escrito como o produto destes polinómios, i.e

$$p(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_k(x).$$

Exemplos

---

1. O polinómio $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$ pode ser escrito na forma $p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$ (verificar!). Os polinómios envolvidos na factorização de $p(x)$ são $g_1(x) = 2$, $g_2(x) = x - 1$, $g_3(x) = x - 2$ e $g_4(x) = x - 3$.

2. O polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ pode ser escrito na forma $q(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ (verificar!). Os polinómios envolvidos na factorização de $q(x)$ são $g_1(x) = x - 1$ e $g_2(x) = x^2 - 5x + 6$.

O teorema seguinte é importante na factorização de polinómios.

Teorema(de Bézout).. *O resto da divisão de um polinómio $p(x)$, de grau maior ou igual a 1, pelo binómio $x - a$ é igual a $p(a)$.*

Exemplo

Dado o polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, temos $q(5) = 5^3 - 6 \times 5^2 + 11 \times 5 - 6 = 24$, sendo 24 o resto da divisão de $q(x)$ por $x - 5$.

O teorema seguinte é essencial para a factorização de um polinómio qualquer num produto de termos lineares $(x - r)$.

Teorema Fundamental da Álgebra.. *Todo o polinómio $p(x)$ de grau maior ou igual a 1 tem, pelo menos, uma raiz real ou complexa.*

Podemos fazer o seguinte raciocínio:

- O Teorema Fundamental da Álgebra diz-nos que dado um polinómio qualquer $p(x)$ de grau ≥ 1, existe uma raiz r de $p(x)$.
- Pelo Teorema de Bézout, se $p(x)$ tem a raiz r, então podemos escrever $p(x) = (x - r)q(x)$.
- Repetindo este procedimento com o polinómio $q(x)$: se $q(x)$ é um polinómio de grau zero (uma constante), então temos $p(x)$ factorizado em factores de grau 1 e de grau 0; se $grau(q) \geq 1$, então $q(x)$ tem uma raiz s e, usando o teorema de Bézout, podemos escrever $q(x) = (x - s)t(x)$ e também $p(x) = (x - r)(x - s)t(x)$, com $grau(p) = grau(t) + 2$.

Este argumento valida o seguinte resultado.

Corolário.. *Todo o polinómio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau ≥ 1, se pode factorizar num produto do tipo*

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

sendo $r_1, r_2, \cdots, r_n$, as n raízes do polinómio, podendo haver raízes repetidas.

Exercício.

Verificar que o polinómio $q(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$ pode ser escrito na forma $3x^3 - 18x^2 + 33x - 18$, e que esta última expressão se anula para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.

Uma consequência imediata do corolário anterior é que todo o polinómio da forma $ax^2 + bx + c$, com as raízes r_1, r_2, se pode escrever na forma $a(x - r_1)(x - r_2)$.

Exemplos

---

1. O polinómio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ tem uma *raiz dupla* $x = 1$, como pode ser verificado usando a fórmula resolvente de Bhaskara:
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1.$$
Podemos escrever (verificar!)
$$q(x) = (x-1)^2.$$

2. O polinómio $q(x) = 2x^2 - 4x + 2$ tem igualmente a *raiz dupla* $x = 1$ (verificar!). Como o coeficiente que multiplica x^2 é 2, temos
$$q(x) = 2(x-1)^2.$$

3. O polinómio $q(x) = x^2 + x + 1$ não tem raízes reais, como se pode ver usando a fórmula resolvente de Bhaskara,
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$
$q(x)$ pode ser escrito (verificar!)
$$q(x) = \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vale também o seguinte resultado.

Teorema.. *Se o número complexo z é raiz do polinómio de coeficientes reais*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau ≥ 1, então o seu conjugado $\overline{z}$ é também raiz de $p(x)$. Dito de outra forma, as raízes complexas de *polinómios com coeficientes reais aparecem aos pares de números conjugados.*

Prova.

Se z é raiz de $p(x)$, então $p(z) = 0$, i.e.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Conjugando ambos os membros desta igualdade, ela continua válida (porquê?) e temos

$$\begin{aligned}
&\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} \Leftrightarrow \\
&\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Leftrightarrow \\
&a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Leftrightarrow \\
&a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Leftrightarrow \\
&p(\overline{z}) = 0
\end{aligned}$$

A última igualdade significa que $\overline{z}$ é também[5] raiz de $p(x)$.

□

Uma consequência deste teorema e do corolário do Teorema Fundamental da Álgebra (pg. 14) é a seguinte caracterização da factorização de polinómios de coeficientes reais.

Teorema.. *Todo o polinómio de coeficientes reais*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau ≥ 1*, se pode factorizar num produto de termos lineares da forma* $(x - r)$*, sendo* r *uma raiz real, de termos quadráticos da forma* $(x^2 + bx + c)$*, com duas raízes complexas conjugadas, e do coeficiente* a_n*.*

De facto, por as raízes complexas surgirem aos pares, a decomposição em termos lineares contém um termo na forma $(x - \overline{z})$ para cada termo $(x - z)$, sendo z uma raiz complexa. Tal permite reduzir a factorização à forma enunciada, uma vez que $(x - z)(x - \overline{z})$ é um polinómio do segundo grau com coeficientes reais (verificar!).

[5]Notar que se $z = |z|e^{i\Theta}$, então $\overline{z} = |z|e^{-i\Theta}$ (porquê?). Daqui decorre $(\overline{z})^n = |z|^n e^{-in\Theta} = \overline{z^n}$.

Polinómios Idênticos

Dois polinómios $p(x)$, $q(x)$ dizem-se *idênticos* se, e somente se, têm os mesmos coeficientes para as mesmas potências de x. O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para que dois polinómios sejam idênticos.

Teorema.. *Se os valores numéricos de dois polinómios $p(x)$, $q(x)$, de grau n, coincidem para $n+1$ valores diferentes $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ da variável x, então estes dois polinómios são idênticos.*

Exercício.

Mostrar que se $(ax+b)$ e $(3x+4)$ forem iguais para dois valores de x distintos, então $a=3$ e $b=4$, i.e., os polinómios são idênticos.

Suponhamos que os polinómios são iguais, por exemplo, para $x=2$ $(2a+b=10)$ e $x=-1$ $(-a+b=1)$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2a+b=10 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

obtém-se $a=3$ e $b=4$, o que confirma que os polinómios são idênticos.