

3.1 Exercício

Sequências numéricas: termo geral.

Determinar os termos gerais das sequências, u_n , começando em $n = 1$.

- (a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \dots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ (c) $1, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5, \dots$

Resolução.

(b) $u_n = \frac{2n-1}{2n}$

(c) $u_n = (2n-1)!$

3.2 Exercício

Séries Geométricas.

Verificar se as séries convergem. Se for o caso, calcular a sua soma.

- (a) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{4^n}$ (b) $\sum_1^{\infty} 4^{n-1}$ (c) $\sum_1^{\infty} (-3/2)^{n+1}$ (d) $\sum_3^{\infty} \frac{4^{n-1}}{7^{n+2}}$

Resolução.

(b) Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4^{n-1}) = +\infty$ a série é divergente, uma vez que quando uma série numérica é convergente verifica-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(d) $u_n = \sum_3^{\infty} \frac{4^{n-1}}{7^{n+2}} = \frac{4^{3-1}}{7^{3+2}} + \frac{4^{4-1}}{7^{4+2}} + \frac{4^{5-1}}{7^{5+2}} + \dots = \frac{4^2}{7^5} + \frac{4^3}{7^6} + \frac{4^4}{7^7} + \dots$

É uma série geométrica de razão $4/7 < 1$, e por isso converge. A sua soma é

$$S = \frac{4^2/7^5}{1 - 4/7} = \frac{4^2}{3 \cdot 7^4}.$$

3.3 Exercício

Séries numéricas: estudo da convergência.

Estudar a convergência das séries.

- (a) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{6+n}$ (b) $\sum_1^{\infty} (1+1/n)^n$ (c) $\sum_1^{\infty} n/e^{n^2}$ (d) $\sum_1^{\infty} (n^2 \sin^2(1/n))$
 (e) $\sum_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ (f) $\sum_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ (g) $\sum_3^{\infty} \frac{1}{n!}$ (h) $\sum_3^{\infty} 1/(5n+2)$
 (i) $\sum_2^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^{17}}$ (j) $\sum_3^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (l) $\sum_3^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ (m) $\sum_3^{\infty} (k/100)^k$

Resolução.

(a) A série é divergente. Podemos prová-lo por comparação, mostrando que os seus termos são maiores ou iguais aos da série divergente $\sum_1^{\infty} (1/n)$.

Por ser

$$\frac{1}{6+n} \geq \frac{1}{7n}, \quad n \geq 1$$

temos

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{6+n} \geq \sum_1^{\infty} \frac{1}{7n} = \frac{1}{7} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Como $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, o mesmo acontece com a série $(1/7) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ e a prova fica concluída.

(b) $\sum_1^{\infty} (1 + 1/n)^n = e$. A série tem uma soma, logo é convergente.

(c) Vamos aplicar o Critério da Razão para mostrar que a série é convergente. Por ser $u_n = n/e^{n^2}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)/e^{(n+1)^2}}{n/e^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{e^{2n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{2n+1}} \right) = 1 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Como o limite é inferior a 1, o critério diz-nos que a série converge.

(d) Como $\sin(x) \approx x$ para valores de x próximos de zero (ver capítulo 4) e $1/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos $\sin(1/n) \approx 1/n$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \sin^2(1/n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1.$$

A série diverge porque o limite do termo geral não é zero.

3.4 Exercício

Integrais: converter a forma diferencial na forma integral.

Escrever usando um integral.

$$(a) \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(b) \frac{d}{dx} (xe^x) = (x+1)e^x$$

$$(c) \frac{d}{dx} (\tan(x)) = \sec^2(x)$$

$$(d) \frac{d}{dx} \left(\frac{b^x}{\ln(b)} \right) = b^x$$

Resolução.

(a) Por ser $\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, temos

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C.$$

3.5 Exercício

Integral indefinido.

Calcular os integrais indefinidos.

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int (3x^3 - 4\sqrt{x})dx & (b) \int (2x - 3)dx & (c) \int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt \\
 (d) \int (e^x - e^{-x})dx & (e) \int \frac{1}{x^3}dx & (f) \int (2x^2 - 3)^2 dx \\
 (g) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{3}}{3} \right) dx & (h) \int x^3 \sqrt{x} dx & (i) \int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx \\
 (j) \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} dx & (k) \int \frac{dy}{(2+y)^2} & (l) \int \frac{1}{x} \ln(x) dx
 \end{array}$$

Resolução.

$$\begin{array}{l}
 (h) \int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^3 x^{1/2} dx = \int x^{3+1/2} dx = \int x^{7/2} dx = \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} = \frac{2}{9} x^{9/2} + C \\
 (k) \int \frac{dy}{(2+y)^2} = \int (2+y)^{-2} dy = \frac{(2+y)^{-3}}{-3} + C \\
 (l) \int \frac{1}{x} \ln(x) dx = \int (\ln(x))' \ln(x) dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C
 \end{array}$$

3.6 Exercício

Integral indefinido.

Calcular os integrais indefinidos (usar a tabela de primitivas, se necessário).

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx & (b) \int \frac{x^2+1}{x^2} dx & (c) \int \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt \\
 (d) \int \cos(\theta) \tan(\theta) d\theta & (e) \int \frac{\ln(x)}{x \ln(x^2)} dx & (f) \int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx \\
 (g) \int (x^3 - 2)^9 \frac{1}{7} x^2 dx & (h) \int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx & (i) \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx \\
 (j) \int (x^2 + 1)^{50} 2x dx & (k) \int e^x \cos(2e^x) dx & (l) \int \frac{\arcsin(t)}{2\sqrt{1-t^2}} dt
 \end{array}$$

Resolução.

$$\begin{array}{l}
 (a) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2+1} = x - \arctan(x) + C. \\
 (d) \int \cos(\theta) \tan(\theta) d\theta = \int \cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta = \int \sin(\theta) d\theta = -\cos(\theta) + C. \\
 (e) \int \frac{\ln(x)}{x \ln(x^2)} dx = \int \frac{\ln(x)}{2x \ln(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(|x|) + C.
 \end{array}$$

$$(1) \int \frac{\arcsin(t)}{2\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int \arcsin(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int \arcsin(t)(\arcsin(t))' dt = \frac{(\arcsin(t))^2}{4} + C.$$

3.7 Exercício

Integral indefinido.

Calcular os integrais indefinidos (usar a tabela de primitivas, se necessário).

$$\begin{array}{ll} \textcircled{a} \int (4\sec^2(x) + \csc(x)\cot(x))dx & \textcircled{b} \int \sec(x)(\sec(x) + \tan(x))dx \\ \textcircled{c} \int \left(\theta + \frac{2}{\sin^2(\theta)} \right) d\theta & \textcircled{d} \int \frac{1}{1 + \sin(x)} dx \\ \textcircled{e} \int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx & \textcircled{f} \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \end{array}$$

Resolução.

$$(a) I = \int (4\sec^2(x) + \csc(x)\cot(x))dx = 4 \int \sec^2(x)dx + \int \csc(x)\cot(x)dx.$$

Por ser

$$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C \quad (\text{verificar, derivando } \tan(x))$$

e

$$\begin{aligned} \int \csc(x)\cot(x)dx &= \int \frac{1}{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \cos(x)(\sin(x))^{-2} dx \\ &= -(\sin(x))^{-1} + C = -\frac{1}{\sin(x)} + C \end{aligned}$$

(o último integral é da forma $\int u'u^{-2}dx$, com $u = \sin(x)$), temos

$$I = 4\tan(x) - \frac{1}{\sin(x)} + C.$$

(d)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + \sin(x)} dx = \int \frac{1 - \sin(x)}{(1 + \sin(x))(1 - \sin(x))} dx = \int \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin^2(x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \right) dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int \tan(x)\sec(x) dx \end{aligned}$$

Por ser $\int \tan(x)\sec(x)dx = \sec(x) + C$ (ver caso semelhante $\int \csc(x)\cot(x)dx$, acima), temos

$$I = \int \sec^2 x dx - \int \tan(x)\sec(x)dx = \tan(x) - \sec(x) + C$$

3.8 Exercício

Integrar por partes.

$$(a) \int x e^{3x} dx$$

$$(b) \int_0^2 2x e^{-x} dx$$

$$(c) \int_{\pi/2}^{\pi} x \operatorname{sen}(2x) dx$$

$$\textcircled{d} \int e^x \cos(x) dx$$

$$\textcircled{e} \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(f) \int \ln(x+3) dx$$

Resolução.

(d) Ver Sebenta, cap 3.

$$(e) I = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} \ln(x) dx.$$

Fazendo

$$u = \ln(x)$$

$$v' = x^{-1/2}$$

$$u' = 1/x$$

$$v = 2x^{1/2}$$

e usando a fórmula de primitivação por partes $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, temos

$$I = 2x^{1/2} \ln(x) - \int \frac{2x^{1/2}}{x} dx = 2x^{1/2} \ln(x) - \int 2x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \ln(x) - 4x^{1/2} + C$$

3.9 Exercício

Primitivação por substituição.

Primitivar por substituição usando as substituições indicadas.

$$(a) \int -2x e^{-x^2} dx, u = -x^2$$

$$(b) \int \frac{x}{x+1} dx, u = x+1$$

$$\textcircled{c} \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx, x = u^2$$

$$(d) \int 5x \sqrt{1-x^2} dx, u = 1-x^2$$

$$(e) \int \cot(x) \csc^2(x) dx, u = \cot(x)$$

$$(f) \int (1 + \operatorname{sen}(t))^9 \cos(t) dt, u = 1 + \operatorname{sen}(t)$$

Resolução.

(c) Vamos usar duas substituições para resolver este integral.

Fazendo $u^2 = x$, ou $u = \sqrt{x}$, temos

$$du/dx = 1/(2\sqrt{x}) \Leftrightarrow dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$$

e

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+u^2}{1+u} 2u du$$

Fazendo agora $1+u = z \Leftrightarrow u = z-1$ e $du = dz$, fica

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+u^2}{1+u} 2u du = \int \left(2 \frac{(z-1) + (z-1)^3}{z} \right) dz = \int (2z^2 - 6z + 8 - 4/z) dz \\ &= (2/3)z^3 - 3z^2 + 8z - 4\ln|z| + C. \end{aligned}$$

Substituindo z por $(1 + u)$, e depois u por $\sqrt{x}$, fica

$$\begin{aligned} I &= (2/3)(1 + \sqrt{x})^3 - 3(1 + \sqrt{x})^2 + 8(1 + \sqrt{x}) - 4\ln|(1 + \sqrt{x})| + C \\ &= (2/3)(1 + 3\sqrt{x} + 3x + x^{3/2}) - 3(1 + 2\sqrt{x} + x) + 8(1 + \sqrt{x}) - 4\ln|(1 + \sqrt{x})| + C \\ &= (2/3)x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} + 5 + (2/3) - 4\ln|(1 + \sqrt{x})| + C. \end{aligned}$$

Finalmente, incorporando a constante $5 + (2/3)$ em C , obtemos

$$I = (2/3)x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|(1 + \sqrt{x})| + C.$$

3.10 Exercício

Primitivação por substituição.

Primitivar por substituição.

$$\begin{array}{lll} (a) \int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy & (b) \int \sqrt{e^x} dx & (c) \int \frac{x}{(4x^2 + 1)^3} dx \\ \textcircled{d} \int \tan^3(5x) \sec^2(5x) dx & (e) \int \frac{1}{e^x} dx & \textcircled{f} \int \sin^n(a + bx) \cos(a + bx) dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Resolução.

(d) Como $(\tan(x))' = \sec^2(x)$, fazemos a substituição

$$u = \tan(5x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5\sec^2(5x) \Leftrightarrow dx = \frac{du}{5\sec^2 x}.$$

Resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^3(5x) \sec^2(5x) dx = \int u^3 \sec^2(5x) \frac{du}{5\sec^2 x} = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{u^4}{5 \cdot 4} + C \\ &= \frac{\tan^4(5x)}{20} + C. \end{aligned}$$

(f) Como $(\sin(a + bx))' = \cos(a + bx)$, fazemos a substituição

$$u = \sin(a + bx) \Rightarrow \frac{du}{dx} = b\cos(a + bx) \Leftrightarrow dx = \frac{du}{b\cos(a + bx)}.$$

Resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^n(a + bx) \cos(a + bx) dx = \int u^n \cos(a + bx) \frac{du}{b\cos(a + bx)} \\ &= \frac{1}{b} \int u^n du = \frac{1}{b} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{b} \frac{\sin^{n+1}(a + bx)}{n+1} + C \end{aligned}$$

3.11 Exercício

Integral definido.

Calcular os integrais definidos. Identificar aqueles que correspondem ao cálculo de uma área e fazer um esboço das regiões do plano correspondentes.

- | | | |
|--|-------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\int_0^3 x dx$ | (b) $\int_{-1}^0 x dx$ | (c) $\int_{-1}^4 x dx$ |
| (d) $\int_0^\pi \cos(x) dx$ | (e) $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx$ | (f) $\int_{-1}^2 2x - 3 dx$ |
| (g) $\int_0^1 \tan^{-1}(x) dx$ | (h) $\int_0^1 \sin^{-1}(x) dx$ | (i) $\int_0^1 \cos^4(x) dx$ |
| (j) $\int_1^3 \sqrt{x} \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx$ | (k) $\int_0^\pi (x + x \cos(x)) dx$ | (l) $\int_{-1}^2 x \sqrt{8 - x^2} dx$ |
| (m) $\int_1^3 (x^{-1} + \sqrt{2}e^x - \csc(x) \cot(x)) dx$ | (n) $\int_0^{3\pi/4} \cos(x) dx$ | (o) $\int_{-1}^1 e^x - 1 dx$ |

Resolução.

(f) Como

$$|2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3, & x > \frac{3}{2} \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 |2x - 3| dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x + 3) dx + \int_{3/2}^2 (2x - 3) dx \\ &= (-x^2 + 3x) \Big|_{-1}^{3/2} + (x^2 - 3x) \Big|_{3/2}^2 \\ &= [(-(9/4) + 9/2) - (-1 - 3)] + [(4 - 6) - ((9/4) - 9/2)] = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

(g) Reescrevendo o integral na forma

$$\int_0^1 \tan^{-1}(x) dx = \int_0^1 1 \cdot \arctan(x) dx,$$

podemos calculá-lo usando primitivação por partes.

$$u' = 1 \quad u = x \quad v = \arctan(x) \quad v' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Usando a expressão $\int_0^1 u'v dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 uv' dx$, obtemos

$$I = \int_0^1 1 \cdot \arctan(x) dx = x \arctan(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx.$$

Calculamos esta última primitiva.

$$I = \int \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

Finalizamos o cálculo do integral definido.

$$\begin{aligned} I &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

3.12 Exercício

Calcular as áreas das regiões limitadas, definidas pelas curvas indicadas.

$$(a) \ y = x^2, \ y = x + 6 \quad (b) \ x = y^2, \ y = x - 2 \quad (c) \ y = -x^2, \ y = x^2 - 1$$

Resolução. Na figura 1 estão representadas as funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$. A sombreado está a região limitada, definida pelas duas curvas, cuja área pretendemos calcular. Seja A o valor desta área. Temos

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b (-x^2 - (x^2 - 1)) dx = \int_a^b (-2x^2 + 1) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x \right) \Big|_a^b$$

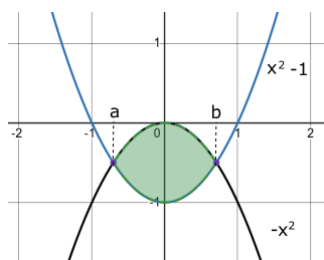


Figura 1

Vamos calcular a e b . Como são valores de x para os quais $f(x) = g(x)$, temos

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

do que resulta $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calculamos agora o valor da área.

$$A = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \left(-\frac{2}{3}2^{-3/2} + 2^{-1/2} \right) - \left(\frac{2}{3}2^{-3/2} - 2^{-1/2} \right) = \frac{2^{3/2}}{3} \approx 0.94.$$

Bibliografia

Calculus, Anton, Howard, vol. 1, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc.
Sebenta da disciplina, Abrantes, Mário