Capítulo 1 Conceitos de Base

1. Aritmética

É um dos ramos fundamentais da matemática, envolvendo operações como a adição, subtração, multiplicação e divisão. Embora simples, a aritmética forma a base para cálculos mais complexos e é indispensável em todas as áreas da engenharia para a manipulação de dados e resolução de problemas numéricos.

Por simplicidade de exposição, inclui-se nesta secção o estudo de radicais, logaritmos e exponenciais, embora uma abordagem mais profunda destes operadores requeira ferramentas matemáticas que não pertencem à aritmética, como por exemplo o cálculo de limites e as séries numéricas. Os radicais são essenciais na engenharia para o tratamento de funções e cálculos que aparecem em várias áreas, como na análise de estruturas e circuitos elétricos, onde fórmulas envolvendo raízes são comuns. Os logarimos e as exponenciais são centrais na modelagem de grandezas que variam exponencialmente, como o crescimento populacional, a desintegração radioativa, ou o comportamento de circuitos RC. O conhecimento de logaritmos e exponenciais é vital na engenharia para resolver equações que surgem em modelagens e simulações de sistemas dinâmicos e processos naturais.

1.1. Adição e Subtração

Recorda os algoritmos da adição e da subtração de números na forma decimal com as resoluções dos exemplos seguintes.

1.1 Exercício

Efetuar as operações.

(a) $18.7 + 92.4$ (b) $92.4 - 18.7$ (c) $653 - 5.16$ (d) $6.53 - 5.16$

Resolução.

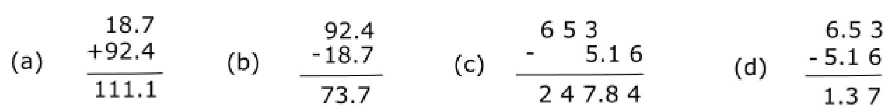

Figura 1: Adição e subtração

1.2 Exercício

Efetuar as operações.

(a) $-18.7 - 92.4$ (b) $-92.4 + 18.7$ (c) $-653 + 5.16$ (d) $-6.53 + 5.16$

Resolução.

(a) $-18.7 - 92.4 = -(18.7 + 92.4) = -111.1$

(b) $-92.4 + 18.7 = -(92.4 - 18.7) = -73.7$

(c) $-653 + 5.16 = -(653 - 5.16) = -247.84$

(d) $-6.53 + 5.16 = -(6.53 - 5.16) = -1.37$

1.3 Exercício

Indicar por ordem crescente os números $-12, \quad 10, \quad -0.5, \quad -0.47, \quad 0, \quad 1.23.$

Resolução.
$-12, \quad -0.5, \quad -0.47, \quad 0, \quad 1.23, \quad 10.$

1.4 Exercício

Resolver mentalmente.

(a) $9 + 8$	(b) $7 + 4$	(c) $-5 + 12$
(d) $6 + 5$	(e) $3 - 12$	(f) $7 + 8$
(g) $18 + 5$	(h) $18 - 5$	(i) $2.5 + 6.5$
(j) $4.7 + 1.2$	(k) $5.2 - 3.6$	(l) $12 + 13$

1.5 Exercício

Efetuar as operações.

(a) $35.02 - 86.01$ (b) $1000 - 0.09$ (c) $453 - 57$ (d) $-6.53 - 5.16$

1.6 Exercício

Escrever expressões equivalentes sem parênteses $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

a $a - (b + c)$ (b) $a - (-b - c)$ (c) $a + (-b + c)$ (d) $-d + (-(a + b) + 2b)$

Resolução.

(a) $a - (b + c) = a - b - c$

1.7 Exercício

Nas operações da figura 2 substituir os '$*$' por dígitos. O algoritmo da subtração pode ser usado no exercício (c)?

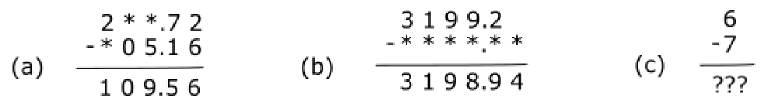

Figura 2: Substituir os asteriscos por dígitos

1.2. Multiplicação e Divisão

1.2.1 Multiplicação

Analisar o esquema seguinte para recordar o algoritmo da multiplicação de números na forma decimal.

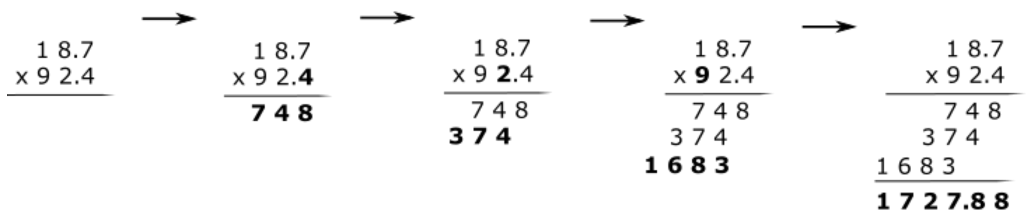

Figura 3

1.8 Exercício

Na figura 3 está resolvida passo a passo a operação 18.7×92.4. Apresentar os resultados das operações seguintes usando o resultado no esquema à direita na figura.

(a) 18.7×924 (b) 1.87×92.4 (c) 187×0.00924 (d) 0.187×0.00924

Resolução.

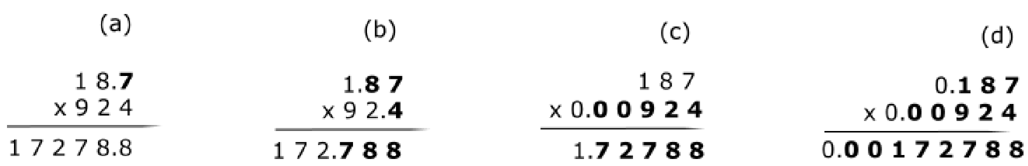

Figura 4

1.9 Exercício

Efetuar as operações.

(a) -18.7×92.4 (b) $18.7 \times (-92.4)$ (c) $-18.7 \times (-92.4)$

Resolução.

(a) $-18.7 \times 92.4 = -(18.7 \times 92.4) = -1727.88$

(b) $18.7 \times (-92.4) = -(18.7 \times 92.4) = -1727.88$

(c) $-18.7 \times (-92.4) = 18.7 \times 92.4 = 1727.88$

1.10 Exercício

Efetuar as operações.

a	18.7×10	b	18.7×100	(c)	18.7×1000	d	-18.7×1000
e	18.7×0.1	f	18.7×0.01	(g)	18.7×0.001	h	-18.7×1000

Resolução.

(a) $18.7 \times 10 = 187$

(b) $18.7 \times 100 = 1870$

(d) $-18.7 \times 1000 = -18700$

(e) $18.7 \times 0.1 = 1.87$

(f) $18.7 \times 0.01 = 0.187$

(h) $-18.7 \times 0.001 = -0.0187$

1.11 Exercício

Escrever os números em falta.

a $25.2 \times ? = -252$ b $? \times (-12) = 0.12$ c $? \times 100 = 4.5$

Resolução.

(a) $25.2 \times (-10) = -252$

(b) $-0.01 \times (-12) = 0.12$

(c) $0.045 \times 100 = 4.5$

1.12 Exercício

Sabendo que $25 \times 25 = 625$, resolver as operações seguintes.

a 2.5×25 (b) 0.25×25 (c) 0.25×0.25 d -0.025×25

Resolução. Notar que a operação da muliplicação goza da **propriedade associativa**: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

(a) $2.5 \times 25 = 0.1 \times 2.5 \times 2.5 \times 25 = 0.1 \times 625 = 62.5$

(d) $25 \times (-0.025) = 25 \times 25 \times (-0.001) = 625 \times (-0.001) = -0.6255$

1.13 Exercício

Resolver mentalmente.

(a) -7×3	(b) 4×9	(c) 8×5
(d) 15×2	(e) 5×7	(f) 6×4
(g) 9×7	(h) -5×6	(i) $-6 \times (-6)$

1.14 Exercício

Efetuar as operações.

(a) 35.02×86.01 (b) 1001×0.09 (c) -453×57 (d) $-6.53 \times (-5.16)$

1.15 Exercício

Escrever expressões equivalentes sem parênteses ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

a $a \times (b + c)$ (b) $a \times (-b - c)$ (c) $a \times (-b + c)$ (d) $-d \times (-(a + b) \times 2b)$

Resolução.

(a) $a \times (b + c) = ab + ac$

1.16 Exercício

Provar cada uma das seguintes proposições.
a O produto de dois números pares é um número par.
(b) O produto de dois números ímpares é um número ímpar.
(c) O produto de um número ímpar por um número par é um número par.

Resolução.
Um número inteiro n diz-se **par** se existe um outro inteiro k tal que $n = 2k$; o inteiro n diz-se **ímpar** se existe um outro inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

(a) Sejam $x = 2k_1$ e $y = 2K_2$ dois números pares. Então $xy = 2k_1 2K_2 = 2(k_1 2K_2)$. Como $k_1 2K_2$ é um número inteiro, então $2(k_1 2K_2)$ tem a forma $2k$. Fica provado que xy é um número par.

1.17 Exercício

Efetuar a operação 23×12 escrevendo sem parênteses a expressão $(20 + 3) \times (10 + 2)$ e efetuando todos as operações resultantes.

1.2.2 Divisão

O esquema seguinte detalha passo a passo a operação de divisão $1314 \div 12$, para recordar o algoritmo da divisão de números na forma decimal.

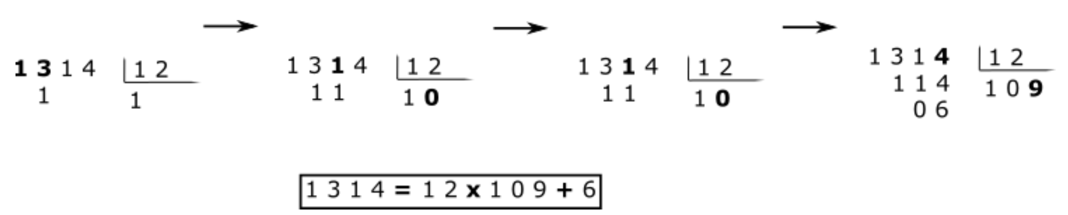

Figura 5

Notar que a expressão $1314 \div 12$ representa o **valor exato** da divisão, que corresponde a ter o resto igual a zero. Como não é o caso, o cociente obtido é apenas uma aproximação do valor representado pela divisão. Escreve-se $1314 \div 12 \approx 109$.

1.18 Exercício

Na figura 5 está resolvida passo a passo a operação $1314 \div 12$. Adaptar o esquema à direita na figura para efetuar as operações seguintes. Representar a divisão na forma *dividendo* $=$ *divisor* $\times$ *cociente* $+$ *resto*.

(a) $13.14 \div 12$ (b) $1314 \div 1.2$ (c) $13.14 \div 1.2$

Resolução.

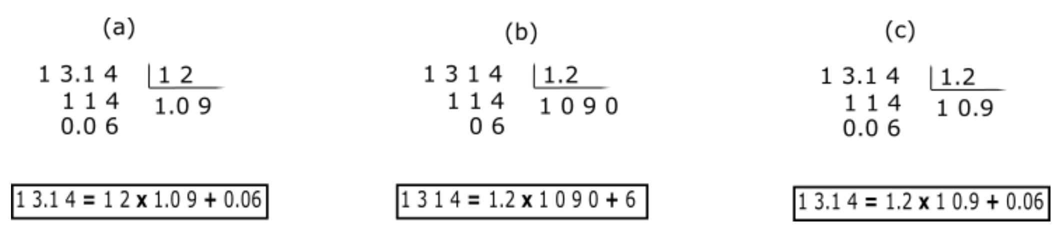

Figura 6

1.19 Exercício

Efetuar as operações até obter um cociente com dois dígitos não nulos. Representar a divisão na forma *dividendo* $=$ *divisor* $\times$ *cociente* $+$ *resto*.

(a) $-18.7 \div 32$ (b) $18.7 \div (-32)$ (c) $-18.7 \div (-32)$

Resolução.

(a) $-18.7 \div 32 \approx -0.58; \qquad -18.7 = 32(-0.58) - 0.14$

(b) $18.7 \div (-32) \approx -0.58; \qquad 18.7 = 32(0.58) + 0.14$

(c) $-18.7 \div (-32) \approx 0.58 \quad -18.7 = -32(0.58) - 0.14$

1.20 Exercício

Efetuar as operações.

a $18.7 \div 10$ b $18.7 \div 100$ (c) $18.7 \div 1000$ d $-18.7 \div 1000$

e $18.7 \div 0.1$ f $18.7 \div 0.01$ (g) $18.7 \div 0.001$ h $-18.7 \div 1000$

Resolução.

(a) $18.7 \div 10 = 1.87$

(b) $18.7 \div 100 = 0.187$

(d) $-18.7 \div 1000 = -0.0187$ (e) $18.7 \div 0.1 = 1870$

(f) $18.7 \div 0.01 = 1870$

(h) $-18.7 \div 0.001 = -18700$

1.21 Exercício

Escrever os números '?' em falta.

a $25.2 \div ? = -252$ b $-12 \div ? = 0.12$ c $? \div (-100) = 4.5$

Resolução.

(a) $25.2 \div (-0.1) = -252$

(b) $-12 \div (-100) = 0.12$

(c) $0.045 \div 0.01 = 4.5$

1.22 Exercício

Indicar todos os divisores inteiros de cada número. Quais os números que são primos?

a 27   b 256   c 45   d 71

Resolução.
Recordar que o número inteiro k é **divisor** do número inteiro n se $n \div k$ tem cociente

inteiro e resto zero, isto é $n = ks$ sendo s um inteiro. Neste caso diz-se também que n é **divisível** por k ou que k **divide** n. Por outro lado, um número inteiro diz-se **número primo** se é divisível apenas por si mesmo e é diferente de 1.

(a) Os divisores inteiros de 27 são 1, 3, 9, 27. O número 27 não é primo.

(b) Os divisores inteiros de 256 são 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. O número 256 não é primo.

(c) Os divisores inteiros de 45 são 1, 3, 5, 9, 45. O número 45 não é primo.

(d) Os divisores inteiros de 71 são 1, 71. O número 71 é primo.

1.23 Exercício

Fatorizar num produto de números primos.

(a) 27 (b) 256 (c) 45 (d) 71

Resolução.
Cada número inteiro pode escrever-se num produto único de todos os seus divisores primos, a menos da ordem dos fatores. Este resultado designa-se por **Teorema Fundamental da Álgebra**.

(a) O único divisor primo de 27 é o 3. A fatorização de 27 em números primos é $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

(b) O único divisor primo de 256 é o 2. A fatorização de 256 em números primos é $256 = 2^8$.

(c) Os divisores primos de 45 são o 3 e o 5. A fatorização de 45 em números primos é $45 = 3 \times 3 \times 5$.

(d) O único divisor primo de 71 é o próprio 71. A fatorização de 71 em números primos é $71 = 71$.

1.24 Exercício

Determinar o máximo divisor comum de cada grupo de números. Em que casos os números são primos entre si?

(a) 27, 36 (b) 4, 6 (c) 12, 20, 28

Resolução.
O **máximo divisor comum** de um conjunto de números inteiros é o maior inteiro que divide todos os números do conjunto. Dois números inteiros dizem-se **primos entre si** se não possuem fatores primos comuns.

(a) Fatorizamos em números primos os números 27 e 36.

$$27 = 3 \times 3 \times 3 \qquad 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

De seguida procuramos o maior produto de primos comuns às duas fatorizações. Neste caso obtemos $3 \times 3 = 9$. Concluimos que 9 é o máximo divisor comum dos números 27 e 36. Escreve-se $mdc(27, 36) = 9$. Os números 27 e 36 não são primos entre si.

(b) Fatorizamos em números primos os números 4 e 6.

$$4 = 2 \times 2 \qquad 6 = 2 \times 3$$

De seguida procuramos o maior produto de primos comuns às duas fatorizações. Neste caso obtemos apenas 2. Concluimos que 2 é o máximo divisor comum dos números 4 e 6. Escreve-se $mdc(4,\ 6) = 2$. Os números 4 e 6 não são primos entre si.

(c) Fatorizamos em números primos os números 12, 20 e 28.

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 20 = 2 \times 2 \times 5 \qquad 28 = 2 \times 2 \times 7$$

De seguida procuramos o maior produto de primos comuns às três fatorizações. Neste caso obtemos $2 \times 2 = 4$. Concluimos que 4 é o máximo divisor comum dos números 12, 20 e 28. Escreve-se $mdc(12, 20, 28) = 4$. Os números 12, 20 e 28 não são primos entre si.

1.25 Exercício

Mostrar que se $a \div b = c$ então $(ak) \div (bk) = c$, com $k \neq 0$.

Resolução.

$a \div b = c \Rightarrow a = bc,$	por definição de divisão
$\Leftrightarrow ak = (bc)k,$	multiplicar por k os dois membros
$\Leftrightarrow ak = (bk)c,$	pela comutatividade do produto
$\Leftrightarrow \dfrac{ak}{bk} = c,$	por definição de divisão
$\Leftrightarrow (ak) \div (bk) = c,$	exprimindo a fração como uma divisão

Esta propriedade $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ designa-se por **lei do corte da divisão**. Ela permite simplificar frações, como por exemplo $\frac{27}{15} = \frac{9\times3}{5\times3} = \frac{9}{5}$.

1.26 Exercício

Mostrar que a divisão **não** goza da propriedade associativa, isto é, geralmente verifica-se $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$.

Resolução.
Se a expressão $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$ fosse uma **identidade**, então obteríamos uma igualdade verdadeira para todo o terno de números a, b, c que permitisse calcular um qualquer dos dois membros. Assim, para provar que a identidade é falsa, basta indicar um terno de números a, b, c para o qual os dois membros da igualdade não têm o mesmo valor. Por exemplo, fazendo $a = b = c = 2$, temos

$$a \div (b \div c) = 2 \div (2 \div 2) = 2 \div 1 = 2,$$

enquanto que

$$(a \div b) \div c = (2 \div 2) \div 2 = 1 \div 2 = 1/2.$$

A diferença de valores dos dois membros justifica que a divisão não goza da propriedade associativa. Isto não quer dizer que a igualdade não se verifique para algumas escolhas de números a, b, c. Indica um terno de números para os quais a igualdade seja verdadeira!

1.27 Exercício

Resolver mentalmente.

$(a)\quad -7 \div 2$	$(b)\quad 4 \div 8$	$(c)\quad 18 \div 3$
$(d)\quad 15 \div (-2)$	$(e)\quad -22 \div (-4)$	$(f)\quad 6 \div 4$

1.28 Exercício

Escrever os números em falta.

a $\quad 25.2\div\ ?\ = 8.4 \qquad (b)\quad ?\ \div 2.1 = -10.5 \qquad (c)\quad ?\times ?\ = 8$

Resolução.

$(a)\quad 25.2\div\ ?\ = 8.4 \Leftrightarrow 25.2 = \ ?\ \times 8.4 \Leftrightarrow ?\ = 25.2/8.4 = 3$

1.29 Exercício

Efetuar as operações $y \div x$ e atribuir unidades aos cocientes e aos restos. Para cada caso, escrever o enunciado de um problema cuja solução seja o resultado da divisão.

(a)	$y = 37\,\text{km}$	$x = 1.5\,\text{horas}$	b	$y = 2.25\,€$	$x = 1.24\,\text{kg}$
(c)	$y = 0.27\,\text{g}$	$x = 0.35\,\text{g}$	(d)	$y = 12\,€$	$x = 3\,\text{km}$
(e)	$y = 30$	$x = 1.5$	(f)	$y = 24\,\text{horas}$	$x = 40075\,\text{km}$

Resolução.

$(b)\quad 2.25\ (€) \div 1.24\ (kg) \approx 1.8\,€/kg \qquad resto = 0.018\ (€)$

Exemplo de enunciado: 1.24 kg de um produto custam 2.25 euros. Qual o custo de 1 kg do produto?

1.2.3 Frações

As expressões $\frac{a}{b}$ e $a \div b$ significam ambas o valor exato da divisão. A notação $\frac{a}{b}$ é usada por ter vantagens operacionais. Por exemplo, é fácil efetuar a soma $1/7 + 2/3 = 17/21$, mas pouco prático realizar a operação usando a forma decimal para os operandos 0.142857142857... + 0.6666666666... (escrever o resultado desta soma e verificar que corresponde a 21/7).

1.30 Exercício

Escrever na forma decimal.

ⓐ $\frac{4}{3}$ ⓑ $\frac{15}{125}$ ⓒ $\frac{-12}{5}$ ⓓ $\frac{12}{-5}$

ⓔ $\frac{-12}{-5}$ ⓕ $-\frac{12}{5}$ ⓖ $\frac{125}{15}$ ⓗ $\frac{2}{3}$

Resolução.

(a) $\frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1.333\cdots$

(b) $\frac{15}{125} = \frac{3}{25} = 3 \div 25 = 0.12$

(c) $\frac{-12}{5} = -12 \div 5 = -2.4$

(d) $\frac{12}{-5} = 12 \div (-5) = -2.4$

(e) $\frac{-12}{-5} = -12 \div (-5) = 2.4$

(f) $-\frac{12}{5} = -(12 \div 5) = -2.4$

(g) $\frac{125}{15} = \frac{25}{3} = 25 \div 3 = 8.333\cdots = 8.\overline{3}$

(h) $\frac{2}{3} = 2 \div 3 = 0.66\cdots = 0.\overline{6}$

1.31 Exercício

Escrever como fracção na forma reduzida.

ⓐ 12.5 ⓑ $0.\overline{354}$ ⓒ -0.23 ⓓ $36.22\overline{15}$

Resolução. Uma fração a/b está na **forma reduzida** se não puder escrever-se usando números menores que a, b. Por exemplo, $1/2$ é a forma reduzida da fração $3/6$, por ser $3/6 = 3/(2 \times 3) = 1/2$.

(a) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{25\times 5}{2\times 5} = \frac{25}{2}$.

(b) Por ser $x = 0.\overline{354} = 0.354354354\cdots$, podemos escrever $1000x = 354.354354\cdots$, e também $1000x - x = 354$, que equivale a $999x = 354$ e portanto $x = 354/999 = 118/999$ (verificar!).

(c) $-0.23 = -\frac{23}{100}$.

(d) $36.22\overline{15} = 36.22 + 0.00\overline{15} = 3622/100 + 0.\overline{15}/100$. Determinamos agora a fração correspondente a $0.\overline{15}$. Fazendo $x = 0.1515\cdots$ temos $100x = 15.\overline{15}$ e $100x - x = 15$, equivalente a $99x = 15$ e portanto $x = 15/99 = 5/33$. Finalmente
$36.22\overline{15} = 3622/100 + (5/33)/100 = 3622/50 + (5/3300) = 119531/3300$.

A última fração em cada alínea encontra-se na forma irredutível pretendida.

1.32 Exercício

Efetuar as operações e apresentar os resultados como fracções na forma reduzida.

a	$\frac{2}{7}-\frac{1}{5}$	(b)	$-\frac{2}{7}+\frac{1}{5}$	(c)	$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$	d	$\frac{4}{5}\times\frac{-2}{3}$
(e)	$\frac{4}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$	(f)	$-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$	(g)	$\frac{4}{-5}\times\frac{2}{3}$	(h)	$\frac{4}{-5}\times\frac{-2}{3}$
i	$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$	(j)	$\frac{-4}{5}\div\frac{2}{3}$	(k)	$\frac{7}{3}+\frac{9}{5}\times\frac{5}{4}$	(l)	$\left(\frac{7}{3}+\frac{9}{5}\right)\times\frac{5}{4}$
(m)	$1/(1/5)$	(n)	$4/(1/5)$	(o)	$1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$	p	$\dfrac{2+\frac{1}{3}}{3}+\frac{2}{5}$
(q)	$\dfrac{5+2}{5}$	(r)	$\dfrac{18+12}{6}\times\frac{2}{5}$	(s)	$\dfrac{3/5-2/3}{1-3/8}+\frac{1}{7}\times\frac{3}{-2}$		

Resolução.

(a) $\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10}{35}-\frac{7}{35}=\frac{3}{35}$ $\qquad mmc(7,5)=35$

(d) $\frac{4}{5}\times\frac{-2}{3}=\frac{4(-2)}{5(3)}=-\frac{8}{15}$

(i) $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$

(p) $\dfrac{2+\frac{1}{3}}{3}+\frac{2}{5}=\frac{7/3}{3}+\frac{2}{5}=\frac{7}{9}+\frac{2}{5}=\frac{35}{45}+\frac{18}{45}=\frac{53}{45}$

1.33 Exercício

Resolver mentalmente.

(a) $1-\frac{4}{5}$	(b) $5+\frac{2}{3}$	(c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$
(d) $\frac{-3}{2}\times\frac{4}{3}$	(e) $\frac{-3}{2}\div\frac{4}{3}$	(f) $6\times\frac{-1}{2}$
(g) $49\times\frac{1}{7}$	(h) $3\div\frac{5}{3}$	(i) $\frac{4}{3}\div 2$

1.34 Exercício

Escrever em notação decimal, fazendo aproximações às milésimas quando necessário.

a 3%	(b) 25%	(c) 0.2%	(d) 100%
(e) 1000%	(f) $\frac{2}{5}\%$	(g) $\pi\%$	h $e\%$

Resolução.
Eis dois exemplos de números aproximados às milésimas por truncatura.

$$0.11543323 \approx 0.115$$

$$0.115843 \approx 0.116$$

Consegues entender o processo?

$$(a)\ 3\% = \frac{3}{100} = 0.03$$

$$(h)\ e\% \approx \frac{2.71828}{100} = 0.0271828$$

1.35 Exercício

Escrever os valores em percentagem.

a 0.23	(b) 1.2	(c) 8.5	(d) 0.00034
e -1	(f) 0.75	(g) 0.32	(h) 0.07

Resolução.

$$(a)\ 0.23 = \frac{23}{100} = 23\%$$

$$(e)\ -1 = \frac{-100}{100} = -100\%$$

1.3. Linguagem: Aritmética

Os nomes dos operandos, dos operadores e das suas propriedades operatórias.

1.36 Exercício

Escrever diante de cada expressão na coluna esquerda o número da expressão correspondente na coluna direita (se existir correspondência; se não existir escrever um 'X'). Na coluna direita, $\log_b x$, por exemplo, pode corresponder ao texto 'logaritmo', mas também ao texto 'base do logaritmo' por a seta a negrito apontar para a base b.

Português

1. Parcela →
2. Forma reduzida da fração →
3. Radical →
4. Radicando →
5. Índice da raiz →
6. Potência →
7. Expoente →
8. Base da potência →
9. Base do logaritmo → **1.**
10. Argumento do logaritmo → **6.**

Matemática

1. $\log_b(x)$
2. x^n
3. $\log_b(x)$
4. $\frac{d}{dx}f(x)$
5. e^2
6. $\log_3(5)$
7. $\frac{4}{7}$
8. $\sqrt[3]{x}$
9. $a \div b$
10. $a - b$
11. $e^{2.5}$

1.37 Exercício

O mesmo enunciado do exercício 1.36.

Português

1. Propriedade associativa da adição → X
2. Resto ou diferença →
3. Diminuendo ou aditivo →
4. Produto →
5. Dividendo →
6. Fator →
7. Fatorizar →
8. Numerador →
9. Denominador →
10. Fração →
11. Parcela →
12. Forma reduzida da fração →
13. Radical →
14. Radicando →
15. Índice da raiz →
16. Potência →
17. Expoente →
18. Base da potência →
19. Base do logaritmo →
20. Argumento do logaritmo →

Matemática

1. $\log_b x$
2. $a - b$
3. $6 = 2 \times 3$
4. $2 \times 3 = 6$
5. $\sqrt[3]{x}$
6. x^n
7. $\log_b(x)$
8. $\frac{d}{dx} f(x)$
9. e^2
10. $\log_3(5)$
11. $\frac{4}{7}$
12. $3 + 2 + 5$
13. $f(x) = ax^2 + bx + c$
14. $\sqrt[3]{x}$
15. $a \div b$
16. $a - b$
17. $e^{2.5}$

1.38 Exercício

Para cada afirmação, escrever as expressões matemáticas correspondentes usando apenas multiplicações ou divisões.

(a) Cinco por cento de 27.
(b) Uma rua tem 7 prédios, cada prédio tem 4 apartamentos, em cada apartamento vivem 5 pessoas. Número de pessoas que vivem na rua?
(c) Um retângulo com uma área de $a \times b = 10\ km^2$. $a =$, $b =$?
(d) Depositei hoje 2 cêntimos e em cada um dos 10 dias seguintes depositei o dobro da quantia total acumulada até esse dia. Dinheirinho ao fim desses 10 dias?
(e) Uma torneira despeja água para um tanque inicialmente vazio à taxa de 5 $litros/minuto$. Quantos minutos decorrem até o tanque ter 37.8 litros de água?
(f) Um automóvel desloca-se à velocidade constante de 55 km/h. Que distância percorre em 2.3 horas?

Resolução.

(a) $5\% \times 27$.
(f) $(55\ km/h) \times (2.3\ horas)$.

1.39 Exercício

Formalizar matematicamente as expressões em português.

(a) 36 é igual à soma de um certo número com o quadrado desse mesmo número.

(b) A terça parte de um número adicionada à quinta parte de outro número é maior ou igual ao primeiro número.

(c) A média aritmética dos números u, v, w, x é igual a zero.

(d) O perímetro de uma circunferência de raio r é igual a 2.

(e) x é um número par positivo.

(f) As raízes quadradas de 3.

(g) 2/3 de 4/9.

(h) O inverso de 4/9.

(i) A área de uma esfera de raio r.

(j) O ponto intermédio dos números x e y sobre a reta real.

(k) O módulo da soma de dois números é menor ou igual à soma dos módulos de cada um desses números (**desigualdade triangular**).

(l) A operação de adição goza da propriedade associativa.

(m) A distância na reta real entre os números x e 3 é igual a 2.

(n) A distância na reta real entre os números x e -3 é igual a 2.

(o) A distância na reta real entre os números x e 5 é superior a 3.

Resolução.

(a) $36 = x + x^2$
(e) $x = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$
(k) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(n) $|x - (-3)| = 2$

1.4. Potências

1.40 Exercício

Resolve as potências em falta.

a $2^2 = 2 \times 2 = 4$	(b) $2^5 =$	c $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
(d) $3^4 =$	(e) $2^{12} =$	(f) $4^3 =$
g $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$	(h) $2^2 + 2^3 =$	(i) $2^2 \times 2^3 =$
(j) $2^3 \times 3^2 =$	k $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	(l) $\frac{2^2}{3^2} =$
(m) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 =$	n $\left(\frac{2}{-3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$	(o) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$
p $(-2)^2 = -2(-2) = 4$	(q) $-2^2 =$	r $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
(s) $2^{-1} =$	(t) $2^0 = 1$	(u) $-2^{-2} =$
v $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$	(w) $3^{-1} \times 3 =$	x $2^{3^2} = 512$

1.41 Exercício

Escrever na forma decimal as expressões em falta.

a $10^3 = 1000$	(b) $10^{-3} =$	c $10^{-1} = 0.1$
(d) $10^0 =$	e $22 \times 10^3 = 22000$	(f) $2.2 \times 10^3 =$
(g) $235 \times 10^{-4} =$	h $3 \times 10^{-6} = 0.000003$	(i) $\frac{22}{10^{-1}} =$
(j) $2.2 \div 10^2 =$	(k) $10^2 + 10^{-4} =$	l $10^2 \times 10^{-4} = 10^{-2}$

1.42 Exercício

Escrever na forma decimal.

(a) Cinco mil trezentos e vinte e um. (b) Vinte e cinco milhões.
(c) Vinte e cinco milésimas. (d) Três décimas de milionésima.

1.43 Exercício

Escrever em notação científica. Qual a vantagem de usar esta notação?

(a) 0.00225 (b) 132.27 (c) -4.43 (d) 1.98

Resolução.
A **notação científica** é uma forma de representação de números. Todo o número real

é escrito da forma $\pm a_1.a_2a_3\cdots \times 10^n$, em que $1 \leq a_1 < 10$ e n é um número inteiro, positivo ou negativo. Os segundos membros das expressões seguintes são as representações em notação científica dos números nos primeiros membros.

$$135 = 1.315 \times 10^2$$

$$-0.001315 = -1.315 \times 10^{-3}$$

1.44 Exercício

Escrever sem usar parênteses ($a, b \in \mathbb{R}$).

(a) $(a+b)^2$	(b) $(-a-b)^2$	(c) $(a-b)^2$	(d) $(a+b)^3$
(e) $(a-b)^3$	(f) $(a+b)^4$	(g) $(a+b)^{-2}$	(h) $(a+b)^{-3}$
(i) $3\times(a+b)$	(j) $\dfrac{3\times(a+b)}{3}$	(k) $(a+b)(a+b)$	(l) $(a+b)(a-b)$
(m) $(b+a)(b+a)$	(n) $(b+a)(b-a)$	(o) $(a-b)(a-b)$	(p) $a(b-c)^2$

Resolução.

$$(h)\ (a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

1.5. Radicais

Notar que

- $\sqrt[b]{a} = c \Rightarrow a = c^b$;
- Cada número positivo admite duas raízes reais de índice par, mas apenas para a raiz positiva se usa a notação '$\sqrt{\ }$';
- Os números negativos não têm raízes reais de índice par, mas têm raízes reais de índice ímpar.

1.45 Exercício

Completar a informação em falta na resolução.

(a) $\sqrt{4}$	(b) $\sqrt[3]{64}$	(c) $\sqrt[4]{-16}$	(d) $\sqrt[5]{32}$
(e) $\sqrt{121}$	(f) $\sqrt[3]{125}$	(g) $\sqrt{10000}$	(h) $\sqrt[10]{1024}$

Resolução.

(a) $\sqrt{4} = 2,$ porque $2^2 = 4$

(b) $\sqrt[3]{64} = 4,$ porque $4^3 = 64$

(c) $\sqrt[4]{-16} = 4i$ porque $\_\_\_\_\_^{(*)}$

(d) $\sqrt[5]{32} =$, porque _____

(e) $\sqrt{121} =$, porque _____

(f) $\sqrt[3]{125} = 5,$ porque $5^3 = 125$

(g) $\sqrt{10000} =$, porque _____

(h) $\sqrt[10]{1024} = 2,$ porque $2^{10} = 1024$

(*): usou-se a convenção de $\sqrt{-16}$ representar o **valor principal** das raízes quadradas de -16, que é $4i$.

1.46 Exercício

Determinar o inteiro mais próximo, por defeito, do valor de cada expressão.

a $\sqrt[3]{324} \approx$ (b) $\sqrt[4]{39.6} \approx$

Resolução.
Notar que o valor inteiro mais próximo **por defeito** de um certo número k, é o maior número inteiro que não ultrapassa k. Por exemplo, o inteiro mais próximo de 3.5 por defeito é 3; o inteiro mais próximo por defeito de -3.5 é -4.

(a) Se $\sqrt[3]{324} = x$ então $x^3 = 324$. Como a função x^3 é crescente, procuramos o maior inteiro possível que substituido em x verifica $x^3 \leq 324$. Encontramos $x = 6$, que é o valor aproximado por defeito pretendido. Podemos escrever $\sqrt[3]{324} \approx 6$. No entanto $x = 7$ é uma melhor aproximação de $\sqrt[3]{324}$. Porquê?

1.47 Exercício

Para cada expressão determinar o inteiro mais próximo do seu valor.

a $\sqrt{13}$ (b) $\sqrt[3]{12}$ (c) $\sqrt[3]{265}$ (d) $\sqrt[7]{325}$

Resolução.

(a) $3^2 = 9 < 13 < 4^2 = 16$

Por ser $3.5^2 = 12.25 < 13,$ o inteiro mais próximo de $\sqrt{13}$ é 4

1.48 Exercício

Escrever os radicais na forma de potências e as potências na forma de radicais (se possível).

(a) $2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3}$	(b) $\sqrt[3]{2^{-6}}$	(c) $2^{-3/5}$
(d) $\sqrt[7]{x^2} = x^{2/7}$	(e) $4^{4/3}$	(f) $\sqrt[5]{5^5} = 5$
(g) $\sqrt[1]{7}$	(h) $\sqrt{2^{-2}} = 2^{-1}$	(i) $\sqrt[4]{12}$

1.49 Exercício

Simplificar (se possível).

(a) $2^{5/2} \times 2^{-1/2}$ (b) $2.5^{3.5} \div 2.5^{-1}$ (c) $\sqrt{7} + \sqrt{8}$ (d) $2^{1/3} - 2^{1/4}$

(e) $2^{5/2} \times 5^{5/2}$ (f) $(-2)^{5/2} \times 5^{5/2}$ (g) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ (h) $3^{1/3} - 2^{1/3}$

Resolução.
Geralmente, **simplificar** uma expressão numérica não significa resolvê-la, mas apenas escrevê-la noutra forma equivalente, com menos operações por efetuar e que seja relativamente simples de obter.

(a) $2^{5/2} \times 2^{-1/2} = 2^{5/2-1/2} = 2^2 = 4$

(b) $2.5^{3.5} \div 2.5^{-1} = 2.5^{3.5-(-1)} = 2.5^{4.5}$

(c) $\sqrt{7} + \sqrt{8}$ não se pode simplificar mais

1.6. Logaritmos

1.50 Exercício

Escrever os valores em notação decimal.

(a) $\log_2(2)$	(b) $\log_4(4)$	(c) $\log_{0.1}(0.1)$
(d) $\log_{3.5}(3.5^2)$	(e) $\log_{10}(1000)$	(f) $\log_2(8^2)$
(g) $\Big(\log_2(8)\Big)^2$	(h) $4\log_3(27)$	(i) $2\log_e(e)$
(j) $2\ln(e)$	(k) $\log_{0.1}(10)$	(l) $\log_{1.2}(1.44)$
(m) $\log_{0.2}(0.008)$	(n) $e^{\ln 4}$	(o) $10^{\log_{10}(2.7)}$
(p) $4^{\log_4(12)}$	(q) $\log_2(30) - \log_2(7.5)$	(r) $\log_2\left((8 \times 4)^2\right)$
(s) $\log_{10}(10\%)$	(t) $5\% \log_3(81)$	(u) $\log_3(3^{\log_3(3)})$

Resolução.

(a) $\log_2(2) = 1$

(d) $\log_{3.5}(3.5^2) = 2\log_{3.5}(3.5) = 2$

(h) $4\log_3(27) = 4 \times 3 = 12$

(j) $2\ln(e) = 2 \times \log_e(e) = 2 \times 1 = 2$

(k) $\log_{0.1}(10) = \log_{10^{-1}}(10) = -1$

(n) $e^{\ln 4} = 4$

(o) $10^{\log_{10}(2.7)} = 2.7$

(r) $\log_2\left((8 \times 4)^2\right) = 2(log_2(8) + log_2(4)) = 2(3 + 2) = 10$

1.51 Exercício

Determinar para cada expressão o inteiro mais próximo (se possível).

a $\log_4(14)$	(b) $\log_3(13)$	(c) $\log_5(0)$
d $\log_5(2)$	(e) $\log_{0.1}(14)$	(f) $\log_1(12)$
g $\log_{-2}(8)$	h $\log_5(-2)$	i $\log_5(0)$

Resolução.

(a) Escrevemos $\log_4(14) = x$, sendo x o valor que queremos aproximar.
Como $\log_4(14) = x \Leftrightarrow 4^x = 14$, podemos procurar uma estimativa para x por tentativa e erro, substituindo x por sucessivos números inteiros até termos dois valores de 4^x que enquadrem 14. Verificamos que $(4 < 14 < 16) \Leftrightarrow (4^1 < 14 < 4^2)$ e por isso $1 < x < 2$ (notar que $\log_4(x)$ é uma função crescente). Podemos pensar que x está mais próximo de 2 do que de 1, por 14 estar mais próximo de 16 do que de 4. A conclusão é correta, mas o raciocínio não, porque $\log_4(x)$ não é uma função linear! Uma forma correta de obter esta conclusão é verificar que $x > 1.5$ e por isso $x = 2$ é uma aproximação melhor que $x = 1$. Vamo a isto. Temos $1.5 = \log_4(4^{1.5}) = \log_4(4 \times 4^{0.5}) = \log_4(4 \times \sqrt{4}) = \log_4(8)$. Por ser $log_4(x)$ uma função crescente e o argumento 14 maior que o argumento 8, temos $\log_4(14) > 1.5$, pelo que $x = 2$ é a melhor aproximação inteira pretendida.

(d) Escrevemos $\log_5(2) = x$, sendo x o valor que queremos aproximar.
Como $\log_5(2) = x \Leftrightarrow 5^x = 2$, procuramos uma estimativa para x por tentativa e erro até termos dois valores de 5^x que enquadrem 2. Verificamos que $5^0 < 2 < 5^1$ e por isso $0 < x < 1$. Resta ver se x é maior ou menor que 0.5 para saber qual dos valores 0 ou 1 escolhemos. Como $\log_5(5^{0.5}) = \log_5(\sqrt{5}) = 0.5$ e $\sqrt{5} > 2$ e $\log_5(x)$ é uma função crescente, então $\log_5(2) < 0.5$ pelo que $x = 0$ é a melhor aproximação inteira pretendida.

(g, h) Logaritmos com bases negativas ou argumentos negativos não estão definidos em $\mathbb{R}$. Têm valores complexos (porquê?).

(i) O valor $\log_b(0)$ não está definido (não existe), seja qual for a base b.

1.7. Operador Módulo

1.52 Exercício

Escrever os valores numéricos das expressões em notação decimal.

$(a)\ \lvert -2\rvert$	$(b)\ -\lvert 2\rvert$	$(c)\ \lvert 0\rvert$	d $\left\lvert -\dfrac{1}{2}\right\rvert$
$(e)\ \left\lvert \dfrac{1}{2}\right\rvert$	$(f)\ \left\lvert -2^3\right\rvert$	$(g)\ \left\lvert 2^3\right\rvert$	$(h)\ \lvert 2-2\rvert$
$(i)\ \lvert -2\rvert^2$	$(j)\ -\lvert 3-2\rvert$	k $-\lvert -3+2\rvert$	$(l)\ \lvert 5-2\rvert$
$(m)\ \lvert -5+2\rvert$	$(n)\ \sqrt{\lvert -6-3\rvert}$	o $\Big(\lvert -29+2\rvert\Big)^{1/3}$	$(p)\ \left\lvert 2\times\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\right\rvert$

Resolução.

$(d)\ \left\lvert -\dfrac{1}{2}\right\rvert = \dfrac{1}{2}$

$(k)\ -\lvert -3+2\rvert = -\lvert -1\rvert = -1$

$(o)\ \Big(\lvert -29+2\rvert\Big)^{1/3} = \Big(\lvert -27\rvert\Big)^{1/3} = (27)^{1/3} = 3$

2. Equações e Inequações

As equações e inequações que surgem na engenharia, relacionam grandezas físicas variáveis que aparecem na formalização matemática de sistemas. A sua resolução permite encontrar os valores destas variáveis e assim entender o comportamento dos sistemas físicos descritos pelas equações e inequações.

1.53 Exercício

Considerar a equação linear de uma variável

$$\frac{x+1}{2} = 3x + \frac{2}{5}.$$

(a) Verificar se $x = -1$ é uma solução da equação.
(b) Resolver a equação e verificar a correção do resultado obtido.

Resolução.
Uma equação se diz **linear** se os termos em que as incógnitas têm expoente 1, não se multiplicam nem dividem entre si, não surgem em denominadores, nem são argumentos de funções não lineares. Uma equação diz-se **linear de uma variável** se é linear e contém apenas uma incógnita. Um valor numérico diz-se **solução da equação** se substituido na incógnita, e efetuadas as operações nos dois membros da equação, a igualdade resultante é verdadeira. Por exemplo,

$5(3x+1)+y=2$	é uma equação linear de duas variáveis;
$\dfrac{2}{x-3}+1=4$	é uma equação não linear de uma variável;
$3xy+x=4$	é uma equação não linear de duas variáveis;
$x+2=(3/2)x$	é uma equação linear de uma variável.

(a) Substituindo x por -1 na equação, obtemos

$$\frac{-1+1}{2} = 3(-1) + \frac{2}{5} \Leftrightarrow 0 = -3 + \frac{2}{5} \Leftrightarrow 0 = -\frac{13}{5}.$$

Concluimos que -1 não é uma solução da equação.

(b) Vamos resolver a equação. Como $mmc(2,5) = 10$,

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} = 3x + \frac{2}{5} &\Leftrightarrow 5(x+1) = 30x + 4 \qquad \text{multiplicámos ambos os membros por 10} \\ &\Leftrightarrow 5x - 30x = -5 + 4 \\ &\Leftrightarrow -25x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

A solução única (porquê?) da equação é $x = \frac{1}{25}$.

Para verificar a correção deste resultado, substituimos x por $1/25$ na equação inicial e obtemos uma igualdade verdadeira.

$$\frac{1/25+1}{2} = 3(1/25) + \frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; \frac{26/25}{2} = \frac{3}{25} + \frac{10}{25} \;\Leftrightarrow\; \frac{13}{25} = \frac{13}{25}$$

1.54 Exercício

Resolver a equação linear e verificar a correção do resultado obtido.

$$\frac{x-2}{3} = 2(3x-2)$$

Resolução.
Vamos resolver a equação.

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{3} = 2(3x-2) &\Leftrightarrow x-2 = 18x-12 \qquad \text{Multiplicámos ambos os membros por 3}\\ &\Leftrightarrow x-18x = 2-12\\ &\Leftrightarrow -17x = -10\\ &\Leftrightarrow x = \frac{10}{17}\end{aligned}$$

A solução da equação é $x = \frac{10}{17}$.
Para verificar a correção deste resultado, substituimos x por $10/17$ na equação inicial e obtemos uma igualdade verdadeira.

$$\frac{10/17-2}{3} = 2(3(10/17)-2) \Leftrightarrow \frac{-24/17}{3} = \frac{60}{17} - 4 \Leftrightarrow -\frac{8}{17} = -\frac{8}{17}$$

1.55 Exercício

Para cada uma das equações lineares de uma variável seguintes, (i) verificar se $x = -1$ é uma solução da equação; (ii) resolver a equação (se possível).

$(a)\ x+3=2$	$(b)\ x-3=2$	$(c)\ x=\sqrt{2}$
d $\frac{x}{2}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$	$(e)\ \frac{x}{2}-3=\frac{1}{3}$	f $-\frac{x}{2}-3=\frac{1}{3}$
$(g)\ x-3=x-2$	$(h)\ x-3=2x+1$	$(i)\ \frac{x-2}{3}=\frac{3x-2}{5}-1$
$(j)\ \frac{x-2}{3}=2(3x-2)-1$	k $x+1=x+1$	$(l)\ \frac{3}{5}x-2x-\frac{1}{4}=0$

Resolução.

(d)

(i) Substituindo a incógnita por -1 obtemos $\frac{-1}{2} = \sqrt{2}+\frac{1}{2}, \Leftrightarrow -1 = \sqrt{2},$ que é uma igualdade falsa. Por isso -1 não é uma solução da equação

(ii) Resolução da equação: $\frac{x}{2} = \sqrt{2}+\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ x = 2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) \ \Leftrightarrow\ x = 2\sqrt{2}+1$

A solução da equação é $x = 2\sqrt{2}+1$.

(f)

(i) Substituindo a incógnita por -1 obtemos $-\dfrac{(-1)}{2}-3=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{3}$, que é uma igualdade falsa. Por isso -1 não é uma solução da equação

(ii) Resolução da equação: $-\dfrac{x}{2}-3=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{x}{2}=3+\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-2\left(\dfrac{10}{3}\right) \Leftrightarrow x=-\dfrac{20}{3}$

A solução da equação é $x=-\frac{20}{3}$.

(k)

(i) Substituindo a incógnita por -1 obtemos $-1+1=-1+1 \Leftrightarrow 0=0$, que é uma igualdade verdadeira. Por isso -1 é uma solução da equação

(ii) Resolução da equação: $x+1=x+1 \Leftrightarrow 0=0$

Como a equação inicial é uma **identidade** (igualdade verdadeira para todos valores de x para os quais algum dos membros pode ser calculado; neste caso a igualdade é verdadeira para todos os valores reais), todo o número real é solução da equação.

1.56 Exercício

Resolver a equação não linear de uma variável e verificar a correção do resultado obtido.

$$\frac{x+2}{3x}-\frac{1}{5}=-\frac{7}{5x}+2$$

Resolução.
Vamos resolver a equação.

$\dfrac{x+2}{3x}-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{7}{5x}+2 \Leftrightarrow 5(x+2)-3x=-21+30x$

Multiplicámos ambos os membros por $mmc(3x,5,5x)=15x$ - mmc algébrico

Esta transformação só é válida se $x\neq 0$. Porquê?

$\Leftrightarrow 5x+10-3x=-21+30x$

$\Leftrightarrow 2x-30x=-10-21$

$\Leftrightarrow -28x=-31$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{31}{28}$

A solução da equação é $\frac{31}{28}$.

1.57 Exercício

Resolver em ordem a t a equação

$$2/(b^t x)=a.$$

Resolução.

- A equação tem quatro incógnitas, b, t, x, a. Uma solução da equação é qualquer quádruplo de valores (b, t, x, a) que substituidos na equação tornem a igualdade verdadeira. Por exemplo, para $(b, t, x, a) = (2, 0, 1, 2)$ temos

$$\frac{2}{(2^0)1} = 2 \;\Leftrightarrow\; 2 = 2.$$

- A forma em que a equação é apresentada é útil se quisermos conhecer o valor de a, conhecendo previamente os valores de b, t, x.
- Resolver a equação em ordem a t, significa colocá-la na forma $t = (...)$, em que no segundo membro aparecem a, b, x, mas não t. Esta forma é útil se, a partir dos valores de a, b, x de uma solução quisermos obter o valor correspondente de t.
- Vamos então resolver a equação em ordem a t.

$2/(b^t x) = a \Leftrightarrow 2 = b^t xa$ Multiplicámos ambos os membros por $b^t x$

Esta transformação só é válida se $x \neq 0$. Porquê?

$\Leftrightarrow b^t xa = 2$ Trocámos os dois membros.

$\Leftrightarrow b^t = \dfrac{2}{xa}$ Passámos para o 2º membro os termos sem t.

$\Leftrightarrow \log_b \left(b^t\right) = \log_b \left(\dfrac{2}{xa}\right)$ Aplicámos *log* aos dois membros para fazer a incógnita t descer da posição de expoente.

$\Leftrightarrow t = \log_b \left(\dfrac{2}{xa}\right)$

A resposta a este problema é a equação $t = \log_b\left(\frac{2}{xa}\right)$. Esta equação tem o mesmo conjunto de soluções que $2/(b^t x) = a$, mas tem a forma mais adequada para responder a questões como, Se for $a = 2,\ x = 1,\ b = 3$, qual o valor de t?

1.58 Exercício

Obter as soluções reais das equações.

(a) $x^2 = 4$	(b) $\dfrac{x^2}{2} = 4$	(c) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 4$	(d) $\dfrac{x^2}{2} = -2$
(e) $x^4 = 5$	(f) $x^3 = -3$	(g) $x^6 = -3$	(h) $x^2 + 2x + 1 = 0$
(i) $x^2 = 3x - 2$	(j) $\dfrac{x^2}{2} = 4 + x$	(k) $(x+1)(x-1) = 0$	(l) $e^x = 5$
(m) $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{1}{2}$	(n) $e^x + x = 0$	(o) $(x+1)(x-1) = 2$	(p) $\log_x 5 = 2$
(q) $\dfrac{3x+10}{2x-5} = -2$	(r) $\dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{1}{2} = 3$	(s) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+3} = 4$	(t) $\sqrt{x-3} = 5$
(u) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+1}$	(v) $\sqrt{x^2+9} = -5$	(w) $\sqrt{x^2} = 2$	(x) $\sqrt{\sqrt{x^2}} = 2$
(y) $x + 1 = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{2}}$	(z) $x^2 + 4x = 0$	(aa) $\dfrac{1}{3}x^2 = 3x$	(bb) $\dfrac{x}{x} = 1$

Resolução.

(b) $\dfrac{x^2}{2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{8}) \vee (x = \sqrt{8})$

(d) $\dfrac{x^2}{2} = -2 \Leftrightarrow x^2 = -8 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{8} \Leftrightarrow (x = -i\sqrt{8}) \vee (x = i\sqrt{8})$

Equação impossível em $\mathbb{R}$

(e) $x^4 = 5 \Leftrightarrow (x = -\sqrt[4]{5}) \vee (x = \sqrt[4]{5})$

(f) $x^3 = -3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-3}$

(i) $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 2)$

(k) $(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = -1) \vee (x = 1)$

(l) $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$

(r) $\dfrac{x-2}{x+3} + \dfrac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow 2(x - 2) + x + 3 = 6(x + 3) \Leftrightarrow 3x - 1 = 6x + 18$
$\Leftrightarrow -3x = 19 \Leftrightarrow x = -19/3$

(u) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow (x - 2 = 2x + 1) \wedge (x - 2 \geq 0) \wedge (2x + 1 \geq 0)$
$\Leftrightarrow (x = -3) \wedge (x \geq 2) \wedge (x \geq -1/20)$

Equação impossível$^{(*)}$

(z) $x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = -4)$

(*): se as expressões nos dois membros puderem assumir valores complexos, não reais, a solução real é $x = -3$.

1.59 Exercício

Resolver as equações em ordem à variável indicada.

(a) $A = \dfrac{1}{2}(b_1 - b_2)h,\ \ h$ (b) $F = \dfrac{9}{5}C + 32,\ \ C$ c $F = \dfrac{a(b-c)}{d^2},\ \ c$

d $\log_5(x + 2) - \log_5(x - 2) = \dfrac{1}{2},\ \ x$ (e) $cb^x = a,\ \ b$ (f) $2\ln(3x) = 4,\ \ x$

(g) $C = A(2 + 0.2/m)^{mt},\ \ t$ (h) $\sqrt{x^2} = 2,\ \ x$ i $2/(b^{t-x}x) = a,\ \ t$

Resolução.

$(c)\ F = \dfrac{a(b-c)}{d^2} \underset{d\neq 0}{\Leftrightarrow} Fd^2 = ab - ac \Leftrightarrow ac = ab - Fd^2 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} c = b - \dfrac{Fd^2}{a}$

$(d)\ \log_5(x+2) - \log_5(x-2) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_5 \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-2} = 5^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x+2 = (x-2)\sqrt{5} \Leftrightarrow x(1-\sqrt{5}) = -2(1+\sqrt{5}) \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

$(i)\ \dfrac{2}{b^{t-x}x} = a \Leftrightarrow b^{t-x} = \dfrac{2}{ax} \Leftrightarrow t = x + \log_b\left(\dfrac{2}{ax}\right)$

1.60 Exercício

Resolver as equações.

a $\lvert x\rvert = 2$	(b) $\lvert -x\rvert = 2$	(c) $\lvert -x\rvert = -2$	d $\lvert x+1\rvert = 3$
(e) $\lvert x-1\rvert = 3$	f $\left\lvert x^2+1\right\rvert = 2x$	g $\lvert x+1\rvert = \lvert 2x-3\rvert$	(h) $\lvert x\rvert = x^2$

Resolução.

$(a)\ |x| = 2 \Leftrightarrow (x=-2) \vee (x=2)$

$(d)\ |x+1| = 3 \Leftrightarrow (x+1=-3) \vee (x+1=3) \Leftrightarrow (x=-4) \vee (x=2)$

$(f)\ \left|x^2+1\right| = 2x \Leftrightarrow \left[(x^2+1=-2x) \vee (x^2+1=2x)\right] \wedge (2x \geq 0)$

$\Leftrightarrow \left[(x^2+2x+1=0) \vee (x^2-2x+1=0)\right] \wedge (x \geq 0)$

$\Leftrightarrow \left[(x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}) \vee (x = \dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2})\right] \wedge (x \geq 0)$

$\Leftrightarrow \left[(x=-1) \vee (x=1)\right] \wedge (x \geq 0)$

$\Leftrightarrow x = 1$

$(g)\ |x+1| = |2x-3| \Leftrightarrow (x+1 = 2x-3) \vee (x+1 = -2x+3) \Leftrightarrow (x=4) \vee (x=2/3)$

1.61 Exercício

(a) Resolver a inequação e usar a notação de conjuntos para representar o conjunto de soluções obtido
$$\frac{x-2}{3} \leq 2x-2.$$
(b) Sem substituir na inequação, responder ao seguinte: o valor $x=-1$ é uma solução da inequação?

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{3} \leq 2x-2 &\Leftrightarrow x-2 \leq 6x+6 && \text{Multiplicar por 3 ambos os membros.}\\
&\Leftrightarrow x-6x \leq 6+2 && \text{Passar para o } 1^{\underline{o}} \text{ membro os termos com } x.\\
&\Leftrightarrow -5x \leq 8 &&\\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{8}{5} && \text{Dividir por } -5 \text{ ambos os membros}
\end{aligned}$$

Representação do conjunto solução: $[-\frac{8}{5}, +\infty[$.

(b) O valor $x = -1$ é uma solução da inequação porque pertence ao conjunto de soluções, ou seja

$$-1 \in [-\frac{8}{5}, +\infty[.$$

Isto significa que se substituirmos -1 na variável da inequação se obtém uma desigualdade verdadeira

$$\frac{(-1)-2}{3} > 2(-1)-2 \Leftrightarrow -3 > -4.$$

1.62 Exercício

(a) Resolver a inequação

$$\frac{4x+1}{5} \geq 6 - \frac{x}{3}.$$

(b) Sem substituir na inequação, responder ao seguinte: o valor $x = 2$ é uma solução da inequação?

Resolução.

(a) Multiplicar ambos os membros pelo $mmc(3,5) = 15$, para eliminar as frações.
$\frac{4x+1}{5} \geq 6 - \frac{x}{3} \;\Leftrightarrow\; 3(4x+1) \geq 90 - 5x$

Passar para o $1^{\underline{o}}$ membro os termos com x.
$3(4x+1) \geq 90 - 5x \;\Leftrightarrow\; 12x + 5x \geq 87 \;\Leftrightarrow\; 17x \geq 8$

Dividir por 17 ambos os membros para obter o conjunto solução da inequação.
$17x \geq 8 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{8}{17}$

(b) O valor $x = 2$ é uma solução da inequação porque
- as inequações inicial $\left(\frac{4x+1}{5} \geq 6 - \frac{x}{3}\right)$ e final $\left(x \geq \frac{8}{17}\right)$ são equivalentes;
- Substituindo x por 2 na última destas inequações se obtém a desigualdade falsa $2 > 8/17$.

1.63 Exercício

Resolver as inequações em $\mathbb{R}$. Fazer a representação gráfica dos conjuntos solução sobre a reta real.

$(a)\ x \leq 1$	$(b)\ x \leq -1$	$(c)\ -x \leq 1$	d $-x \leq -1$
$(e)\ \frac{x}{3} - 4 > \frac{1}{3}$	f $\frac{x+1}{2} < 3x + \frac{2}{5}$	g $\frac{x-2}{3} < \frac{3x-2}{5} - 1$	h $\frac{x-2}{x-1} \leq 2$
i $x^2 < 2$	$(j)\ x^2 + 3x - 1 > 0$	k $x^2 + 3x - 1 < 0$	$(l)\ \lvert x\rvert < 2$
$(m)\ \lvert x\rvert \geq 2$	$(n)\ \lvert x-3\rvert < 1/2$	$(o)\ \lvert x-3\rvert < \lvert 2x-1\rvert$	p $\lvert -x-3\rvert > \lvert x-1\rvert$
q $x^2 + 1 < 0$	$(r)\ x^2 + 1 > 0$	$(s)\ 1 \leq \lvert x\rvert \leq 3$	$(t)\ 1 \leq \lvert x-2\rvert \leq 3$

Resolução.
Resolver as inequações em $\mathbb{R}$ significa determinar todas as soluções **reais** de cada uma delas.

$(d)\ -x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 1$ Conjunto solução: $[1, +\infty[$

$(f)\ \frac{x+1}{2} < 3x + \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5(x+1) < 30x + 4 \Leftrightarrow -25x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{25}$

Conjunto solução: $\left[\frac{1}{25}, +\infty\right[$

$(g)\ \sqrt{x+1} \geq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x+1 \geq 3x-2) \wedge (x+1 \geq 0) \wedge (3x-2 \geq 0)$

$\Leftrightarrow (-2x \geq -3) \wedge (x \geq -1) \wedge (x \geq \frac{2}{3}) \Leftrightarrow (x \leq \frac{3}{2}) \wedge (x \geq -1) \wedge (x \geq \frac{2}{3})$

Conjunto solução: $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$

$(h)\ \frac{x-2}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \{[(x-2) \leq 2(x-1)] \wedge (x-1 > 0)\} \vee \{[(x-2) \geq 2(x-1)] \wedge (x-1 < 0)\}$

$\Leftrightarrow \{[-x \leq 0] \wedge [x > 1]\} \vee \{[-x \geq 0] \wedge [x < 1]\} \Leftrightarrow (x > 1) \vee (x \leq 0)$

Conjunto solução: $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

$(i)\ x^2 < 2 \Leftrightarrow |x|^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Conjunto solução: $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(k) Determinamos as raízes da equação $x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

Como o coeficiente de x^2 na equação é positivo, a expressão $x^2 + 3x - 1$ é negativa para valores de x situad

Obtém-se: $x^2 + 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

Resolução alternativa da alínea (k):

$x^2+3x-1=0 \;\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}<0 \;\Leftrightarrow\; \left|x+\frac{3}{2}\right|^2<\frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow\; \left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{\sqrt{13}}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{\sqrt{13}}{2}<x+\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\Leftrightarrow\; -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}<x<-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$

Conjunto solução: $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

(p) $|-x-3|>|x-1|$

Vamos resolver a equação de duas formas.

1ª Forma: Podemos ter os seguintes casos, dependendo do valor de x:
(i) $(-x-3>0)$ e $(x-1>0)$;
(ii) $(-x-3>0)$ e $(x-1<0)$;
(iii) $(-x-3<0)$ e $(x-1>0)$;
(iv) $(-x-3<0)$ e $(x-1<0)$;
(v) excluimos o caso $(-x-3=0)$, dado que $(-x-3=0 \Leftrightarrow x=-3)$, que torna falsa a expressão da alínea (p);
(vi) mas contamos o caso $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$, que torna a expressão verdadeira. Notar que

$$\begin{aligned}
-x-3>0 \quad &\Rightarrow \quad |-x-3|=-x-3\\
-x-3<0 \quad &\Rightarrow \quad |-x-3|=x+3\\
x-1>0 \quad &\Rightarrow \quad |x-1|=x-1\\
x-1<0 \quad &\Rightarrow \quad |x-1|=-x+1.
\end{aligned}$$

Os primeiros quatro casos podem ser condensados nas expressões seguintes.

$$\begin{array}{ll}
(-x-3>x-1)\wedge(-x-3>0)\wedge(x-1>0) & (-x-3) \text{ e } (x-1) \text{ positivos}\\
(-x-3>-x+1)\wedge(-x-3>0)\wedge(x-1<0) & (-x-3) \text{ positivo, } (x-1) \text{ negativo}\\
(x+3>x-1)\wedge(-x-3<0)\wedge(x-1>0) & (-x-3) \text{ negativo, } (x-1) \text{ positivo}\\
(x+3>-x+1)\wedge(-x-3<0)\wedge(x-1<0) & (-x-3) \text{ e } (x-1) \text{ negativos}
\end{array}$$

Resolvendo-as obtemos

$$\begin{array}{l}
(x<-1)\wedge(x<-3)\wedge(x>1), \quad \text{Conjunção impossível}\\
(0>4)\wedge(x<-3)\wedge(x<1), \quad \text{Conjunção impossível}\\
(0>-4)\wedge(x>-3)\wedge(x>1) \Leftrightarrow x>1\\
(x>-1)\wedge(x>-3)\wedge(x<1) \Leftrightarrow -1<x<1
\end{array}$$

Destes dois últimos casos e do caso (vi) acima, concluimos que o conjunto solução da inequação é $(-1,+\infty)$.

2ª Forma

$$
\begin{aligned}
|-x-3| > |x-1| &\Leftrightarrow |x+3| > |x-1| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} > \sqrt{(x-1)^2} \\
&\Leftrightarrow (x+3)^2 > (x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+6x+9 > x^2-2x+1 \\
&\Leftrightarrow 8x > -8 \\
&\Leftrightarrow x > -1
\end{aligned}
$$

O conjunto solução da inequação é $(-1, +\infty)$.

(q) $x^2+1<0 \Leftrightarrow x^2<-1$, inequação impossível em $\mathbb{R}$

2.1. Problemas de Aritmética e Equações

Coleção de problemas cuja resolução a operações aritméticas, equações e inequações

1.64 Exercício

Sem utilizar um esquema de 'regra de três simples', resolver o seguinte problema. 3 quilogramas de batatas custam 2.25 euros. (a) Qual o custo de 1 quilograma de batatas? (b) Quantos quilogramas de batatas se compram com 1 euro?

1.65 Exercício

A figura 7 representa dois segmentos de reta, com medidas D e d.
(a) $D \div d \approx$?
(b) $\frac{d}{D} \approx$?

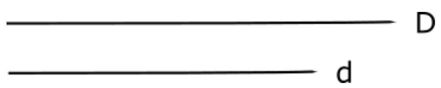

Figura 7

1.66 Exercício

Um vendedor ambulante vende os seus produtos obtendo um lucro de 35%. Se no fim do dia tiver recebido 875€em vendas, qual o numerário correspondente ao seu lucro?

Resolução.
Seja P o preço dos produtos adquiridos pelo vendedor, $V = 875$ euros o dinheiro encaixado em vendas e L o lucro. Então $L = V - P = 875 - P$. Dizer que o lucro é de 35% é o mesmo que dizer que há um ganho de 35% sobre o preço de compra, P. Então $L = 35\%P = 0.35P$. Igualando as duas expressões obtidas para L temos $0.35P = 875 - P$. Resolvendo esta

equação em ordem a P obtemos $P = 875/1.35$. Finalmente, obtemos para o lucro $L = 875 - P = 875 - 875/1.35 \approx 227$ euros.

1.67 Exercício

Depois de haver comprado duas bicicletas, uma pessoa vendeu cada uma delas por 600€. Numa das vendas obteve um prejuízo de 20% e na outra um lucro de 20%. Qual foi o balanço global das transacções?[prejuízo de 50€]

1.68 Exercício

Um xarope para tosse contém 10 mg de dextrometorfan hidrobromida por cada 5 ml do produto. Quantos miligramas do fármaco recebe um paciente que siga a posologia de 8 ml de xarope, 3 vezes ao dia durante 4 dias? Solução: [192 mg]

1.69 Exercício

Se 20 ml de ácido sulfúrico têm a massa de 32 g, qual a densidade específica do ácido, em gramas por centilitro? Solução: [16 g/cl]

1.70 Exercício

Três torneiras iguais enchem uma piscina em 21 horas. Em quanto tempo é que duas dessas torneiras enchem a piscina?

Resolução.
A resolução tem as considerações e os passos seguintes.

- Procuramos uma expressão que nos dê a quantidade de água, em litros, despejada por duas torneiras, em função do tempo t, em horas.
- Começamos por obter essa expressão para uma só torneira. Se o volume do tanque for de V litros, então cada torneira debita $V/3$ litros de água em 21 horas. O débito d em litros/hora de cada torneira, que supomos constante, é $d = V/(3 \times 21) = V/63$.
- Portanto, em t horas cada torneira despeja $(V/63)t$ litros de água no tanque.
- Se funcionarem duas torneiras em simultâneo, a quantidade de água despejada em t horas é $2(V/63)t$.
- O tempo necessário para duas torneiras encherem o tanque, é o necessário para que o volume de água por elas despejado iguale o volume V do tanque.
- Traduzindo matematicamente esta ideia, o tempo que procuramos é a solução da equação linear $2(V/63)t = V$.

$$2(V/63)t = V \Leftrightarrow 2t/63 = 1 \Leftrightarrow t = 31.5 \text{ horas.}$$

1.71 Exercício

Um relógio adianta-se 5 minutos/dia, enquanto outro se atrasa 3 minutos/dia. Se forem acertados simultaneamente, passadas quantas semanas a diferença entre os tempos marcados é de uma hora? Solução: [$\approx$ 1 semana]

1.72 Exercício

Um pedreiro pode construir uma parede em 30 horas. Cada um dos dois aprendizes pode fazê-lo em 40 horas. Quantas horas são necessárias para os três trabalhadores construam o muro juntos?
Solução: [12 horas]

1.73 Exercício

Se um número de 2 dígitos for multiplicado pela soma de seus dígitos, obtém-se 1666. O algarismo das dezenas é uma unidade maior que o algarismo das unidades. Qual é o número? Solução: [98]

1.74 Exercício

Um copo de vidro de forma cilíndrica, com $2cm$ de raio, contém água. Em duas horas o nível da água baixa $1mm$, por evaporação. Calcular a taxa de evaporação da água em gramas por hora (a densidade da àgua a 25^o é de 997 kg/m^3). Solução: [$\approx 0.6g/hora$]

1.75 Exercício

O raio r de um círculo aumenta à taxa constante de um metro por minuto. Calcular a taxa de variação da área do círculo com o tempo. Solução: [$\pi(2r+1)$]

Resolução.
A resolução tem as considerações e os passos seguintes.

- Por taxa de variação da área com o tempo, vamos considerar a variação da área por minuto.
- A área de um círculo de raio r metros é dada por πr^2 metros quadrados.
- Se num dado instante a medida do raio for r metros, passado 1 minuto ela é $r+1$ metros.
- A variação de área correspondente é

$$\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2\pi r + 1) - \pi r^2 = \pi(2r+1).$$

A resposta a este problema é então $\pi(2r+1)$. Como o raio aumenta com o tempo, a variação de área por unidade de tempo também aumenta com o tempo (figura 8).

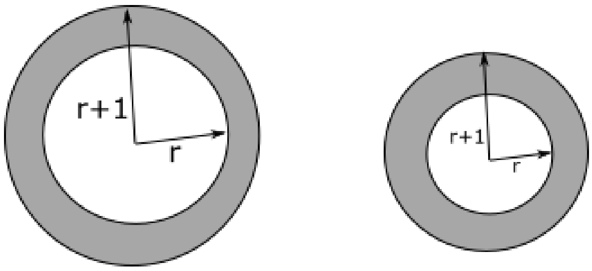

Figura 8

1.76 Exercício

Uma torneira enche um tanque de $2\,m^3$ em $2\,h$, enquanto outra leva $3\,h$ para o mesmo efeito. Se as duas torneiras forem abertas simultaneamente, qual o tempo necessário para encher o tanque? Qual a resposta ao problema se o tanque tiver $4\,m^3$ de capacidade, em vez de $2\,m^3$, mantendo-se os tempos que as torneiras levam a enchê-lo? Solução: [$1h12min$ nos dois casos]

1.77 Exercício

48 funcionários produzem uma certa quantidade de produto em 42 dias. Quantos funcionários são necessários para produzir a mesma quantidade de produto em 28 dias? Escrever uma fórmula que relacione o número y de funcionários com o número x de dias. Solução: [72] funcionários

1.78 Exercício

Um automóvel custa 30000€ e desvaloriza-se à taxa de 10% ao ano.

(a) Qual o valor do automóvel n anos após a sua compra?

(b) Ao fim de quantos anos o automóvel vale 15000€?

(c) Qual deve ser a taxa de desvalorização de modo que, cinco anos após a compra, o automóvel valha 25000€?

Resolução. O significado da desvalorização do automóvel está esquematizado na figura 9.

(a) Para responder à alínea (a) temos que obter uma fórmula para $\mathrm{v}(n)$, que nos dê o valor do automóvel n anos após a sua compra. Fazendo $\mathrm{v}(0) = 30000$€ , vamos calcular $\mathrm{v}(1)$, $\mathrm{v}(2)$, $\mathrm{v}(3)$, e daí deduzir uma fórmula para $\mathrm{v}(n)$.

$$\begin{array}{lll} n = 1 & \mathrm{v}(1) = \mathrm{v}(0) - 10\%\mathrm{v}(0) = 0.9\mathrm{v}(0) \\ n = 2 & \mathrm{v}(2) = \mathrm{v}(1) - 10\%\mathrm{v}(1) = 0.9\mathrm{v}(1) = 0.9^2\mathrm{v}(0) \\ n = 3 & \mathrm{v}(3) = \mathrm{v}(2) - 10\%\mathrm{v}(2) = 0.9\mathrm{v}(2) = 0.9^3\mathrm{v}(0) \end{array}$$

Por ser $\mathrm{v}(1) = 0.9v(0)$, $\mathrm{v}(2) = 0.9^2v(0)$, $\mathrm{v}(3) = 0.9^3v(0)$, podemos escrever $\mathrm{v}(n) = 0.9^n v(0) = 0.9^n \times 30000$. A a fórmula pretendida para o valor do automóvel n anos após a sua compra é $v(n) = 0.9^n \times 30000$.

(b)

$$
\begin{aligned}
15000 &= 30000 \times 0.9^n \Rightarrow 0.5 = 0.9^n \Rightarrow \log_{10}(0.5) = n \log_{10}(0.9) \\
&\Rightarrow n = \frac{\log_{10}(0.5)}{\log_{10}(0.9)} \approx 6.6 \text{ anos}
\end{aligned}
$$

(c) A taxa de desvalorização no enunciado é de 10%. Pretendemos saber que outra taxa de desvalorização deve vigorar de modo a ser v(5) = 25000. Seja t essa taxa de desvalorização. Se resolvermos a alínea (a) trocando 10% por t, obtemos $\text{v}(n) = (1-t)^n \times 30000$. Resta calcular t sabendo que v(5) = 25000.

$$
\begin{aligned}
25000 &= (1-t)^5 \times 30000 \Rightarrow \frac{5}{6} = (1-t)^5 \Rightarrow 1 - t = \sqrt[5]{\frac{5}{6}} \\
&\Rightarrow t = 1 - \sqrt[5]{\frac{5}{6}} \\
&\Rightarrow t \approx 0.036 = 3,6\%.
\end{aligned}
$$

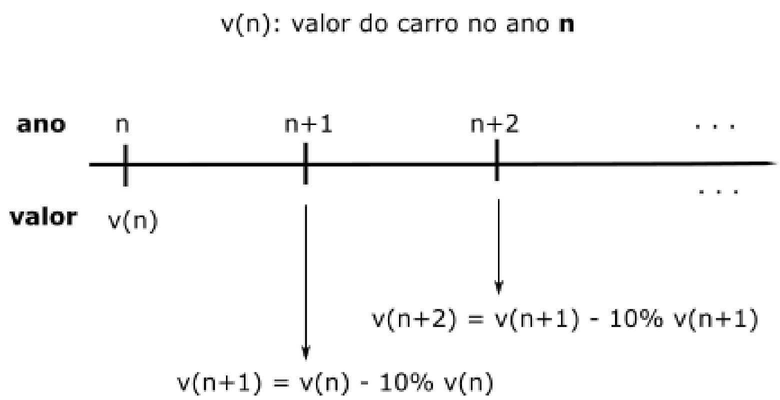

Figura 9

1.79 Exercício

Um agricultor dispõe de uma cerca de 100 m de comprimento com a qual pretende delimitar uma horta rectangular. Quais as dimensões do rectângulo, sabendo que a área deve ser superior a 600 m^2? Solução: [$20\ m < \textit{comprimento} < 30\ m$; $\textit{largura} = 100 - \textit{comprimento}$]

1.80 Exercício

A população mundial era de aproximadamente 6.9 mil milhões de pessoas no início do ano de 2011, crescendo 76 milhões de pessoas durante esse ano. Supondo que esta taxa de crescimento se mantém constante, responder ao seguinte.

(a) Fazer uma estimativa da população mundial no ano de 2050.

(b) Fazer uma estimativa do ano em que a população terá um valor duplo do seu valor no ano de 2011.

Solução: [(a) $\approx 10.6 \times 10^6$ pessoas; (b) ≈ 2074]

3. Trigonometria

A trigonometria é uma área fundamental da matemática. Trata do estudo das relações entre os ângulos e os comprimentos dos lados de triângulos.

As suas aplicações na engenharia são vastas. Na Engenharia Civil é usada para calcular distâncias, alturas e ângulos em projetos de construção, bem como na análise estrutural, no dimensionamento de vigas, e no estudo de forças que atuam sobre as estruturas. Na Engenharia Eletrotécnica é usada na análise de circuitos de corrente alternada, fundamentais para o funcionamento de sistemas de transmissão de energia. Na Engenharia Biomédica, a trigonometria desempenha um papel importante nas áreas que envolvem modelação de sistemas biológicos, processamento de imagens médicas e análise de sinais.

1.81 Exercício

No esquema da figura 10 indicar os segmentos correspondentes a $sin(\theta), cos(\theta), tan(\theta), cot(\theta), sec(\theta), csc(\theta)$.

Resolução. $sin(\theta) = AB$, $tan(\theta) = CD$, $csc(\theta) = OF$.

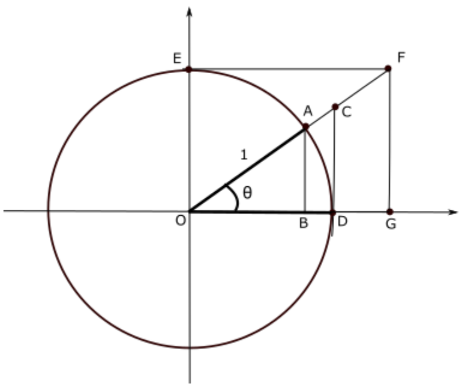

Figura 10

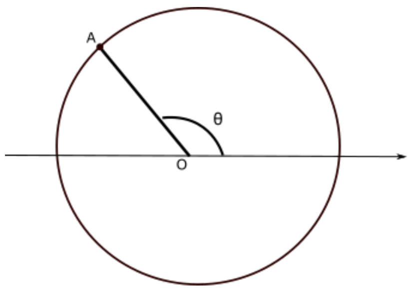

Figura 11

1.82 Exercício

No esquema da figura 11 marcar os segmentos correspondentes a $sin(\theta), cos(\theta), tan(\theta), cot(\theta), sec(\theta), csc(\theta)$.

1.83 Exercício

Nos esquemas da figura 12 determinar os ângulos em falta.

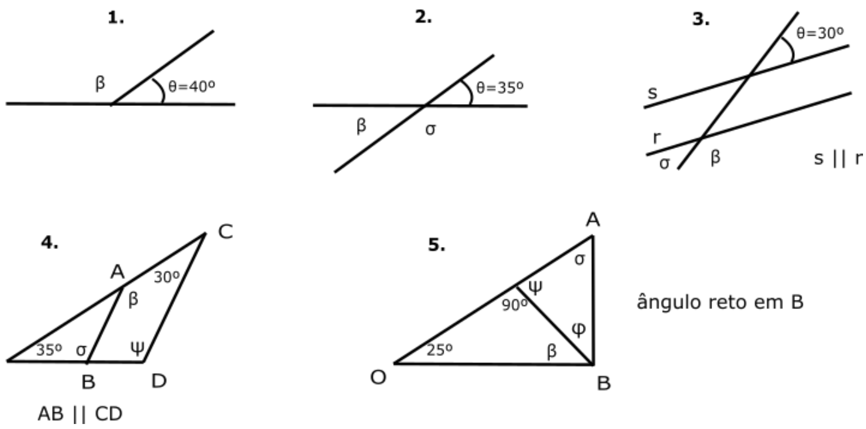

Figura 12

1.84 Exercício

Determinar as medidas dos lados e as medidas dos ângulos dos triângulos na figura 13

Resolução.
(2) $a = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\beta, \Theta : 5cos(\theta) = 4 \Rightarrow cos(\theta) = 4/5 \Rightarrow \theta = cos^{-1}(4/5) \approx 36.9^o$$
$$\beta = 90^o - \theta \approx 90^o - 36.9^o = 53.1^o$$

(5)

$$a : a^2 = 7^2 + 6^2 - 2cos(110^o) \approx 9.26$$
$$\beta, \Theta : acos(\theta) = 7 + 6cos(70^o) \Rightarrow cos(\theta) = (7 + 6cos(70^o))/a \approx 0.977 \Rightarrow \theta \approx cos^{-1}(0.977) \approx 12.1^o$$
$$\beta \approx 180^o - 110^o - 12.1^o = 57.9^o$$

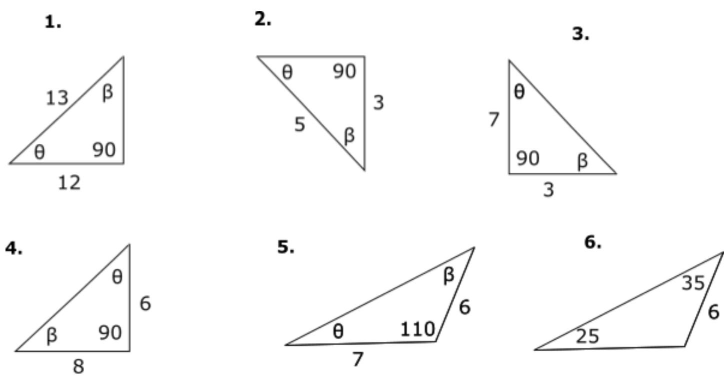

Figura 13

1.85 Exercício

Calcular o seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante, co-secante dos ângulos β dos triângulos rectângulos da figura 13, sem usar os valores dos ângulos.

Resolução. 1

O tipo de resolução que se segue só é válido por os ângulos θ e β serem complementares, i.e. $\theta + \beta = 90^o$. Não se aplica aos casos 5 e 6.

$$cos(\theta) = \frac{12}{13} \approx 0.98 \qquad sin(\beta) = cos(\theta)$$
$$sin(\theta) = cos(\beta) = \sqrt{1 - cos^2(theta)} = \sqrt{1 - (12/13)^2} \approx 0.38 \qquad cos(\beta) = sin(\theta)$$
$$tan(\theta) = sin(theta)/cos(\theta) \approx 0.38/0.98 \approx 0.39 \qquad ctg(\beta) = tan(\theta)$$
$$ctg(\theta) = cos(theta)/sin(\theta) = 1/tan(\theta) \approx 1/0.39 \approx 2.56 \qquad tan(\beta) = ctg(\theta)$$
$$sec(\theta) = 1/cos(theta) \approx 1/0.98 \approx 1.02 \qquad csc(\beta) = sec(\theta)$$
$$csc(\theta) = 1/sin(theta) \approx 1/0.38 \approx 2.63 \qquad sec(\beta) = csc(\theta)$$

1.86 Exercício

Calcular x.

$(a)\ arcsin(x) = 15°$ $\quad (b)\ arccos(x) = 62°$ $\quad (c)\ arctan(x) = -15°$ $\quad (d)\ arcsec(x) = 25°$

1.87 Exercício

Determinar as medidas dos ângulos na figura 14. Determinar as medidas dos lados dos triângulos, sendo, nos dois casos, $AB = 2\ m$.

Resolução.
1

$$\alpha, \beta, \Theta : \quad \alpha = 25^o \quad \theta = 65^o$$
$$AC,\ BC : \quad AC = AB\,cos(20^o) \approx 1.88\ m \quad BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \approx 0.68\ m$$

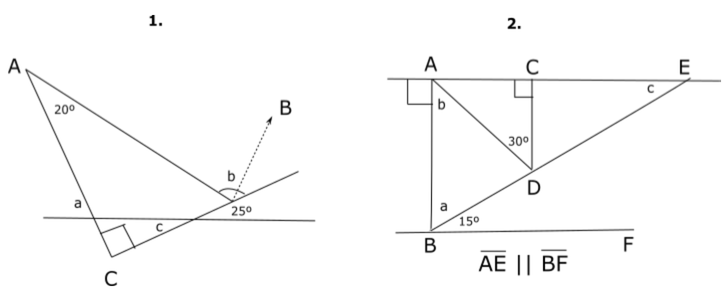

Figura 14

1.88 Exercício

A sombra de uma pessoa com 1.70 m de altura, produzida pela da luz do sol, é de 2 m (figura 15). No mesmo local e instante, a sombra de um prédio cuja altura é a medida do segmento AB, é de 23 m. Supondo que a altura de um andar é de aproximadamente 3 m, quantos andares acima do solo tem o prédio? Solução: [$\approx$ 6 andares]

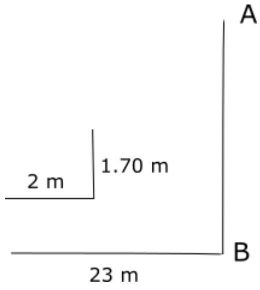

Figura 15

1.89 Exercício

Determinar as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos na figura 16.
[fig esqda: $a \approx 27.3^o$; $x \approx 4.1\ m$; fig drta: $a \approx 85.6^o$; $x \approx 3.48\ m$]

Resolução. (2) Determinar α, β:
Usamos a lei dos senos.

$$\frac{2}{sin(35^o)} = \frac{3}{sin(\beta)}$$
$$\Rightarrow sin(\beta) = \frac{3sin(35^o)}{2} \approx 0.86$$
$$\Rightarrow \beta \approx sin^{-1}(0.86) \approx 59.4^o$$

$$\alpha = 180^o - 35^o - \beta \approx 145^o - 59.4^o = 85.6^o$$

Determinar a medida AC:
Usamos a lei dos senos.

$$\frac{AC}{sin(85.6^o)} \approx \frac{2}{sin(35^o)}$$
$$\Rightarrow AC \approx \frac{2sin(85.6^o)}{sin(35^o)} \approx 3.48\ m$$

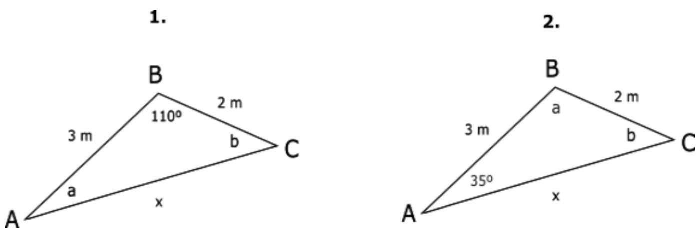

Figura 16

1.90 Exercício

Determinar as medidas dos ângulos e lados incógnitos nas figuras seguintes.

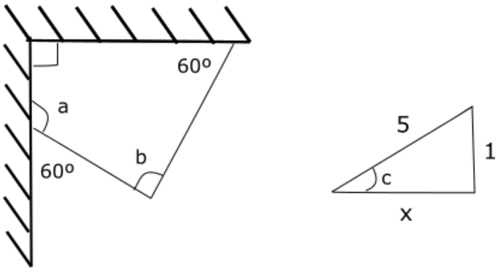

Figura 17

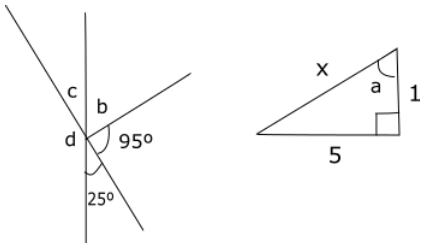

Figura 18

1.91 Exercício

Determinar as áreas dos elementos geométricos da figura 19. No caso da figura 5 indicar previamente as dimensões necessárias para o cálculo.

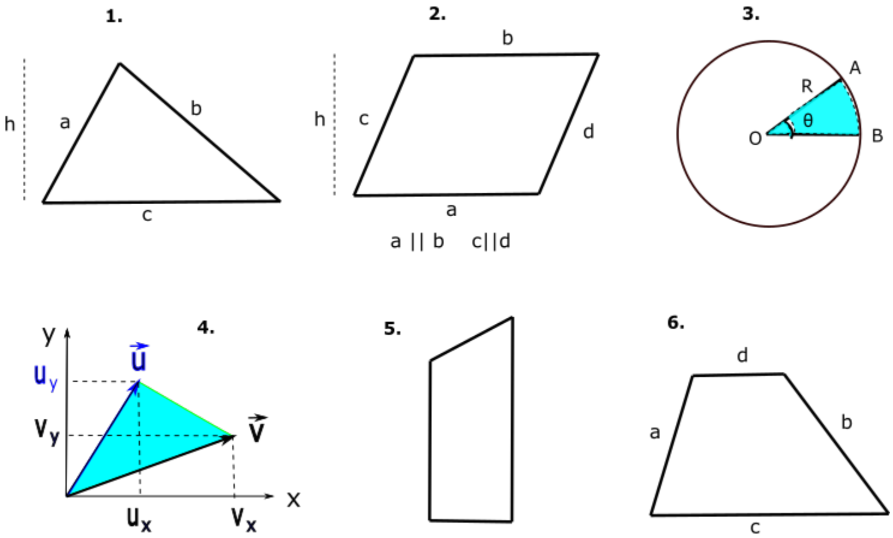

Figura 19

1.92 Exercício

A distância entre os centros de dois círculos tangentes é de 12 cm. A soma das suas áreas é 80π cm^2. Determinar os raios de ambos os círculos.
4 cm e 12 cm

1.93 Exercício

Um depósito de água com a forma de paralelepípedo contém 1500 hectolitros de água. A altura da água no depósito é de 2.5 m. Um dos lados da base é 4 m maior que o outro. Determinar as dimensões do retângulo inferior.

1.94 Exercício

O raio de um cilindro é 2 cm menor que sua altura, sendo a área da sua superfície 7.04 dm^2. Determinar o volume do cilindro.

1.95 Exercício

Na figura 20 a reta r é tangente à circunferência C no ponto T.
(a) Calcular OP em função de R e θ.
(b) Mostrar que $OP = TP$.
(c) Se o ponto O for a origem de um referencial cartesiano, determinar as coordenadas do ponto de tangência T.

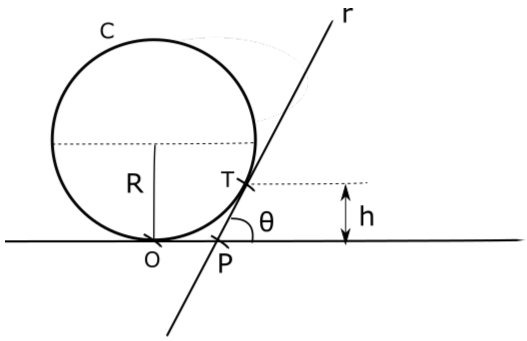

Figura 20

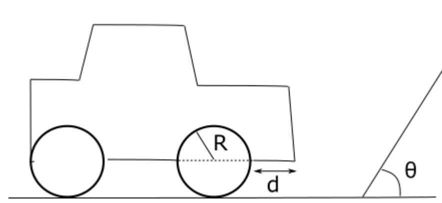

Figura 21

1.96 Exercício

Calcular o valor máximo de d (figura 21) de modo que o automóvel possa subir a rampa.

4. Equação da Reta no Plano

A equação da reta é uma forma matemática de descrever linhas no espaço, importante para a resolução de problemas em diversas disciplinas. Na Engenharia Civil é utilizada para projetar e analisar estruturas como pontes e edifícios. Permite modelar e entender as linhas de força e as seções transversais das estruturas, e ajuda a determinar o alinhamento e a inclinação das ruas, ferrovias e outros componentes lineares das construções. Na Engenharia Elétrica a equação da reta é usada para modelar as respostas de componentes e circuitos elétricos. Na Engenharia Biomédica a equação da reta é utilizada para ajustar dados experimentais e intervém na modelação de comportamentos lineares em sistemas biológicos e na implementação de dispositivos médicos, como sensores e próteses.

1.97 Exercício

Indicar as coordenadas dos pontos do plano marcados na figura 22.

Resolução. G: $(-6, 4)$ E: $(5, 0)$ F: $(0, -3)$

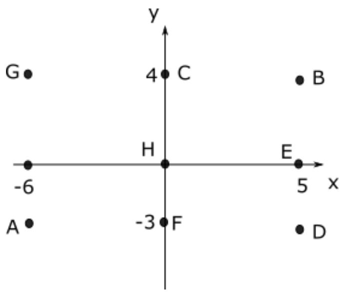

Figura 22

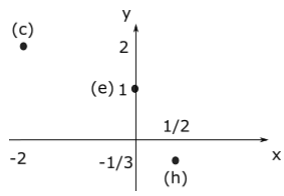

Figura 23

1.98 Exercício

Marcar os pontos no plano cartesiano.

(a) $(2, 2)$	(b) $(-2, -2)$	(c) $(-2, 2)$	(d) $(2, -2)$
(e) $(0, 1)$	(f) $(1, 0)$	(g) $(0, 0)$	(h) $(1/2, -1/3)$

Resolução. Ver figura 23.

1.99 Exercício

Mostrar que se as retas $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$ são perpendiculares, com declives m_1 e m_2 não nulos, então $m_1 = -1/m_2$.

1.100 Exercício

Escrever as equações das rectas esboçar os seus gráficos.

(a) Não contém o ponto $(-1, 2)$.

(b) Contém o ponto $(3, 1)$.

(c) Contém os pontos $(1, 2)$, $(-9, 1/3)$.

(d) Contém os pontos $(-3/2, 1/7)$, $(-3/2, 1/2)$.

(e) Contém os pontos $(-3/2, 1/7)$, $(3, 1/7)$.

(f) Tem declive $m = -3$ e contém o ponto $(-2, -2)$.

(g) Contém o ponto $(-3/2, 1/7)$ e é paralela à recta $y = 2x - 3$.

(h) Contém o ponto $(-3/2, 1/7)$ e é perpendicular à recta $y = 2x - 3$.

(i) Tem a equação $y = 4x + b$ e contém o ponto $(1, 2)$.

Resolução.

(c) Calcular o declive da reta, m.

$$m = \frac{2 - 1/3}{1 - (-9)} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

A equação da reta é $y = \frac{5}{30}x + b$, a menos do termo b. Calculamos agora o termo de deslocamento b. Uma vez que o ponto $(1, 2)$ pertence à reta, as suas coordenadas devem satisfazer a equação desta. Esta condição permite determinar b.

$$2 = \frac{1}{6}1 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{6}.$$

A equação da reta é $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$.

(d) A equação desta reta não tem a forma $y = mx + b$, uma vez que os dois pontos fornecido têm a mesma abcissa, o que nos impede de definir m. A equação, neste caso, é simplesmente $x = -3/2$.

(e) Neste caso os pontos fornecidos têm a mesma ordenada, $1/7$. Trata-se de uma reta com $m = 0$ (verificar!) e $b = 1/7$. A sua equação é $y = 1/7$.

1.101 Exercício

Associar, se possível, cada uma das equações às retas da figura 24.

$(a)\ y = 2x + 1$	$(b)\ y = 2x + 2$	$(c)\ y = x + 2$	$(d)\ x = 2$
$(e)\ y = -x + 1$	$(f)\ x = -2$	$(g)\ y = 1$	$(h)\ y = 1$

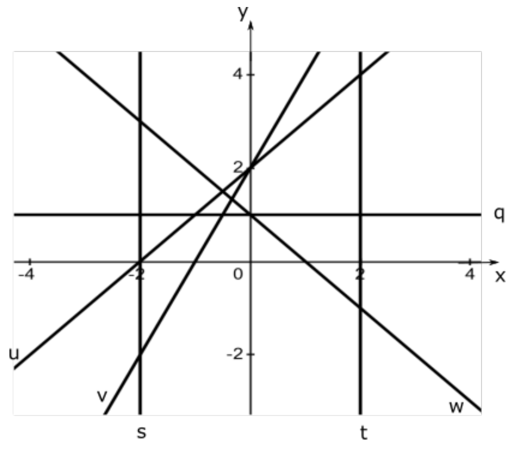

Figura 24

1.102 Exercício

Para cada caso, calcular a taxa de variação fixa de y com x. Esboçar o gráfico da função linear correspondente $y = f(x)$.

(a) Uma torneira despeja 30 litros de água em cada 2.5 minutos num tanque inicialmente vazio. (y: litros de água no tanque; x: tempo em minutos)

(b) Uma torneira despeja 30 litros de água (y) em cada 2.5 minutos (x) num tanque que, inicialmente, contém 10 litros de água. (y: litros de água no tanque; x: tempo em minutos)

(c) Um automóvel percorre 280 quilómetros (y) em 3 horas (x), com velocidade constante.

(d) Um automóvel inicialmente à distância de 27 quilómetros do ponto A, aproxima-se deste ponto à mesma velocidade constante do automóvel da alínea anterior.

(e) Num centro de saúde são atendidas 363 pessoas em cada 18 dias.

(f) Vivem em média 3.5 pessoas por habitação, numa dada cidade.

(g) São necessários 10 gramas de um produto para produzir 2.8 gramas de outro produto.

Resolução. *Taxa* de variação de y com x, significa *ritmo* de variação de y com x, e é o resultado da divisão

$$\frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x}.$$

(a) y é a quantidade de água despejada pela torneira, em litros, num certo período de tempo, x, em minutos. Supõe-se que y e x são diretamente proporcionais. A taxa de variação de y com x é a quantidade de litros de água despejados pela torneira em cada minuto. Designamos esta taxa por m,

$$m = \frac{30\, litros}{2.5\, minutos} = 12\, litros/minuto.$$

A fórmula que relaciona y com x é $y = 12x$. Ela dá-nos a quantidade de água no tanque, x minutos depois de a torneira ser aberta. O gráfico desta função é a reta à esquerda na figura 25.

(b) y é a quantidade de água no tanque x minutos depois de a torneira ser aberta. Como no momento dea abertura da torneira o tanque contém já 10 litros de água, e a torneira despeja água à taxa calculada na alínea anterior, a fórmula que relaciona y com x é $y = 12x + 10$. O seu gráfico é a reta (paralela à anterior) na direita na figura 25).

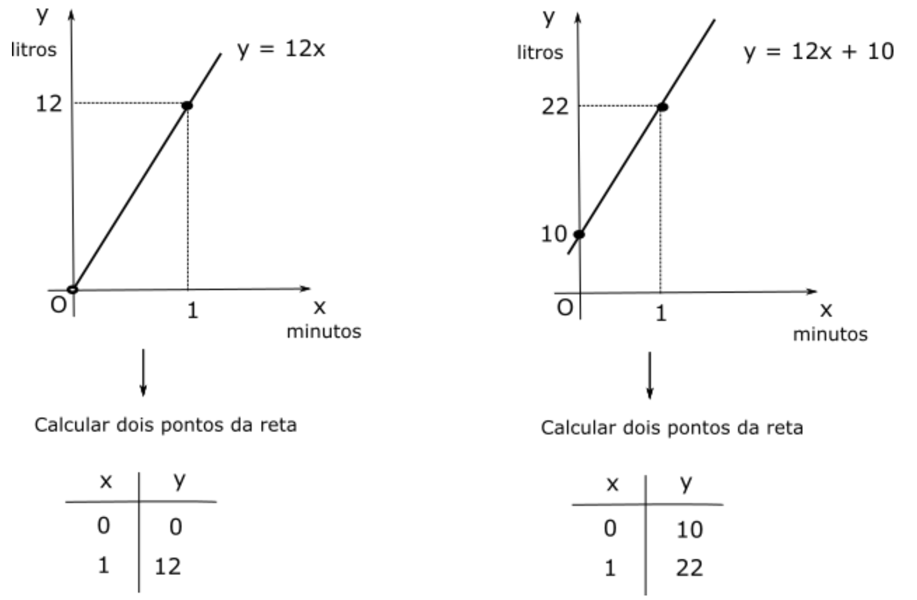

Figura 25

1.103 Exercício

O aluguer de um carro custa 40€/dia de taxa fixa, além de 0.75€ por cada quilómetro percorrido. Um cliente aluga o carro por 6 dias e não quer gastar mais de 500€. Qual o número máximo de quilómetros que pode percorrer? Escrever a fórmula $y = f(x)$ sendo x o número de quilómetros percorridos e y o custo em euros. [$\approx 347\ km$]

1.104 Exercício

Qual a informação que não é fornecida diretamente no seguinte enunciado, mas que é necessária para a resolução do problema? "12 unidades de um produto custam 36 euros. Qual o custo de 6 unidades do produto?". Escrever a fórmula $y = f(x)$ que relaciona o custo y, em euros, com o número x de unidades.