2. Derivadas

A **derivada em ordem a x** de uma função $f(x)$ é outra função, representada por

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x},$$

ou pela notação abreviada

$$f'(x).$$

O valor da **função derivada** num ponto do seu domínio informa-nos sobre a taxa de variação de $f(x)$ com x nesse ponto (**velocidade**) e permite-nos obter a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. O declive da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = a$ é $m = f'(a)$. Esta reta constitui uma boa aproximante da função num intervalo suficientemente pequeno contendo o ponto, sendo esta a razão da importância da derivada de uma função.

A partir do conhecimento da expressão de $f'(x)$ num dado intervalo, podemos recuperar a expressão de $f(x)$ a menos de uma constante. Este resultado é muito importante porque existem muitos sistemas físicos e problemas teóricos cuja formalização matemática envolvida (conjunto de fórmulas que relacionam as grandezas de interesse) não nos fornece de forma direta as funções pretendidas, mas sim as suas derivadas.

2.1. Taxa de Variação Média de uma Função

A **taxa de variação média** de uma função $f(x)$ entre dois pontos do seu domínio é o **declive da reta** que contém os pontos do gráfico correspondentes. A reta é a única função em que a taxa de variação média é constante em todo o seu domínio.

2.33 Exercício

Calcular a taxa de variação média de cada função com respeito à variável x, no intervalo indicado. Interpretar graficamente os resultados obtidos.

(a) $f(x) = -2x + 3,\ [-1, 1]$ (b) $f(x) = -2x,\ [-1, 1]$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + 1,\ [0, 4]$ (d) $f(x) = \sqrt{x},\ [0, 4]$

Resolução.
(a) Seja $T_{[-1,1]}$ a taxa de variação entre os pontos do domínio $x = -1$ e $x = 1$. Temos

$$T_{[-1,1]} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 5}{2} = -2.$$

A taxa de variação média de uma função linear é igual ao declive da reta que lhe corresponde.

(c) Seja $T_{[0,4]}$ a taxa de variação referente aos pontos do domínio $x = 0$ e $x = 4$. Temos

$$T_{[0,4]} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{4} + 1) - (\sqrt{0} + 1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como indica o gráfico da figura 13, a taxa de variação média calculada é o declive constante da reta $y = x/2 + 1$ que interseta o gráfico de $f(x)$ nos pontos de abcissas $x = 0$ e $x = 4$.

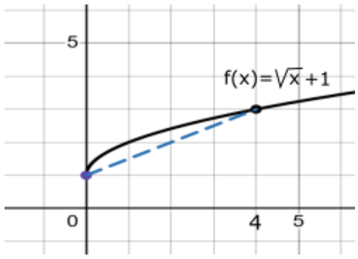

Figura 13

2.34 Exercício

Durante uma viagem, um automóvel percorreu uma distância de 58 km no tempo de 1 hora e 10 minutos. Qual foi a velocidade média do automóvel, em $km/hora$, no percurso?
Solução: [$\approx 49.7\ km/h$]

2.2. Derivadas de Funções Elementares

2.35 Exercício

Determinar as derivadas das funções. Caracterizar a variação instantânea de cada função no ponto $x = -2$, indicando se a função é crescente, decrescente, ou nem crescente nem decrescente no ponto (quando aplicável).

$(a)\ y = 2$	$(b)\ y = -\pi + \dfrac{1}{2}$	(c) $y = -e^2$	$(d)\ y = 3x$
$(e)\ y = 2 - \sqrt{2}x$	(f) $y = -3x^2 - 5x + 2$	$(g)\ y = x^{-2}$	$(h)\ y = -3x^2 + \sqrt[3]{x}$
(i) $y = \sqrt{x} + x^{-3}$	$(j)\ y = -\sqrt[4]{x} - 4x^{-5/2}$	$(k)\ y = 2e^x - 3\ln(x)$	(l) $y = x/x^2$
$(m)\ y = \dfrac{1}{x-2}$	$(n)\ y = 2x + \ln(x) - \dfrac{1}{3}e^x$	(o) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$	$(p)\ y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
$(q)\ y = xe^x$	$(r)\ y = (x+1)\ln(x)$	(s) $y = (\ln(x))^2$	$(t)\ y = e^{2x}$

Resolução. Uma função $f(x)$ diz-se **crescente no ponto** $x = p$ do seu domínio se, e somente se, existe um intervalo I de pontos do domínio, contendo $x = p$, tal que para qualquer ponto $x \in I$ se verifica

- $x < p \Rightarrow f(x) < f(p)$;
- $x > p \Rightarrow f(x) > f(p)$.

Se a função $f(x)$ for crescente em todos os pontos do intervalo I, então $f(x)$ diz-se **crescente no intervalo** I.

Uma função $f(x)$ diz-se **decrescente no ponto** $x = p$ do seu domínio se e somente se existe um intervalo I de pontos do domínio, contendo $x = p$, tal que para qualquer ponto $x \in I$ se verifica

- $x < p \Rightarrow f(x) > f(p)$;
- $x > p \Rightarrow f(x) < f(p)$.

Se a função $f(x)$ for decrescente em todos os pontos do intervalo I, então $f(x)$ diz-se **decrescente no intervalo** I.

Se não sucede algum destes dois casos, a função diz-se **nem crescente nem decrescente** no ponto.

O **sinal derivada de uma função num ponto**, quando definido, dá-nos informação sobre o crescimento/descrescimento da função no ponto:

- se $f'(p) > 0$, então a função é **crescente no ponto** $x = a$;
- se $f'(p) < 0$, então a função é **decrescente no ponto** $x = a$;
- se $f'(p) = 0$, então o ponto $x = p$ diz-se **ponto estacionário**, podendo a função ser crescente, decrescente, ou nenhum destes dois casos no ponto.

O **sinal derivada de uma função num intervalo** $]a, b[$, quando definido, dá-nos informação sobre o crescimento/descrescimento da função no intervalo:

- se $f'(p) > 0$ para todos os pontos do intervalo, então a função é **crescente no intervalo** $]a, b[$;
- se $f'(p) < 0$ para todos os pontos do intervalo, então a função é **decrescente no intervalo** $]a, b[$;
- se $f'(p) = 0$ para todos os pontos do intervalo, então a função é **constante no intervalo** $]a, b[$.

Cálculo das derivadas

$$(c)\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,(-e^2)}{dx} = 0$$

$$(f)\ y' = \left(-3x^2 - 5x + 2\right)' = (-3x^2)' - (5x)' + (2)' = -3(x^2) - 5(x)' + 0 = -6x - 5$$

$$(i)\ y' = \left(\sqrt{x} + x^{-3}\right)' = (x^{1/2})' + (x^{-3})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 3x^{-4}$$

$$(l)\ y' = \left(\frac{x}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(o)\ y' = \left(\frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{((x+1)^3)'x^{3/2} - (x+1)^3(x^{3/2})'}{\left(x^{3/2}\right)^2}$$
$$= \frac{3(x+1)^2x^{3/2} - (x+1)^3(3/2)x^{1/2}}{x^3} = \frac{3(x+1)^2x - (x+1)^3(3/2)}{x^{5/2}}$$
$$= \frac{3(x-1)(x+1)^2}{2x^{5/2}}$$

$$(s)\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d}{d\,x}(\ln(x))^2 = 2\ln(x)\frac{d\,ln(x)}{d\,x} = \frac{2\ln(x)}{x}$$

Notar que $(x^{3/2})^2 = |x|^3$. Como Domínio de $y =]0, +\infty[$, temos $|x|^3 = x^3$. **Caracterizar a variação instantânea de cada função no ponto** $x = -2$

(c) $f'(x)$ é nula em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R}$. Conclusão: $f(x)$ é constante em $\mathbb{R}$. Não cresce nem decresce no ponto $x = -2$.

(f) $f'(-2) = -6(-2) - 5 = 7 > 0$. Conclusão: $f(x)$ é crescente no ponto $x = -2$.

(i) $f(x)$ não está definida no ponto $x = -2$. Conclusão: não tem sentido averiguar se $f(x)$ é crescente ou decrescente no ponto $x = -2$.

(l) $f'(-2) = -1/2^2 = -1/4$. Conclusão: $f(x)$ é decrescente no ponto $x = -2$.

(o) $f(x)$ não está definida no ponto $x = -2$. Conclusão: não tem sentido averiguar se $f(x)$ é crescente ou decrescente no ponto $x = -2$.

2.36 Exercício

Determinar os intervalos de monotonia das funções.

(a) $y = (1-x)(1-2x)$	(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	(c) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$
(d) $y = (3x)^5$	(e) $y = (x^2-1)^3$	(f) $y = \sqrt{2x+3}$
(g) $y = e^{4x+5}$	(h) $y = \ln(2-x^3)$	(i) $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
(j) $y = e^{(1-x)^2}$	(k) $y = 2x(x-1)^3 - (x-1)e^x$	(l) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
(m) $y = 6x^{7/2} + 4x^{7/2} + 2x$	(n) $y = \big(\ln(3x-2)\big)^2$	(o) $y = \lvert x\rvert$
(p) $y = 2\log_{10}(x-1)$	(q) $y = 7^{4x+5}$	(r) $y = x^{2x}$
(s) $y = (2x)^x$	(t) $y = \dfrac{1}{e^{1-x}}$	

Resolução.

- **Intervalo de monotonia** de uma função, $f(x)$, é um intervalo aberto no qual a função é crescente, decrescente, ou constante.

- A função derivada, $f'(x)$, é uma ferramenta poderosa para determinar analiticamente (isto é, por meio de cálculos) os intervalos e monotonia de $f(x)$, sem recorrer a uma representação do gráfico.

- Para tal, basta determinar o **sinal** de $f'(x)$ nos intervalos do domínio da função $f(x)$ definidos pelos onde a derivada é nula, ou não está definida. Os pontos onde a derivada não está definida podem, ou não, pertencer ao domínio da função, mas são sempre **pontos de acumulação** do domínio.

- Se $f'(x)$ é:
  - **positiva** em todos os pontos do intervalo aberto I, então $f(x)$ é **crescente** nesse intervalo;
  - **negativa** em todos os pontos do intervalo aberto I, então $f(x)$ é **decrescente** nesse intervalo;
  - **nula** em todos os pontos do intervalo aberto I, então $f(x)$ é **constante** nesse

intervalo.

(a)

- Cálculo da derivada y'.

$$\begin{aligned} y' &= (1-x)'(1-2x) + (1-x)(1-2x)' \\ &= -(1-2x) - 2(1-x) \\ &= -1 + 2x - 2 + 2x = 4x - 3 \end{aligned}$$

- Cálculo dos pontos onde $f'(x) = 0$ ou onde $f'(x)$ não está definida. Como $f'(x)$ está definida em todos os pontos de acumulação do seu domínio, os únicos pontos de interesse são aqueles em que a derivada é nula. Vamos calculá-los.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

- Determinar os intervalos de monotonia da função. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, os **intervalos de monotonia da função** são $]-\infty, 3/4[$ e $]3/4, +\infty[$.

- Analisar o sinal de y' em cada um destes intervalos e tirar conclusões sobre a variação da função. Como para cada intervalo de monotonia a natureza do sinal é **a mesma** em todos os seus pontos, escolhemos um **ponto qualquer** de cada intervalo para a determinar.

Sinal de y' no intervalo $]-\infty, 3/4[$: $y'(0) = 4(0) - 3 = -3 < 0$
A função é decrescente no intervalo

Sinal de y' no intervalo $]3/4, +\infty[$: $y'(1) = 4(1) - 3 = 1 > 0$
A função é crescente no intervalo

(h)

- Cálculo da derivada y'.

$$y' = (\ln(2-x^3)) = \frac{(2-x^3)'}{2-x^3} = \frac{-3x^2}{2-x^3}$$

- Cálculo dos pontos onde $f'(x) = 0$ ou onde $f'(x)$ não está definida.
Devemos anotar que o domínio da função é o conjunto de valores de x para os quais

$$2 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{2}$$

que são os do intervalo $]-\infty, \sqrt[3]{2}[$. Vamos então calcular os pontos críticos.
Zeros da derivada:

$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-3x^2}{2-x^3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-3x^2 = 0) \wedge (2 - x^3 \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & (x = 0) \wedge (x \neq \sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

O único ponto de interesse é $x = 0$, porque $x \neq \sqrt[3]{2}$ é um extremo do intervalo aberto que corresponde ao domínio e, por isso, não tem interesse para esta análise.

- Os **intervalos de monotonia da função** são $]-\infty, 0[$ e $]0, \sqrt[3]{2}[$.
- Vamos obter informação sobre o sinal de y' em cada um destes intervalos. Como para cada intervalo de monotonia a natureza do sinal é **a mesma** em todos os seus pontos, escolhemos um **ponto qualquer** de cada intervalo para averiguar sobre ela.

  Sinal de y' no intervalo $]-\infty, 0[$: $y'(-1) = \dfrac{-3(-1)^2}{2-(-1)^3} = \dfrac{-3(-1)^2}{2-(-1)^3} = -1 < 0$

  A função é decrescente no intervalo.

  Sinal de y' no intervalo $]0, \sqrt[3]{2}[$: $y'(1) = \dfrac{-3(1)^2}{2-(1)^3} = -3 < 0$

  A função é decrescente no intervalo.

- Conclusão: a função é **decrescente** em todos os pontos do seu domínio.

2.37 Exercício

Calcular as derivadas das funções. Caracterizar a variação instantânea de cada função (crescente, decrescente, ou nem crescente nem decrescente) no ponto $x = -1$ (se possível).

$(a)\ y = xe^x$	$(b)\ y = sen(x)x^2$	$(c)\ y = (1-x)(1-2x)$
d $y = tan(x)$	$(e)\ y = \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$	$(f)\ y = cot(x)$
g $y = sec(x)$	$(h)\ y = (-x+1)^2$	$(i)\ y = \sqrt{2x+1}$
$(j)\ y = sen(2x+1)$	$(k)\ y = cos(2x+2)$	$(l)\ y = csc(x)$

Resolução. Cálculo das derivadas

$$(d)\ y' = (tan(x))' = \left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right)' = \frac{(sin(x))'cos(x) - sin(x)(cos(x))'}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$$

$$(g)\ y' = (sec(x))'$$

$$= \left(\frac{1}{cos(x)}\right)' = \frac{(1)'cos(x) - (1)(cos(x))'}{cos^2(x)} = \frac{sin(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{sin(x)}{cos(x)}\frac{1}{cos(x)} = tan(x)sec(x)$$

$$(k)\ y' = (\cos(2x+2))' = (2x+2)'(-\sin(2x+2)) = -2\sin(2x+2)$$

Caracterizar a variação instantânea de cada função no ponto $x = -1$

(d) y' é definida num intervalo suficientemente pequeno contendo o ponto $x = -1$ e é positiva no ponto (porquê?). Conclusão: $f(x)$ é crescente no ponto $x = -1$.

(g) y' é definida num intervalo suficientemente pequeno contendo o ponto $x = -1$ e é negativa no ponto, porque $tan(-1) < 0$ e $sec(-1) > 0$. Conclusão: $f(x)$ é crescente no ponto $x = -1$.

(k) y' é definida num intervalo suficientemente pequeno contendo o ponto $x = -1$ e é nula no ponto, porque $2sin(2(-1) + 2) = 2(0) = 0$. Por isso $f(x)$ é estacionária no ponto $x = -1$. Mas y' é positiva para pontos menores que -1 e negativa para pontos maiores que -1, numa vizinhança suficientemente pequena deste ponto. Conclusão: $x = -1$ é ponto onde a função não é crescente nem decrescente.

2.38 Exercício

Derivadas

Provar as seguintes afirmaçoes.

a) $y = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$.

(b) $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$.

(c) $y = \begin{cases} x^2 + 1, \ x \leq 1 \\ x + 2, \ x > 1 \end{cases}$ não é derivável em $x = 1$, mas é contínua neste ponto.

Resolução.
(a) A função $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$ por não existir o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

A existência deste limite implicaria a existência dos limites laterais ´$\lim_{\Delta x \to 0^-}$' e ´$\lim_{\Delta x \to 0^+}$' no ponto $x = 0$, sendo que nem o primeiro deles existe, já que o domínio da função não comtempla valores de x menores que zero; nem existe o segundo limite lateral, já que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty. \end{aligned}$$

2.3. Reta Tangente ao Gráfico num Ponto

2.39 Exercício

Derivadas

Determinar as rectas tangentes aos gráficos das funções nos pontos indicados. Usar as equações das retas para calcular os valores aproximados das funções nos pontos $x - 0.01$.

(a) $f(x) = 2/x, \ x = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x}, \ x = 4$

c) $f(x) = 2 - \ln(6x + 1), \ x = 0$ (d) $f(x) = sen(2x), \ x = \pi/12$

Resolução.
(a) A reta é tangente ao gráfico da função no ponto $(x, y) = (0, f(0)) = (0, 2)$. O declive

m da reta é igual a $f'(0)$. Vamos calculá-lo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(2 - \ln(6x+1)\big)' = (2)' - \big(\ln(6x+1)\big)' \\ &= -\frac{(6x+1)'}{6x+1} = -\frac{6}{6x+1} \\ m &= f'(0) = -6 \end{aligned}$$

A equação da reta tem a forma $y = x + b$. Para calcular o offset b substituimos na equação as coordenadas do ponto $(0, 2)$.

$$2 = -6(0) + b \Leftrightarrow b = 2$$

A equação pretendida é $y = -6x + 2$ (figura 14).
Como se pode confirmar na figura, a reta é uma boa aproximante da função numa vizinhança pequena do ponto $x = 0$. Daí podermos usar a fórmula da reta para aproximar valores da função $f(x)$ nestas vizinhanças. No caso, temos

$$f(0 - 0.01) = f(-0.01) \approx -6(-0.01) + 2 = 2.06.$$

Usando a expressão de $f(x)$ temos $f(-0.01) \approx 2.06187$ (seis dígitos exatos), o que significa que o uso da reta forneceu o valor com um erro inferior a 2 milésimas.

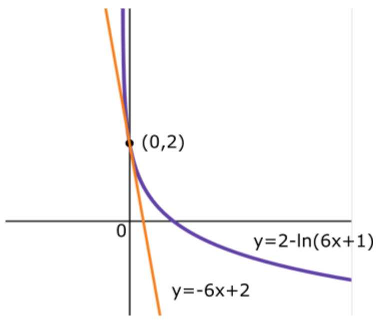

Figura 14

2.40 Exercício

Derivadas

Usar as rectas tangentes às curvas nos pontos x_1 indicados, para obter estimativas dos valores das funções nos pontos x_2.

(a) $\sqrt{3x-2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2.03$ $\qquad$ (b) $\dfrac{x}{x^2+1}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1.96$

2.41 Exercício

Derivadas: aplicações

Em que pontos o gráfico da função $y = \ln(x^2 - 3x + 4)$ admite uma recta tangente horizontal?

Resolução.
Os pontos onde o gráfico admite uma reta tangente horizontal, são aqueles em que a derivada y' é nula. Vamos calculá-los.

$$y' = \left(\ln(x^2-3x+4)\right)' = \frac{(x^2-3x+4)'}{x^2-3x+4} = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x^2-3x+4} = 0 \Leftrightarrow (2x-3=0) \wedge (x^2-3x+4 \neq 0) \Leftrightarrow x = 3/2.$$

O único ponto onde o gráfico admite uma tangente horizontal é $x = 3/2$.

2.4. Derivada da Função Inversa

2.42 Exercício

Derivadas

Determinar as derivadas das funções inversas $\left(f^{-1}\right)'(x)$ no ponto $x = 2$, sem determinar previamente as funções inversas.

(a) $f(x) = 2x-2$ (b) $f(x) = sen(x)$ (c) $f(x) = sec(x)$ (d) $f(x) = tan(x)$

Resolução.
(c) Os gráficos das funções $sec(x)$ e $arcsec(x)$ estão representados na figura 15. No gráfico da função $sec(x)$ estão, a cor mais leve, os ramos correspondentes à restição da função considerada para a obtenção da inversa, $arcsec(x)$. O ponto $x = 2$ do domínio da função $arcsec(x)$ é a imagem do ponto $arcsec(2) = \pi/3$ do domínio da função $sec(x)$ – notar que $sec(\pi/3) = 1/cos(\pi/3) = 1/(1/2) = 2$. Então temos

$$\left(arcsec(x)\right)'_{x=2} = \frac{1}{\left(sec(x)\right)'_{x=\pi/3}}.$$

. Por ser $(sec(x))' = sec(x)tan(x)$, obtemos

$$\left(arcsec(x)\right)'_{x=2} = \frac{1}{sec(\pi/3)tan(\pi/3)} = \frac{1}{(2)(\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

. O valor da derivada $\left(arcsec(x)\right)'_{x=2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ é o declive da reta tangente ao gráfico da função $arcsec(x)$ no ponto $x = 1$.

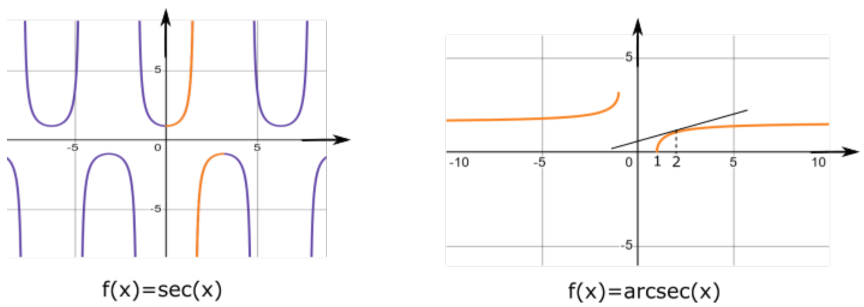

Figura 15

2.43 Exercício

Calcular as derivadas das funções inversas.

(a) $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$ (b) $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

Resolução.
(a) Fazendo $y = f(x)$, temos

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

ou

$$\left(f^{-1}\right)'(2x^5 + x^3 + 1) = \frac{1}{(2x^5 + x^3 + 1)'} = \frac{1}{10x^4 + 3x^2}$$

Como usamos esta expressão? Como o domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$ e o domínio de $f'(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (porquê?), podemos calcular $(f^{-1})'(x)$ em qualquer ponto, exceto $x = 0$. Como o ponto $(x, y) = (1, f(1)) = (1, 4)$ (por exemplo) pertence ao gráfico de $f(x)$ e $x = 1 \neq 0$, temos

$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{10(1)^4 + 3(1)^2} = \frac{1}{13}.$$

Notar que escolhemos $x = 1$ e calculámos $y = 4$. O contrário não pode ser feito analíticamente porque se escolhermos o valor de y para o qual queremos determinar a derivada da inversa, temos depois que obter o valor de x que lhe corresponde resolvendo em ordem a x a equação $y = 2x^5 + x^3 + 1$. Isto exigia uma fórmula resolvente para polinomiais de grau cinco, que não existe.

2.5. Derivada da Função Composta

2.44 Exercício

1. Mostrar que cada função $f(x)$ é a composta das funções $g(x), h(x)$ indicadas.
2. Escrever $f'(x)$ usando as expressões de $g'(x)$ e $h'(x)$.

(a) $f(x) = (3x + 4)^2, \; g(x) = 3x + 4, \; h(x) = x^2$

(b) $f(x) = \ln(x^2 - 1), \; g(x) = x^2 - 1 \; h(x) = \ln(x)$

(c) $f(x) = e^{x^3+1}, \; g(x) = x^3 + 1, \; h(x) = e^x$

(d) $f(x) = sin(3x + 2), \; g(x) = 3x + 2 \; h(x) = sin(x)$

Resolução.
Se $f(x)$ é a composta das funções $g(x)$ e $h(x)$, então $f(x) = h(g(x))$ e

$$f'(x) = g'(x)h'(g(x)).$$

(a) 1. Verifica-se que

$$h(g(x)) = h(3x + 4) = (3x + 4)^2 = f(x).$$

2.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x+4)' = 3 \\ h'(x) &= (x^2)' = 2x \\ h'(g(x)) &= 2(3x+4) = 6x+8 \\ 1em f'(x) &= g'(x)h'(g(x)) = (3x+4)'(2(3x+4)) = 3(6x+8) = 18x+24 \end{aligned}$$

(c)

1. $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^3+1) = e^{x^3+1} = f(x)$
2. $f'(x) = (h \circ g)'(x) = g'(x)h'(g(x))$

   $= (x^3+1)' \, (e^x)' \,|_{x=x^3+1}$

   $= 3x^2 \, (e^x)|_{x=x^3+1}$

   $= 3x^2 e^{x^3+1}$

(d) 1. Verifica-se que

$$h(g(x)) = h(3x) = sin(3x).$$

2.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x+2)' = 3 \\ h'(x) &= (sin(x))' = cos(x) \\ h'(g(x)) &= cos(3x+2) \\ 1em f'(x) &= g'(x)h'(g(x)) = (3x+2)'(cos(3x+2)) = 3cos(3x+2) \end{aligned}$$

2.45 Exercício

Em cada um dos casos calcular um valor aproximado para a derivada no ponto indicado, determinando o cociente da variação Δy correspondente a uma variação $\Delta x = 0.01$.

$(a)\ y = (x+2)^2 \quad x = 1 \qquad\qquad (b)\ y = \log_{10}(x), \quad x = 100$

2.6. Derivada da Função Implícita

2.46 Exercício

Derivadas

As seguintes funções são injectivas?

$(a)\ f(x) = x^2 + 8x + 5 \qquad (b)\ f(x) = 2x^5 + x^3 + 3x + 2 \qquad (c)\ f(x) = 2x + sen(x)$

2.47 Exercício

Derivadas

Calcular as derivadas das funções implícitas e as equações das rectas tangentes às curvas nos pontos indicados (se possível).

(a) $x^2 + y^2 = 8, \ \ (x, y) = (2, -2)$ (b) $4x^2 - 2y^2 = 9, \ \ (x, y) = (4, 12)$

(c) $x^3 + 2y^3 = 3xy, \ \ (x, y) = (1, 1)$ (d) $5y^2 + sen(y) = x^2, \ \ (x, y) = (0, 0)$

Resolução.

(c) Começamos por confirmar que o ponto $(x, y) = (1, 1)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as suas coordenadas na equação e verificando que a igualdade obtida é verdadeira.

$$(1)^3 + 2(1)^3 = 3(1)(1) \Leftrightarrow 3 = 3.$$

De seguida obtemos uma expressão para y'.

$$\begin{aligned}(x^3 + 2y^3)' = (3xy)' &\Leftrightarrow 3x^2 + 6y^2y' = 3y + 3xy' \\ &\Leftrightarrow (6y^2 - 3x)y' = 3y - 3x^2 \\ &\Leftrightarrow y' = \frac{3y - 3x^2}{6y^2 - 3x}\end{aligned}$$

A derivada da função $y = y(x)$ no ponto $x = 1$ é

$$y'_{(1,1)} = \frac{3(1) - 3(1)^2}{6(1)^2 - 3(1)} = 0$$

Na figura 16 podemos confirmar que a relação implícita $x^3 + 2y^3 = 3xy$ não define uma só função, uma vez que assume diferentes imagens para o mesmo objecto no intervalo $]0, x_P[$, sendo x_P a abcissa do ponto P. A reta tangente tem declive *zero* e a sua fórmula é $y = 1$. Exercício: usar a fórmula da derivada para mostrar que as coordenadas do ponto P são $(x_P, y_P) = (\sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$.

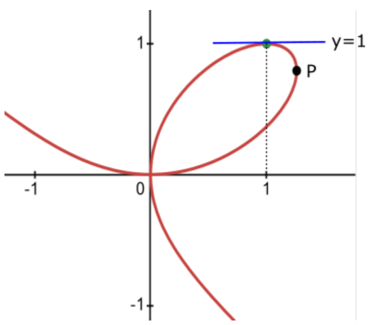

Figura 16

2.7. Derivadas de Ordem Superior

2.48 Exercício

Calcular as derivadas de primeira ordem, $\frac{dy}{dx}$, segunda ordem, $\frac{d^2y}{dx^2}$, terceira ordem, $\frac{d^3y}{dx^3}$ e quarta ordem $\frac{d^4y}{dx^4}$ das funções.

$(a)\ y = 4x^2 + 2x - 1$	b $y = sin(x)$
$(c)\ f(x) = \ln(x)$	$(d)\ f(x) = e^x$

Resolução.

$$\begin{aligned}(b)\ y' &= (sin(x))' = cos(x)\\ y'' &= (y')' = (cos(x))' = -sin(x)\\ y''' &= (y'')' = (-sin(x))' = -cos(x)\\ y^{(4)} &= (y''')' = (-cos(x))' = sin(x)\end{aligned}$$

2.49 Exercício

Usar a derivada de segunda ordem para qualificar os **pontos críticos** de derivada nula da função $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4$.

Resolução.
Notar que

- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então $x = a$ é um **ponto de mínimo local** da função;
- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então $x = a$ é um **ponto de máximo local** da função.

Vamos calcular os zeros de $f'(x)$.

$$f'(x) = (x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4)' = (x^3/3)' + (x^2/2)' - (2x)' + (4)' = x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow (x = -2) \vee (x = 1)$$

Os zeros de $f'(x)$ são $x = -2$ e $x = 1$. Agora calculamos a segunda derivada de $f(x)$.

$$f''(x) = (x^2 + x - 2)' = 2x + 1.$$

Finalmente vamos determinar o sinal de $f''(x)$ nos zeros de $f'(x)$.

$$f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0 \qquad f''(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0$$

Concluimos que $x = -2$ é um ponto de máximo local de $f(x)$, sendo $f(-2) = 22/3$; $x = 1$ é um ponto de mínimo local de $f(x)$, sendo $f(1) = 17/6$ (verificar estes resultados usando um plotter de gráficos).

2.8. Aplicações das Derivadas

2.8.1 Teorema de Rolle e Regra de l'Hôpital

2.50 Exercício

Teorema de Rolle

Utilizar o teorema de Rolle para justificar as afirmações seguintes.

(a) A função $f(x) = x^3 - 7x + 6$ tem um ponto estacionário no intervalo $]1, 2[$.

(b) A função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ tem um ponto estacionário no intervalo $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Resolução.

O **Teorema de Rolle** diz-nos que se uma função $f(x)$ é diferenciável no intervalo $]a, b[$, e se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ para o qual $f'(x) = 0$, isto é, c é um **ponto estacionário** de $f(x)$.

(a) Como a função admite derivada em todos os pontos de $\mathbb{R}$ (é um polinómio) e $f(1) = f(2) = -3$, então, pelo teorema de Rolle, existe um ponto $c \in]1, 2[$ para o qual $f'(x) = 0$, ou seja, um ponto estacionário de $f(x)$.

2.51 Exercício

Regra de l'Hôpital

Calcular os limites (usando a *regra de l'Hôpital*, se necessário) e interpretar os valores obtidos.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$ $\quad(b)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen(x)}{x}$ $\quad(c)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{e^x - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ $\quad(e)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} tan(x)\ln(x)$ $\quad(f)$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \ln(x)\right)$

Resolução.

A **Regra de l'Hôpital** para o cálculo de limites de divisões, diz-nos que se $\lim\limits_{x\to L} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞, podendo os infinitos ter qualquer sinal e podendo ser $l = \pm\infty$, então se existir o limite dos cocientes das derivadas das funções este é igual ao limite do cociente das funções, isto é

$$\lim_{x\to L} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to L} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(a) Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 0/0$, obtemos, aplicando a regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(sen(x))'}{(x)'} \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

2.8.2 Otimização de Funções

2.52 Exercício

Extremos de Funções

Localizar os pontos de extremo das funções. Determinar os valores da função nesses pontos.

$$(a)\ y = x^4 - 2x^2 \qquad (b)\ y = \frac{x}{1+x} \qquad (c)\ y = \ln(1+x^2) \qquad (d)\ y = csc(x)$$

2.53 Exercício

Mostrar que o cilindro recto de volume máximo que pode ser inscrito num cone recto circular, tem 4/9 do volume do cone (figura 17).

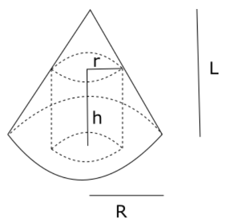

Figura 17

2.54 Exercício

Calcular as dimensões do rectângulo de área máxima que pode ser inscrito no triângulo da figura 18.

Resolução.
Como o próprio enunciado deixa claro, queremos **maximizar** uma área. Com esta informação, os passos matemáticos que devemos dar são os seguintes:

- Determinar uma função que nos dê a área $A(x)$ de um retângulo inscrito neste triângulo. A variável x deve estar relacionada com as dimensões do retângulo, pois a área deste depende delas.

- Determinar os valores de x para os quais $A(x)$ é máxima.

Um problema em que queremos determinar máximos ou mínimos de funções designa-se por **Problema de Otimização**. A função envolvida, neste caso $A(x)$, designa-se por **função objetivo**.

A resolução deste problema tem os seguintes passos.

- A função objetivo é $A(a,b)$, a área de um retângulo com medidas dos lados a e b (esquema 1. da figura 18).

- Temos agora que calcular as dimensões a, b para as quais a área é máxima, o que podemos conseguir derivando a função.

- Surge aqui o problema de a função depender de duas variáveis, a, b, sendo que as técnicas de derivação que estudámos se aplicam a funções de apenas uma variável.

- Embora as funções de várias variáveis também possam ser otimizadas, neste caso é possível obter uma relação entre a e b, o que permite escrever uma expressão para $A(a,b)$ envolvendo apenas só a ou só b.

- De facto, pelo esquema 2. da figura **??**, temos
$$\frac{8-b}{a} = \frac{b}{6-a} = tan(\beta).$$
Manipulando a primeira igualdade obtemos
$$\frac{8-b}{a} = \frac{b}{6-a} \Leftrightarrow (8-b)(6-a) = ab \Leftrightarrow 48 - 8a - 6b + ab = ab$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{48-6b}{8} = \frac{24-3b}{4}$$
Substituindo esta expressão de a na fórmula da área, $A = ab$, obtemos
$$A = \frac{24-3b}{4}b = \frac{24b-3b^2}{4}$$

- Temos agora uma função $A(b)$ para a área, dependendo só da variável b. Vamos derivá-la em ordem a b.
$$A' = \left(\frac{24b-3b^2}{4}\right)' = \frac{24-6b}{4} = \frac{12-3b}{2}$$

- Como as funções $A(b)$ e $A'(b)$ tem domínio $\mathbb{R}$ e são contínuas no seu domínio, os únicos pontos onde a função pode ter máximos ou mínimos locais são aqueles em que a derivada é zero. Vamos determiná-los.
$$A' = 0 \Leftrightarrow \frac{12-3b}{2} = 0 \Leftrightarrow b = 4.$$

- Para determinarmos a natureza deste ponto (se é ponto de máximo ou de mínimo local), determinamos o valor da derivada de segunda ordem A'' no ponto.
$$A'' = \left(\frac{12-3b}{2}\right)' = -3/2 < 0.$$
Como $A'' < 0$ (para todos os pontos) o ponto $b = 4$ é um ponto de máximo local. O valor correspondente a a é
$$a = \frac{24-3b}{4} = \frac{24-3(4)}{4} = 3.$$
As dimensões do retângulo pretendidas são $a = 3$ e $b = 4$.

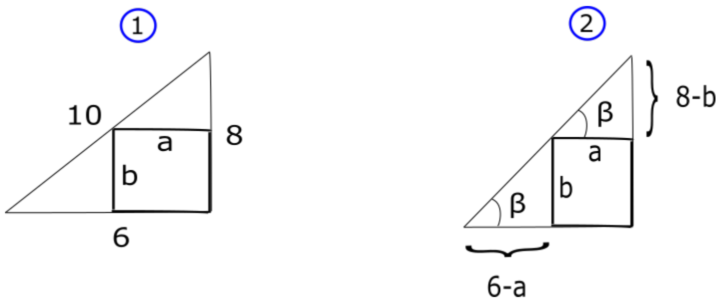

Figura 18

2.55 Exercício

Calcular as dimensões do rectângulo de área máxima que pode ser inscrito na elipse $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ (figura 19).

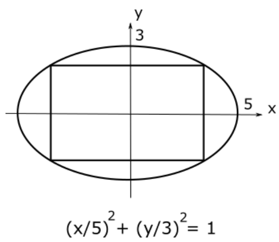

Figura 19

2.56 Exercício

Uma pessoa está na margem de um rio e quer chegar à cidade na outra margem, como mostra a figura 20. Para isso ela vai remar em linha recta até um certo ponto P na margem oposta e depois vai caminhar em direcção à cidade. Dado que a pessoa consegue caminhar à velocidade de 5 milhas por hora e remar à velocidade de 3 milhas por hora, para que ponto P da margem oposta se deve dirigir de modo a chegar à cidade no menor tempo possível?

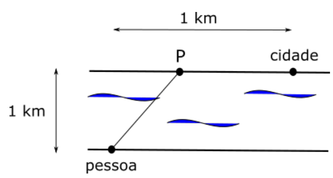

Figura 20

2.9. Problemas Adicionais

2.57 Exercício

Usar a derivada de primeira ordem para mostrar que a função $y = x - \ln(x)$ não tem zeros.

2.58 Exercício

Derivadas: aplicações

Mostrar que, no ponto de intersecção, as curvas $y = 1/x$ e $1/(2 - x)$ formam um ângulo recto.

2.59 Exercício

A figura 21 representa um corpo de massa m em movimento com direcção perpendicular a AB, dirigindo-se para B A distância inicial do corpo ao ponto B é de 1000 metros. A distância entre os pontos A e B é de 500 m.

(a) Escrever a expressão da função que relaciona a altura h, em metros, com o ângulo θ em radianos.

(b) Determinar a função inversa da anterior.

(c) Determinar a velocidade com que o objecto se aproxima do ponto A.

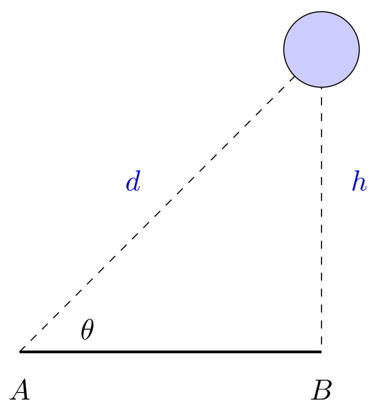

Figura 21: Objecto em queda livre

Bibliografia
Calculus, Anton, Howard, vol. 1, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc.
Sebenta da disciplina, Abrantes, Mário, 2021