Capítulo 2 Funções Reais de Uma Variável Real. Derivadas.

1. Funções

Uma função matemática pode ser encarada como uma máquina teórica que produz a saída y a partir do valor de entrada x, por meio da fórmula $y = f(x)$.

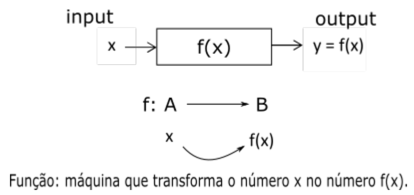

Figura 1

Toda a função é caracterizada por três elementos essenciais:

- a **expressão analítica** (fórmula) $y = f(x)$ envolvendo números, variáveis (letras) e operadores $(+,\ -,\ \times,\ \div,\ \circ)$;
- o **domínio**, que é o conjunto de todos os valores admitidos para a variável independente x;
- a **imagem**, que é o conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente y.

Geralmente referimo-nos a uma função pela sua fórmula, mas estão subentendidos o domínio e a imagem.

O número de variáveis pode ser qualquer.

Exemplos

1. $f(x) = 3x^2 - 2$ — Função de uma variável,x
2. $f(x, y) = 3x^2y - sin(x)$ — Função de duas variáveis, x, y

Neste capítulo vamos estudar **funções reais de uma variável real**, o que significa que tanto os valores da variável independente x como os valores da variável dependente y são números reais $\mathbb{R}$.

As funções são essenciais na engenharia para exprimir relações numéricas entre grandezas (**grandeza** é qualquer característica de um sistema físico que pode ser medida).

1.1. Noções Elementares: fórmula, domínio, imagem, gráfico

Vamos rever os conceitos de **domínio**, **imagem** e **gráfico** de uma função para um conjunto de funções relativamente pequeno, como constantes, potências, exponenciais, logaritmos e funções trigonométricas diretas e inversas. A partir destas constroem-se outras usando os **operadores racionais** '$+, -, \times, \div$' e o **operador de composição** '$\circ$'.

2.1 Exercício

Formalização Matemática

Escrever as expressões analíticas das funções para as finalidades indicadas.

(a) Converter notas escolares da escala $0-20$ para a escala $0-5$.
(b) Exprimir o comprimento da sombra de uma pessoa no solo plano, em função da altura h da pessoa e do ângulo α que os raios solares fazem com a vertical.
(c) Converter radianos em graus.
(d) Converter metros em milímetros.
(e) Fornecer a altura de água numa caixa rectangular com $1m^2$ de área de base, em função do volume de água, em litros.
(f) A distância em função do tempo, relativamente a uma cidade C, de um automóvel que começa uma viagem a 50km de distância de C, afastando-se à velocidade constante de 50 km/h.

Resolução.
(c) Por ser $180^o = \pi\ rad$, o cociente $180/\pi$ representa a quantidade de graus correspondente a 1 radiano e a expressão $(180/\pi)x$ representa a quantidade de graus correspondente a x radianos. A expressão analítica da função é

$$f(x) = \frac{180}{\pi}x.$$

2.2 Exercício

Sintaxe

Dadas as funções $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ e $g(x) = x^2 + 2$, escrever as expressões seguintes.

(a) $f(2)$ (b) $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ (c) $f(3a-1)$

(d) $f(g(2))$ (e) $g(x-2)+\frac{1}{2}$ (f) $\frac{|f(x)|}{2-g^2(x)} - g(2x)$

Resolução.

(c) $f(3a-1) = \dfrac{3(3a-1)}{3a-1-2} = \dfrac{9a-2}{3a-3}$

(e) $g(x-2)+\dfrac{1}{2} = \Big((x-2)^2+2\Big)+\dfrac{1}{2} = x^2-4x+\dfrac{13}{2}$

2.3 Exercício

Ordem das Operações

Indicar, para cada caso, qual a última operação a ser efectuada se se quiser calcular $f(7)$.

(a) $f(x) = sen(|x|)$ (b) $f(x) = |sen(x)|$ (c) $f(x) = \sqrt{log_{10}(x-3)}$

(d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ (e) $f(x) = x^2|sen\left(\dfrac{1}{x}\right)|$ (f) $f(x) = 1 + 5x^3e^{-x} - 2x$

(g) $f(x) = (3-x^2)^{\frac{1}{3}}$ (h) $f(x) = x^2(2-x)e^x$

Resolução.

(e) As operações a efetuar são: calcular $1/7$; calcular $sin(1/7)$; calcular $|sin(1/7)|$; calcular 7^2; efetuar $7^2 \times |sin(1/7)|$. Esta multiplicação é a última operação a ser efetuada.

(h) As operações a efetuar são: calcular, em qualquer ordem, os valores das expressões 7^2, $2-7$, e^7. Efetuar a multiplicação $7^2 \times (2-7) \times e^7$, começando por qualquer uma das multiplicações. A última multiplicação a ser efetuada corresponde à última operação efetuada no cálculo do valor da expressão.

2.4 Exercício

Gráfico, Domínio, Contradomínio

Para cada função,

(i) escrever o domínio natural e a imagem;

(ii) esboçar o gráfico;

(iii) indicar um intervalo fechado no qual a função seja crescente; indicar um intervalo fechado no qual a função seja decrescente.

(a) $y = x^2$	(b) $y = x^3$	(c) $y = x^2 - 2$	(d) $y = \|x\|$
(e) $y = \|x+2\|$	(f) $y = \dfrac{1}{x}$	(g) $y = \dfrac{1}{x^2}$	(h) $y = \dfrac{1}{x-2}$
(i) $y = \sqrt{x}$	(j) $y = \sqrt[3]{x} - 2$	(k) $y = \sqrt[5]{x}$	(l) $y = -\sqrt{x}$
(m) $y = \sqrt{x-2}$	(n) $y = \|\sqrt[3]{x}\|$	(o) $y = \sqrt{\|x\|}$	(p) $y = e^x$
(q) $y = e^{-x+1}$	(r) $y = 0.1^x$	(s) $y = 3e^x$	(t) $y = \ln(x)$
(u) $y = \ln(x-2)$	(v) $y = \log_{0.5}(w)$	(x) $y = \ln\|x\|$	(y) $y = \|\ln(x)\|$
(z) $y = \|\ln\|x\|\|$	$(a1)$ $y = sin(x)$	(b1) $y = sin(x + \pi/2)$	(c1) $y = cos(x)$
(d1) $y = sin(-x)$	$(e1)$ $y = tan(x)$	$(f1)$ $y = 2 + tan(x)$	$(g1)$ $y = cot(x)$
$(h1)$ $y = cos(-x)$	(i1) $y = sin(x) - 1$	$(j1)$ $y = 2cos(x)$	$(k1)$ $y = \dfrac{1}{x^2+x-1}$

Resolução.

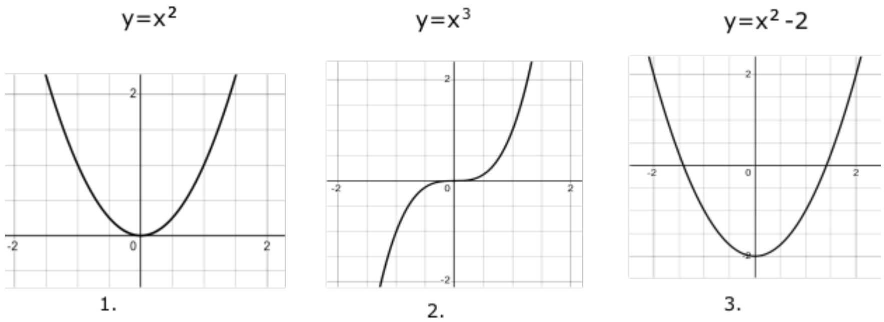

Figura 2

(a) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}_0^+$. (ii) Gráfico: figura 2, 1.; (iii) Crescente: $[0,1]$; decrescente: $[-1,0]$.

(b) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}$. (ii) Gráfico: figura 2, 2.; (iii) Crescente: $[-2,1]$; não é decrescente em nenhum subintervalo do seu domínio.

(c) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-2,+\infty[$. (ii) Gráfico: figura 2, 3.; (iii) Crescente: $[1,3]$; decrescente: $[-3,0]$.

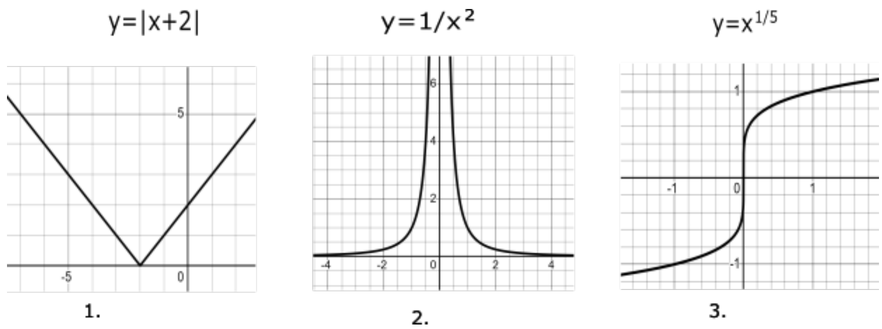

Figura 3

(e) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}_0^+$. (ii) Gráfico: figura 3, 1.; (iii) Crescente: $[-2,1]$; decrescente: $[-4,-2]$.

(g) (i) Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; imagem: $\mathbb{R}^+$. (ii) Gráfico: figura 3, 2.; (iii) Crescente: $[-4,1]$; decrescente: $[1,3]$.

(k) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-2,2]$. (ii) Gráfico: figura 3, 3.; (iii) Crescente: $]-\infty,+\infty[$; não é decrescente em nenhum subintervalo do seu domínio.

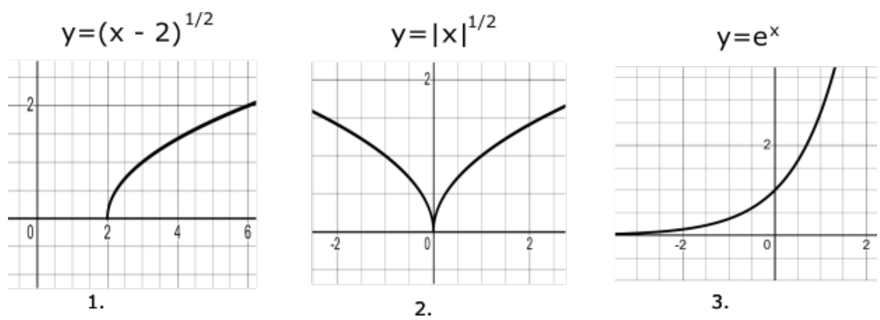

Figura 4

(m) (i) Domínio: $[2,+\infty[$; imagem: $\mathbb{R}_0^+$. (ii) Gráfico: figura 4, 1.; (iii) Crescente: $[2,4]$; não é decrescente em nenhum subintervalo do seu domínio.

(o) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}_0^+$. (ii) Gráfico: figura 4, 2.; (iii) Crescente: $[0, 5]$; decrescente: $[-5, -2]$.

(p) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}^+$. (ii) Gráfico: figura 4, 3.; (iii) Crescente: $[-1, 12]$; não é decrescente em nenhum subintervalo do seu domínio.

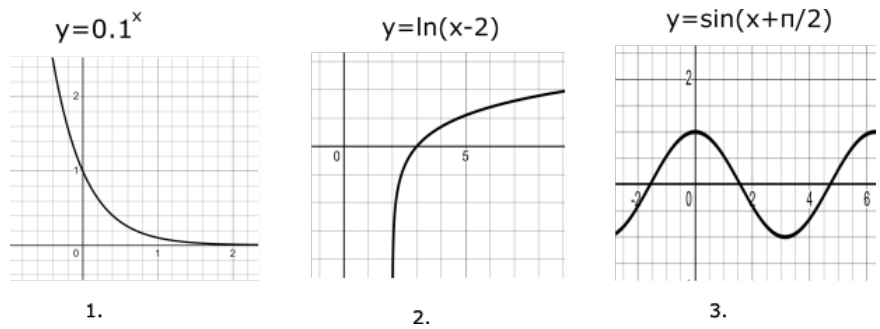

Figura 5

(r) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $\mathbb{R}^+$. (ii) Gráfico: figura 5, 1.; (iii) Não é crescente em nenhum subintervalo do seu domínio; decrescente: $[-3, 3]$.

(u) (i) Domínio: ; imagem: $]2, +\infty[$. (ii) Gráfico: figura 5, 2.; (iii) Crescente: $[3, 4]$; não é decrescente em nenhum subintervalo do seu domínio.

(b1) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-1, 1]$. (ii) Gráfico: figura 5, 3.; (iii) Crescente: $[3\pi/2, 2\pi]$; decrescente: $[0, \pi/2]$, por exemplo.

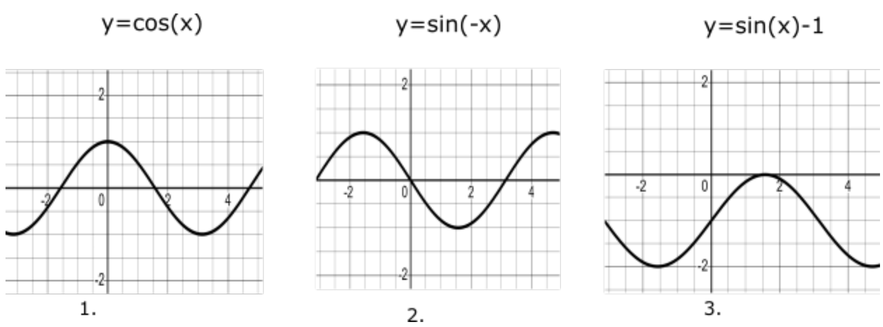

Figura 6

(c1) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-1, 1]$. (ii) Gráfico: figura 6, 1.; (iii) Crescente: $[\pi, 3\pi/2]$; decrescente: $[0, \pi/2]$ (igual a (b1)).

(d1) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-1, 1]$. (ii) Gráfico: figura 6, 2.; (iii) Crescente: $[-\pi, -\pi/2]$; decrescente: $[0, \pi/2]$.

(i1) (i) Domínio: $\mathbb{R}$; imagem: $[-2, 0]$. (ii) Gráfico: figura 6, 3.; (iii) Crescente: $[0, \pi/2]$; decrescente: $[\pi/2, \pi]$.

2.5 Exercício

Imagem

Verificar se os valores de y indicados pertencem às imagens das funções. Confirmar usando um plotter de gráficos.

$(a)\ y = \sqrt{\log_{10}(x-2)}, \quad y = 4$ $\qquad (b)\ y = \dfrac{1}{e^x}, \quad y = 12$

$(c)\ y = \dfrac{x^2}{x^2+x}, \quad y = 1$ $\qquad (d)\ y = 2^{-x}, \quad y = -23$

Resolução.
(a) Se $y = 4$ pertencer à imagem da função, então deve existir ao menos um valor de x que seja solução da equação

$$\sqrt{\log_{10}(x-2)} = 4.$$

Vamos determinar as soluções desta equação. O valor do logaritmo tem que ser não negativo para a raiz quadrada poder ser calculada. Podemos escrever,

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_{10}(x-2)} = 4 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_{10}(x-2)}\right)^2 = 4^2\\ &\Rightarrow \log_{10}(x-2) = 16\\ &\Leftrightarrow x-2 = 10^{16}\\ &\Leftrightarrow x = 2+10^{16}\end{aligned}$$

Concluimos que o valor $y = 4$ pertence à imagem da função, porque é a imagem pela função do valor $x = 2 + 10^{16}$.

(d) Para $x = -23$ pertencer à imagem da função, deve exisir ao menos um valor de x tal que $2^{-x} = -23$, que equivale a $-x = \log_2(-23)$. Como $\log_2(-23) \notin \mathbb{R}$, não existe um valor real de x que satisfaça a equação, e por isso $y = -23$ não pertence à imagem da função.

2.6 Exercício

Gráfico

(a) Representar no mesmo referencial os gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1/x$.
(b) Indicar os domínios das funções $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \times g(x)$, $f(x)/g(x)$, $|f(x)|$, $|g(x)|$.
(c) Escolher quatro pontos quaisquer no eixo das abcissas e marcar no referencial os pontos correspondentes dos gráficos das funções na alínea (b)

2.7 Exercício

Gráfico

Fazer o esboço do gráfico de uma função com domínio $[-3, 3]$. A função deve ser **estritamente crescente** em algum subintervalo; **estritamente decrescente** em algum subintervalo; deve ter **pontos de máximo e mínimo relativos**; deve ter um **ponto anguloso** e um **ponto cuspidal**; deve ter apenas dois **zeros**.

Resolução. Na figura 7 está representado o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, \ -3 \leq x \leq 1 \\ -x+2, \ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} .$$

O domínio da função é o intervalo $[-3, 3]$ que está contido no seu **domínio natural**. A função é **estritamente crescente** no intervalo $[0, 1]$ e **estritamente decrescente** nos intervalos $[-3, 0]$ e $[1, 3]$. Apresenta um **mínimo relativo** no ponto $x = 0$ e um **mínimo absoluto** no ponto $x = 3$. Apresenta um **máximo relativo** no ponto $x = 1$ e um **máximo absoluto** no ponto $x = -3$. No ponto $x = 0$ o gráfico exibe um **ponto cuspidal**, e no ponto $x = 1$ tem um **ponto anguloso**. A função possui apenas dois **zeros**, localizados em $x = 0$ e $x = 2$.

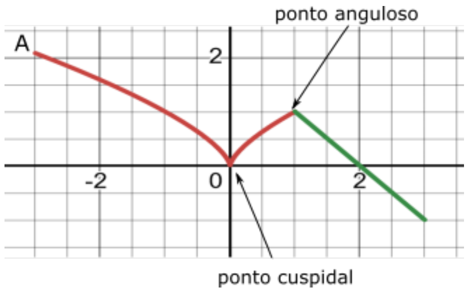

Figura 7

1.2. Função Inversa

2.8 Exercício

Função Inversa

Determinar as funções inversas, se existirem.

a $f(x) = 2x + 3$ (b) $g(x) = 2$ (c) $f(x) = x^3$

d $g(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$ (e) $f(x) = sin(x)$ (f) $f(x) = cos(x)$ (g) $f(x) = x^2$

(h) $f(x) = cos(x)$ (i) $f(x) = \log_2(x)$ (j) $f(x) = 2^x$

Resolução.
(a) O cálculo da função inversa é feito pelos seguintes passos.

1. O domínio de f é $\mathbb{R}$; a imagem de f é $\mathbb{R}$.

2. Representar a equação na forma $y = 2x + 3$ e resolvê-la em ordem a x.

$$y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

Esta fórmula já representa a função inversa, porque nos dá x conhecendo y.

3. Trocar as variáveis x, y para obter a forma comum da fórmula de uma função (o valor que conhecemos designamos por x, e o que a fórmula calcula representamos por y).

$$y = \frac{x-3}{2}$$

Esta é a fórmula da função inversa de $f(x)$ e escreve-se

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

Merecem atenção os seguintes pontos:

- A notação $f^{-1}(x)$ **não representa** $1/f(x)$, como se pode facilmente verificar comparando as fórmulas correspondentes. Esta útltima é a **inversa multiplicativa** de $f(x)$, enquanto $f^{-1}(x)$ é a **inversa funcional** de $f(x)$;
- O domínio de f é igual à imagem de f^{-1}; o domínio de f^{-1} é igual à imagem de f. Esta é uma condição necessária para duas funções serem inversas entre si.
- Se duas funções são inversas entre si, cada uma delas é a função inversa da outra.
- Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$ (figura 8, 1.). Isto é verdade para os gráficos de quaisquer duas funções inversas entre si.

(d)

1. Domínio de g: $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$; imagem de $g$$=]-\infty, 0[\cup[1/2, +\infty[$.
2. Representar a equação na forma $y = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ e resolvê-la em ordem a x.

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2-\sqrt{x}} &\underset{y\neq 0,\, x\neq 4}{\Leftrightarrow} 2-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 - \frac{1}{y} \\ &\underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = \left(2-\frac{1}{y}\right)^2 \end{aligned}$$

   Esta fórmula já representa a função inversa, porque nos dá x conhecendo y.

3. Trocar as variáveis x, y, para obter a forma comum da fórmula de uma função.

$$y = \left(2-\frac{1}{x}\right)^2$$

   Esta é a fórmula da função inversa de $g(x)$ e escreve-se

$$g^{-1}(x) = \left(2-\frac{1}{x}\right)^2.$$

   Domínio de g^{-1} = Imagem de $g =]-\infty, 0[\cup[1/2, +\infty[$; Imagem de g^{-1} = Domínio de $g(x) = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$ (figura 8, 2.).

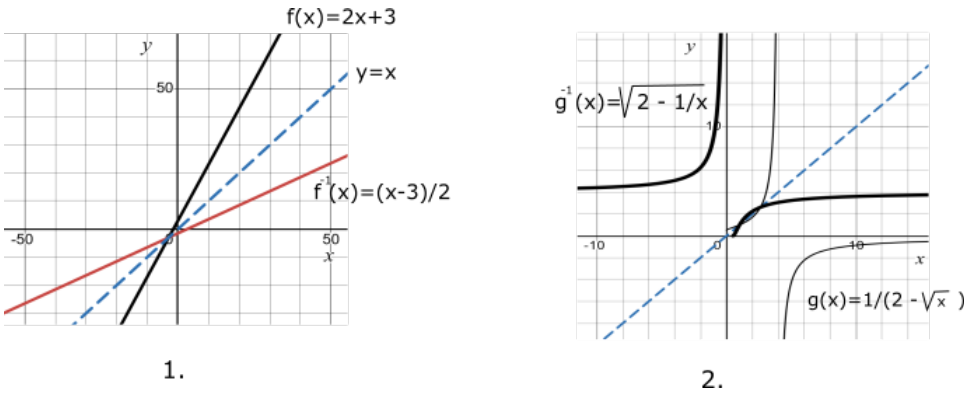

Figura 8: Gráfico de $g(x)$ a traço fino no esquema 2.

2.9 Exercício

Função Inversa

Verificar que os seguintes pares de funções são funções inversas.

(a) $f(x)=x^3,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$ (b) $f(x)=x^2,\ (x\geq 0),\ g(x)=\sqrt{x}$ (c) $f(x)=e^x,\ g(x)=\ln(x)$

Resolução.

(b)

1. Domínio de $f=\mathbb{R}_0^+$; Imagem de $f=\mathbb{R}_0^+$.

2. Representar a equação na forma $y=x^2$ e resolvê-la em ordem a x.

$$\begin{aligned} y=x^2 &\underset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y}=\sqrt{x^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y}=|x| \\ &\underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y}=x \end{aligned}$$

   Esta fórmula já representa a função inversa, porque nos dá x conhecendo y.

3. Trocar as variáveis x,y, para obter a forma comum para a expressão analítica de uma função.

$$y=\sqrt{x}$$

   Esta é a fórmula da função inversa de f e escreve-se

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}.$$

   Domínio de f^{-1} = Imagem de $f=\mathbb{R}_0^+$; Imagem de f^{-1} = Domínio de $f(x)=\mathbb{R}_0^+$ (figura 9, 1.).

(c) Domínio de $f=\mathbb{R}$; Imagem de $f=\mathbb{R}^+$

1. Representar a equação na forma $y=e^x$ e resolvê-la em ordem a x.

$$y=e^x\Leftrightarrow$$

$$\ln(y)=ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(y)=x$$

   Esta fórmula já representa a função inversa, porque nos dá x conhecendo y.

2. Trocar as variáveis x, y, para obter a forma comum para a expressão analítica de uma função.

$$y = \ln(x)$$

Esta é a fórmula da função inversa de f e escreve-se

$$f^{-1}(x) = \ln(x).$$

Domínio de f^{-1} = Imagem de $f = \mathbb{R}^+$; Imagem de f^{-1} = Domínio de $f(x) = \mathbb{R}$.

3. Os gráficos de das funções g e g^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$ (figura 9, 2.).

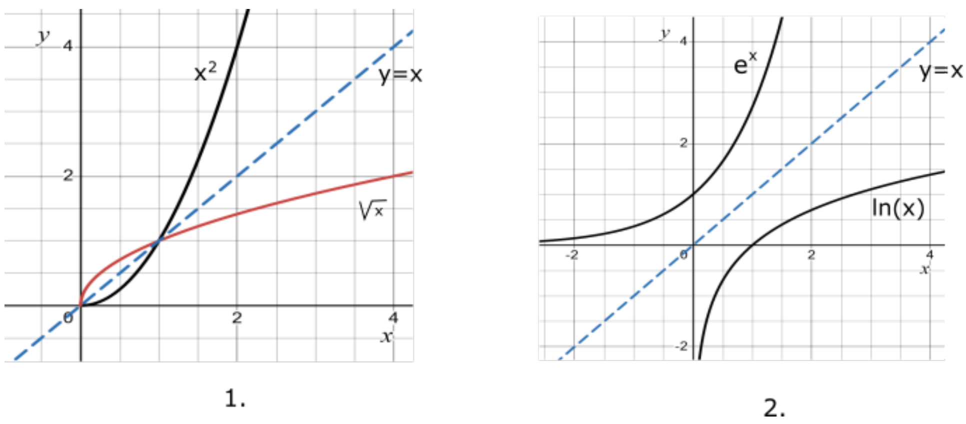

Figura 9

1.3. Função Composta

Para se definir a função $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$, que se lê **g após f** ou **f composta com g**, a imagem de f deve estar contida no domínio de g. A expressão $g\left(f(x)\right)$ mostra que nesta composição o output de f é o input de g. A composição de funções '$\circ$' é um operador construtor de funções, que permite construir funções mais complexas a partir de outras mais simples.

2.10 Exercício

Função Composta

Considerar as funções $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ e $h(x) = sin(x)+2$. Escrever as expressões analíticas correspondentes às funções abaixo indicadas. Calcular os seus domínios.

a $(f \circ h)(x)$ b $(h \circ f)(x)$ (c) $g\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) h(x-t)$

d $(f \circ h \circ g)(x)$ (e) $(h \circ f \circ g)(x)$ (f) $\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) h(x-t)$

Resolução.

(a) $(f \circ h)(x) = f\left(h(x)\right) = f\left(sin(x)+2\right) = \sqrt[5]{sin(x)+2}$

Vamos verificar se esta definição é correta, isto é, se a imagem de $h(x)$ está contida no domínio de $f(x)$. Temos Imagem de $h = [1, 3]$; Domínio de $f = \mathbb{R}$. Como $[1, 3] \subset \mathbb{R}$, a definição é correta. Temos então Domínio de $(f \circ g)$ = Domínio de $g = [1, 3]$; Imagem de $(f \circ g) = [\sqrt[5]{1}, \sqrt[5]{3}] = [1, \sqrt[5]{3}]$.

(b) $(h \circ f)(x) = h\left(f(x)\right) = h\left(\sqrt[5]{x}\right) = sin\left(\sqrt[5]{x}\right) + 2$

Vamos verificar se esta definição é correta, isto é, se a imagem de $f(x)$ está contida no domínio de $h(x)$. Temos Imagem $f = \mathbb{R}$ = Domínio de $h = \mathbb{R}$, pelo que $(h \circ f)(x)$ pode ser calculada para todo x do domínio de f. A definição é correta. Temos então Domínio de $(h \circ f)$ = Domínio de $h = \mathbb{R}$; Imagem de $(h \circ f) = [1, 3]$.

(d) $(f \circ h \circ g)(x) = f\left(h(g(x))\right) = f\left(h\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right) = f\left(\sin\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + 2\right) = \sqrt[5]{\sin\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + 2}$

Vamos verificar se esta definição é correta, isto é, se a imagem de g está contida no domínio de h, e se a imagem de $(h \circ g)$ está contida no domínio de f. Temos Imagem de $g = \mathbb{R}_0^+ \subset$ Domínio de $h = \mathbb{R}$, pelo que $(h \circ g)(x)$ pode ser calculada para todos os valores do domínio de g. Continuando, Imagem de $(h \circ g) = [1, 3] \subset$ Domínio de $f = \mathbb{R}$, pelo que a imagem de $(h \circ g)$ está contida no domínio de f. A definição é correta. Temos então Domínio de $(f \circ h \circ g)$ = Domínio de $g = \mathbb{R}$; Imagem de $(f \circ h \circ g) = [\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}]$.

2.11 Exercício

Definir funções adequadas $f(x)$ e $g(x)$ de modo a exprimir cada uma das funções abaixo como uma composição da forma $(f \circ g)(x)$.

a $m(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ (b) $n(x) = |5 + 2x|$

Resolução.
(a) Fazendo $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, com Domínio de $g =]-\infty, 1[$, para garantir que $1 - \sqrt[3]{x} \geq 0$, e Imagem de $g = [0, +\infty[$; fazendo $f(x) = \sqrt{x}$, temos $m(x) = (f \circ g)(x) = f\left(1 - \sqrt[3]{x}\right) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$, com Domínio de f = Imagem de g.

2.12 Exercício

Função Composta

Considerar a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3x + 1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ x/2, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases} \quad .$$

(a) Mostrar que, para $x = 8$, calculando sucessivamente os valores $f(8)$, $f(f(8))$, $f(f(f(8))), \cdots$, acaba por se obter o valor 1. Mostrar que o mesmo acontece para $x = 13$.
(b) Será que o valor 1 é obtido para qualquer número inteiro positivo x, ao fim de um número finito de iterações? (*conjectura de Collatz, 1937*; a sua demonstração, ou refutação, permanece em aberto)

1.4. Sequências Numéricas. Limites de Funções

2.13 Exercício

Sequências Numéricas

Representar sobre a reta real os pontos correspondentes às vizinhanças indicadas.

(a) A **vizinhança aberta** 0.2 de 5.

(b) A **vizinhança fechada** 2 de −8.

Resolução.

(a) $]5-0.2,\ 5+0.2[=]4.8,\ 5.2[$ figura 10, à esquerda

(b) $[-8-2,\ -8+2]=[-10,\ -6]$ figura 10, à direita

Figura 10

2.14 Exercício

Sequências Numéricas

Escrever os 5 primeiros termos de cada sequência numérica.

a $u_n = \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n = \dfrac{n^2-1}{2n}$ c $u_n = \dfrac{1}{n!}$

(d) $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ (f) $u_n = 2^{n-1}$

Resolução.

(a) $(u_n) = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ \cdots$

(c) $(u_n) = 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ \cdots$

$(e)(u_n) = -1,\ 1/3,\ -1/5,\ 1/7,\ -1/9,\ \cdots$

2.15 Exercício

Sequências Numéricas

Escrever os termos gerais das sequências numéricas indicadas. Quais as sequências convergentes e quais os respetivos limites de convergência?

(a) $(u_n) = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

(b) $(u_n) = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16\ \cdots$

(c) $(u_n) = 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ ,1\ \cdots$

(d) $(u_n) = 1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16\ \cdots$

(e) $(u_n) = 2,\ 1-\dfrac{1}{2},\ 1+\dfrac{1}{3},\ 1-\dfrac{1}{4},\ 1+\dfrac{1}{5}\ \cdots$

(f) $(u_n) = 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1\ \cdots$

Resolução.

$(a)\ u_n = n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ Sequência divergente

$(d)\ u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = +\infty$ Sequência divergente

$(e)(u_n) = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1$ Sequência convergente

2.16 Exercício

Sequência de Fibonacci

Começa-se com um par de coelhos recém-nascidos, um macho e uma fêmea. A partir do segundo mês de vida o par de coelhos reproduz-se e gera outro par de coelhos, e assim sucessivamente. Os coelhos reproduzem-se sempre e nunca morrem. Escrever a sequência dos números de pares de coelhos ao fim dos mêses $1, 2, 3, ...$ até ao mês 10. A sequência numérica infinita correspondente designa-se por **Sequência de Fibonacci** (Leonardo Fibonacci, 1170 – 1240, Itália).

2.17 Exercício

Limites de Funções

Usar a calculadora para avaliar os limites (substituir x por valores numéricos adequados).

(a) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(1+1/x\big)^x$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(1+1/x\big)^x$ (d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Resolução.

$$(b)\ x = 1 \qquad \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$

$$x = 10 \qquad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2.59374$$

$$x = 100 \qquad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$$

$$x = 1000 \qquad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$x \to +\infty \qquad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e \approx 2.71828$$

2.18 Exercício

Limites de Funções

Calcular os limites.

$$\text{a}\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \qquad (b)\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$$

$$(c)\ \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1/(x+2), & x < -2 \\ x^2-5, & -2 < x \le 3 \\ \sqrt{x+3}, & x > 3 \end{cases} \qquad (d)\ \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$$

Resolução. (figura 11)

$$(a)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+1) = 2$$

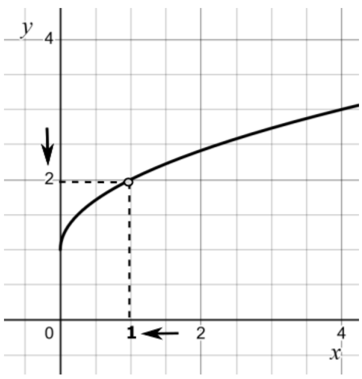

Figura 11: Gráfico da função $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

2.19 Exercício

Limites de Funções

Por motivos diversos, uma conta bancária com um saldo inicial de 1024€ é reduzida a metade a cada mês que passa.

(a) Escrever uma equação que relacione o montante y da conta com o número de meses x decorridos desde a sua abertura.

(b) O que significa dizer que y tende para zero quando x tende para infinito?

1.5. Função Contínua

Uma função $f(x)$ diz-se **contínua num ponto** $x = a$ se nesse ponto se verifica

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \;=\; \lim_{x \to a^+} f(x) \;=\; f(a).$$

Uma função diz-se **contínua num intervalo** se é contínua em todos os pontos do intervalo.

Uma função pode ser **descontínua** num ponto de acumulação do seu domínio de três formas:

- tem no ponto uma **descontinuidade removível** se os limites laterais nesse ponto existem e são iguais, mas diferem do valor da função no ponto, ou a função não está aí definida;
- tem no ponto uma **descontinuidade de salto** se está definida no ponto e os limites laterais nesse ponto existem mas são diferentes;
- tem no ponto uma **descontinuidade essencial** se não existem um ou ambos os limites laterais.

Se uma função $y = f(x)$ é contínua num ponto, então numa vizinhança desse ponto a variável x tem um controlo fino sobre a variação de y, isto é, podemos variar o valor de y tão pouco quanto quisermos por meio de uma variação suficientemente pequena de x. Este é um dos aspetos da importância das funções contínuas na engenharia.

2.20 Exercício

Descontinuidade

Classificar as descontinuidades das funções da figura 12 no ponto $x = a$.

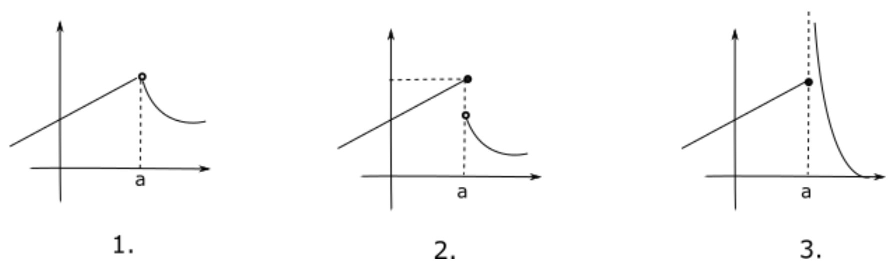

Figura 12

2.21 Exercício

Continuidade

É correto dizer que

(a) A função $f(x) = \sqrt{x}$ é descontínua no ponto $x = -2$?

(b) A função $f(x) = 1/x$ é descontínua no ponto $x = 0$?

Resolução.

(a) Não, porque $x = -2$ não é um ponto do domínio da função, nem um ponto de acumulação do domínio da função.

(b) Sim, porque $x = 0$ é um ponto de acumulação do domínio no qual os limites laterais não existem (descontinuidade **essencial**).

2.22 Exercício

Continuidade

Quais os pontos em que as funções são descontínuas?

a $y = \dfrac{x+2}{x^2+4}$ b $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$ (c) $y = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 4 \\ x-6, & x > 4 \end{cases}$ (d) $y = sen(1/x)$

Resolução.

Notar que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no ponto $x = a$, então

- $f(x) \pm g(x)$ e $f(x)g(x)$ são contínuas no ponto $x = a$;
- $f(x)/g(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se for $g(a) \neq 0$;
- se $f(x)$ é contínua no ponto $g(a)$, então $(f \circ g)(x)$ é contínua no ponto $x = a$.

(a) As funções no numerador e o denominador têm domínio $\mathbb{R}$ e são contínuas; a função no denominador não se anula para nenhum valor de x. A função é, por isso, contínua em $\mathbb{R}$, não apresentando pontos de descontinuidade.

(b) A função $5/x$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; função $2x/(x+4)$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$; ambas são contínuas em todos os pontos dos seus domínios. O domínio da soma destas duas funções é $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$. Como $x = -4$ e $x = 0$ são pontos de acumulação do domínio, a função soma é descontinua nestes dois pontos (duas descontinuidades essenciais).

2.23 Exercício

Continuidade

Determinar $f(3)$ de modo que $f(x) = \frac{(x-3)^2}{|x-3|}$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

2.24 Exercício

Continuidade

Escrever expressões analíticas para as funções seguintes.

(a) $f(x)$, descontínua à direita no ponto $x = 2$ e contínua à esquerda neste ponto.

(b) $g(x)$, descontínua no ponto isolado $x = 2$, exterior ao seu domínio.

(c) $h(x)$, descontínua à direita e à esquerda no ponto $x = 2$.

Resolução.

(a) Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$.

2.25 Exercício

Continuidade

Justificar que a função $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x^2+1} - sen(2x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

1.6. Funções Trigonométricas Diretas

2.26 Exercício

Funções Trigonométricas

Demonstrar as igualdades.

(a) $tan(\alpha)ctg(\alpha) = 1$

(b) $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$

(c) $\dfrac{sin^3(\alpha) - cos^3(\alpha)}{sin(\alpha) - cos(\alpha)} \underset{sin(\alpha)\neq cos(\alpha)}{=} 1 + sin(\alpha)cos(\alpha)$

Resolução.

$$(b)\ sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \underset{cos(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{sin^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$$

2.27 Exercício

Funções Trigonométricas

Tomando $a = sen(\alpha)$, $b = cos(\beta)$, $c = tg(\gamma)$, escrever os segundos membros das expressões em termos de a, b, c.

(a) $y = sin(-\alpha)$	(b) $y = cos(-\beta)$	(c) $y = -cos(\beta)$	(d) $y = tg(-\gamma)$
(e) $y = sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$	$(f) y = sec(\beta + 2\pi)$	(g) $y = cotg(\gamma + 5\pi)$	(h) $y = csc(\alpha + \pi)$

Resolução.

(a) $sin(-\alpha) = -sin(\alpha) = -a$

(c) $-cos(\beta) = -b$

(h) $csc(\alpha + \pi) = 1/sin(\alpha + \pi) = 1/(-sin(\alpha)) = -1/sin(\alpha) = -1/a$

2.28 Exercício

Funções Trigonométricas: período, frequência angular, frequência linear

Se x significar tempo, em segundos, determinar os períodos, as frequências lineares e as frequências angulares das funções.

(a) $y = 3sin(4x)$ (b) $y = -2cos(\pi x)$ (c) $y = 2 + cos(x/2)$ (d) $y = -4sin(x/3 + 2\pi)$

Resolução.
(a) $y = 3sin(4x)$; frequência angular: $\omega = 4\ rad/segundo$;
frequência: $f = \omega/(2\pi) = 2/\pi\ Hz$; período: $T = 1/f = \pi/2\ segundo$.

1.7. Funções Trigonométricas Inversas

2.29 Exercício

Escrever os valores exactos das expressões.

(a) $sin^{-1}(-1)$	(b) $cos^{-1}(-1)$	(c) $sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$	(d) $cos^{-1}(\frac{1}{2})$
(e) $tan^{-1}(-1)$	(f) $sec^{-1}(-1)$	(g) $arctan(1)$	(h) $arcsec(-2)$

Resolução.

(a) $sin^{-1}(-1) = arcsin(-1) = -\pi/2$

(c) $cos^{-1}(\frac{1}{2}) = arccos(1/2) = \pi/3$

2.30 Exercício

Sendo $\theta = arcsen(-\sqrt{3}/2)$, calcular os valores exactos de $cos(\theta)$, $tan(\theta)$, $cot(\theta)$, $sec(\theta)$, $csc(\theta)$.

2.31 Exercício

Completar as igualdades.

(a) $sec^{-1}(x) = cos^{-1}(\ )$	$(b)\ -sen(sen^{-1}(x)) =$	$(c)\ tan^{-1}(tan(x)) =$
(d) $tan(cos^{-1}(x)) =$	$(e)\ csc(tan^{-1}(x)) =$	$(f)\ cot(csc{-}1(x)) =$

Resolução.
(a) Como $(\theta = sec^{-1}(x)) \Rightarrow (sec(\theta) = x)$ e $(sec(\theta) = 1/cos(\theta))$, temos $(cos(\theta) = 1/x)$. Daqui vem $(sec^{-1}(x) = cos^{-1}(1/x))$.

(d) Seja $(cos^{-1}(x) = \beta)$. Então $(cos(\beta) = x)$ e $(sin(\beta) = \sqrt{1-x^2})$. Daqui vem $(tan(\beta) = tan(cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}/x)$.

2.32 Exercício

Funções Trigonométricas Inversas

Justificar as igualdades.

$(a)\ arcsin(x) + arccos(x) = \pi/2$

$(b)\ cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$(c)\ sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

(d) $tan(arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$(e)\ sen(arcsec(x)) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}, \quad |x| \geq 1$

Resolução.
(d) Seja $arcsin(x) = \theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Então $(sin(\theta) = x)$ e $(cos(\theta) = \sqrt{1-x^2})$. Daqui vem $tan(arcsin(x)) = tan(theta) = sin(\theta)/cos(\theta) = x/\sqrt{1-x^2}$.