

4.1 Exercício

Séries de funções: convergência.

Encontrar todos os valores de x para os quais as séries convergem e determinar as somas das séries para esses valores de x .

- (a) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 + \dots$
- (b) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{8}{x^5} + \frac{16}{x^6} + \dots$
- (c) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \dots$

Resolução.

- (a) Trata-se de uma série de potências geométrica de primeiro termo x e razão $r = -x^2$. A série converge para todos os valores de x tais que $|r| < 1$, ou seja

$$|-x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

O intervalo de convergência da série é $-1 < x < 1$. A soma S da série para valores de x neste intervalo é

$$S = \frac{x}{1 - (-x^2)} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Por exemplo, se fizermos $x = 1/2$, a soma da série obtida é igual a $2/5$, como se mostra a seguir.

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots = \frac{1/2}{1 + (1/2)^2} = \frac{1/2}{1 + 1/4} = \frac{2}{5}.$$

- (c) Trata-se de uma série geométrica de primeiro termo e^{-x} e razão $r = e^{-x}$. A série converge para todos os valores de x tais que $|r| < 1$, ou seja

$$|e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < \ln(1) \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

O intervalo de convergência da série é $]0, +\infty[$. A soma S da série para valores de x neste intervalo é

$$S = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

4.2 Exercício

Séries de potências.

Desenvolver em série de potências de x e de $x+3$ a função $y = \frac{1}{10+x}$. Indicar os intervalos de convergência respetivos.

Resolução. Expansão em potências de x

Podemos determinar os coeficientes de Taylor da função $f(x) = 1/(10+x)$ usando a fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

e escrevendo depois a série correspondente $\sum_{n=\alpha}^{\infty} a_n x^n$, para algum α adequado. No entanto, uma forma mais expedita de o fazer para funções com esta forma, é interpretar $f(x)$ como a fórmula da soma de uma série geométrica, por meio de uma manipulação algébrica simples.

$$\frac{1}{10+x} = \frac{1/10}{1+x/10} = \frac{1/10}{1-(-x/10)}.$$

A expressão no terceiro membro representa a soma de uma série de geométrica de primeiro termo $(1/10)$ e razão $r = -x/10$, pelo que

$$\frac{1}{10+x} = \frac{1}{10} - \frac{x}{10^2} + \frac{x^2}{10^3} - \frac{x^3}{10^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{10^{n+1}}.$$

Esta igualdade é válida apenas para os valores de x tais que $|r| < 1$, ou seja

$$|-x/10| < 1 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow -10 < x < 10.$$

Dito de outra forma, o intervalo de convergência da série é $-10 < x < 10$.

Expansão em potências de $x+3$

Por um processo semelhante ao usado acima,

$$\frac{1}{10+x} = \frac{1}{10-3+x+3} = \frac{1}{7-(-(x+3))} = \frac{1/7}{1-(-(x+3)/7)},$$

sendo o último membro a expressão da soma de uma série de geométrica de primeiro termo $(1/7)$ e razão $r = -(x+3)/7$. Temos

$$\frac{1}{10+x} = \frac{1}{7} - \frac{x+3}{7^2} + \frac{(x+3)^2}{7^3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{7^{n+1}}.$$

Esta igualdade é válida para todos os valores de x tais que $|r| < 1$, ou seja

$$|-(x+3)/7| < 1 \Leftrightarrow |x+3| < 7 \Leftrightarrow -7 < x+3 < 7 \Leftrightarrow -10 < x < 4.$$

O intervalo de convergência da série é $-10 < x < 4$. Por exemplo, se $x = 1$, temos

$$\frac{1}{10+1} = \frac{1}{11} = \frac{1}{7} - \frac{1+3}{7^2} + \frac{(1+3)^2}{7^3} - \cdots = \frac{1}{7} - \frac{4}{7^2} + \frac{16}{7^3} - \cdots$$

4.3 Exercício

Séries de potências.

Desenvolver em séries de potências de x e de $x-2$ e indicar os intervalos de convergência.

$$(a) \ y = e^x \quad \textcircled{b} \ y = 2 + x + 3x^2 - x^3 \quad (c) \ y = e^{x-1} \quad (d) \ y = \text{sen}(2x)$$

Resolução. (para estudar resoluções de problemas semelhantes aos das alíneas (a), (c) e (d), consultar a sebenta, cap 4, os TPCs e os sumários das aulas.)

- (b) Notar que a expansão em série de potências $\sum a_n (x-b)^n$ de uma função em torno do ponto $x=b$, quando existe, é única. Isto significa que não existem duas séries de potências com coeficientes distintos, que representem a mesma função num mesmo intervalo de valores de x .

Expansão em potências de x

O polinómio $f(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3$ já se encontra expandido em série de potências de x . O próprio polinómio é, pois, a sua expansão em série de Taylor em torno do ponto $b = 0$. A série tem, neste caso, um número finito de termos. Usando a parte linear da série, $2 + x$, obtemos a equação da reta tangente ao gráfico da função de $f(x)$ no ponto $(x, y) = (0, f(0)) = (0, 2)$, que é $y = 2 + x$.

Expansão em potências de $(x - 2)$

Para o caso de um polinómio, podemos obter a sua expansão em potências de $x - b$, neste caso $x - 2$, sem necessidade de calcular os coeficientes de Taylor pela fórmula que envolve as derivadas da função. Podemos antes consegui-lo com uma manipulação algébrica simples.

$$\begin{aligned} 2 + x + 3x^2 - x^3 &= 2 + ((x - 2) + 2) + 3((x - 2) + 2)^2 - ((x - 2) + 2)^3 \\ &= 2 + (x - 2) + 2 + 3((x - 2)^2 + 4(x - 2) + 4) - (x - 2)^3 - 6(x - 2)^2 - 12(x - 2) - 8 \\ &= 8 + (x - 2) - 3(x - 2)^2 - (x - 2)^3 \end{aligned}$$

Usando a parte linear desta expansão, $8 + (x - 2) = x + 6$ obtemos a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, y) = (2, f(2)) = (2, 8)$, que é $y = x + 6$.

4.4 Exercício

Funções de várias variáveis: gráfico.

Fazer um esboço dos gráficos das funções num referencial tridimensional. Indicar, para cada caso, um ponto (x, y, z) do espaço que pertença à superfície (ou à curva) definida.

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $x = 0$ | (b) $z = 4$ | (c) $y = -5$ |
| (d) $3x - 2y + z = 2$ | (e) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ | (f) $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$ |
| (g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$ | (h) $z = x^2$ | (i) $y = x^2$ |
| (j) $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$ | (k) $\begin{cases} y^2 = x^2 + z^2 \\ y = 1 \end{cases}$ | (l) $\begin{cases} z^2 + x^2 = 25 \\ y = 1 \end{cases}$ |

Resolução. (para estudar problemas semelhantes resolvidos, ver a sebenta, cap 5, os TPCs e os sumários das aulas.)

4.5 Exercício

Funções de várias variáveis: domínio.

Esboçar o domínio natural de f .

- | | | |
|------------------------------------|--|-------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ | (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ | (c) $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$ |
| (d) $f(x, y) = xe^{-\sqrt{y+2}}$ | (e) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{y^2 + 3}$ | (f) $f(x, y) = \frac{x + y}{x + y}$ |

Resolução.

- (b) Domínio de $f = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$, para garantir que a raiz quadrada pode

ser calculada. Mas

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 4.$$

Os pontos (x, y) do plano que satisfazem esta inequação são todos os que estão sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, e todos os que são exteriores ao respetivo círculo (figura 1).

- (e) Domínio de $f = \{(x, y) : 4 - x^2 \geq 0\}$, para garantir que a raiz quadrada pode ser calculada. O denominador $y^2 + 3$ não restringe o domínio porque não se anula para nenhum valor de y . Como

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2,$$

os pontos (x, y) do plano que satisfazem esta desigualdade, são os que pertencem à faixa representada na figura 1.

- (f) Domínio de $f = \{(x, y) : x + y \neq 0\}$, para garantir que o denominador $x + y$ não se anula. O numerador $x + y$ não restringe o domínio porque pode ser calculado para qualquer par de números (x, y) . Como

$$x + y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -x,$$

todos os pontos (x, y) do plano satisfazem esta desigualdade, exceto os que pertencem à reta $y = -x$. Os pontos da reta representam-se a tracejado na figura 1, para indicar que não pertencem ao domínio da função.

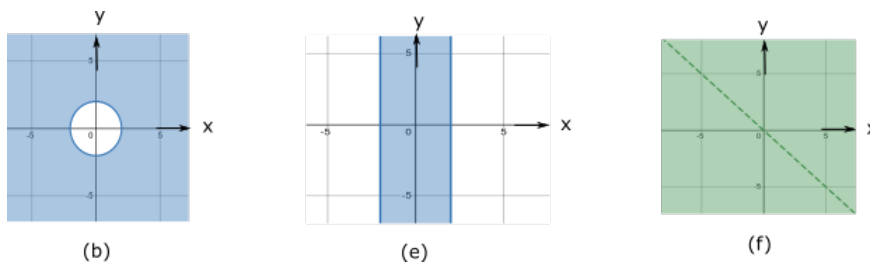


Figura 1

4.6 Exercício

Funções de várias variáveis: derivadas parciais.

Determinar $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$.

(a) $z = 2xy - 4x + 6y - y^2$ (b) $z = 5x^3y^2 + (2x - 1)(3y + 2) - x^2$ (c) $z = 2x^3y - \frac{2y}{3x}$

Resolução.

$$(a) \frac{\partial z}{\partial x} = (2xy - 4x + 6y - y^2)'_x = (2xy)'_x - (4x)'_x + (6y)'_x - (y^2)'_x = 2y - 4 + 0 - 0 = 2y - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2xy - 4x + 6y - y^2)'_y = (2xy)'_y - (4x)'_y + (6y)'_y - (y^2)'_y = 2x - 0 + 6 - 2y = 2x - 2y + 6$$

$$(b) \frac{\partial z}{\partial x} = (5x^3y^2 + (2x-1)(3y+2) - x^2)'_x = (5x^3y^2)'_x - ((2x-1)(3y+2))'_x + (-x^2)'_x$$

Cálculo dos vários termos derivados :

$$(5x^3y^2)'_x = 5y^2(x^3)'_x = 15y^2x^2$$

$$((2x-1)(3y+2))'_x = (3y+2)(2x-1)'_x = (3y+2) \cdot 2 = 6y+4$$

$$(-x^2)'_x = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15y^2x^2 + 6y - 2x + 4.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (5x^3y^2 + (2x-1)(3y+2) - x^2)'_y = (5x^3y^2)'_y - ((2x-1)(3y+2))'_y + (-x^2)'_y$$

Cálculo dos vários termos derivados :

$$(5x^3y^2)'_y = 5x^3(y^2)'_y = 10x^3y$$

$$((2x-1)(3y+2))'_y = (2x-1)(3y+2)'_y = (2x-1) \cdot 3 = 6x-3$$

$$(-x^2)'_y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y + 6x - 3.$$

4.7 Exercício**Funções de várias variáveis: variação direccional.**

Caracterizar a variação das funções (crescente, decrescente, estacionária) nos pontos indicados, na direcção do eixo dos xx e na direcção do eixo dos yy .

$$(a) z = 2x - 7 + y, (x, y) = (0, 0)$$

$$(b) z = x^2 - y, (x, y) = (-1, -1)$$

$$(c) z = \sqrt{1 - xy}, (x, y) = (1/2, 1)$$

$$(d) z = \ln(2x^2 + y), (x, y) = (-1, 2)$$

Resolução.

(a)

$$z_x = (2x - 7 + y)'_x = (2x)'_x - (7)'_x + (y)'_x = 2 - 0 + 0 = 2$$

$$z_x(0, 0) = 2 > 0$$

$$z_y = (2x - 7 + y)'_y = (2x)'_y - (7)'_y + (y)'_y = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$z_y(0, 0) = 1 > 0$$

Por ser $z_x(0, 0) = 2 > 0$, a função é crescente no ponto $(x, y) = (0, 0)$, na direcção do eixo dos x . O declive da reta tangente à superfície no ponto $(x, y, z) = (0, 0, -7)$ e contida no plano $y = 0$, é igual a 2.

Por ser $z_y(0, 0) = 1 > 0$, a função é crescente no ponto $(x, y) = (0, 0)$, na direcção do eixo dos y . O declive da reta tangente à superfície no ponto $(x, y, z) = (0, 0, -7)$ e contida no plano $x = 0$, é igual a 1.

(c)

$$\begin{aligned}
z_x &= \left((1 - xy)^{1/2} \right)'_x = \frac{1}{2} (1 - xy)^{-1/2} (1 - xy)'_x \\
(1 - xy)'_x &= -y \\
z_x &= -\frac{y}{2} (1 - xy)^{-1/2} \\
z_x(1/2, 1) &= -\frac{1}{2} (1 - (1/2)(1))^{-1/2} = -\frac{1}{2(1/2)^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z_y &= \left((1 - xy)^{1/2} \right)'_y = \frac{1}{2} (1 - xy)^{-1/2} (1 - xy)'_y \\
(1 - xy)'_y &= -x \\
z_y &= -\frac{x}{2} (1 - xy)^{-1/2} \\
z_y(1/2, 1) &= -\frac{1/2}{2} (1 - (1/2)(1))^{-1/2} = -\frac{1}{2^{3/2}}
\end{aligned}$$

Por ser $z_x(0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$, a função é decrescente no ponto $(x, y) = (1/2, 1)$, na direção do eixo dos x . O declive da reta tangente à superfície no ponto $(x, y, z) = (1/2, 1, 1/\sqrt{2})$ e contida no plano $y = 1$, é igual a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por ser $z_y(1/2, 1) = -\frac{1}{2^{3/2}} < 0$, a função é decrescente no ponto $(x, y) = (1/2, 1)$, na direção do eixo dos y . O declive da reta tangente à superfície no ponto $(x, y, z) = (1/2, 1, 1/\sqrt{2})$ e contida no plano $x = 1/2$, é igual a $-\frac{1}{2^{3/2}}$.

Bibliografia

Calculus, Anton, Howard, vol. 1, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc.
Sebenta da disciplina, Abrantes, Mário