

Sebenta de Cálculo I

Capítulo 5. Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Bragança, Janeiro de 2022
Mário Abrantes

Matérias do Capítulo 5

5 Funções reais de duas variáveis reais	4
1 Introdução	4
2 Sequências de pontos no plano	4
3 Limites de funções. Funções contínuas	5
4 Representação gráfica de funções no espaço	7
5 Curvas de nível	11
6 Derivadas parciais	12
6.1 Derivadas parciais de segunda ordem	15
6.2 Derivação da função composta (regra da cadeia)	16
7 Problemas de optimização	17
7.1 Classificação dos pontos críticos	18

Capítulo 5

Funções reais de duas variáveis reais

1 Introdução

Até agora estudamos funções reais com uma só variável independente, $y = f(x)$. Neste capítulo vamos fazer um breve estudo de funções reais de duas variáveis independentes, $z = f(x, y)$.

2 Sequências de pontos no plano

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais, (x, y) , representa-se por $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ são $(\sqrt{2}, 1)$, $(0, 0)$ e $(-2/3, \pi)$. A cada ponto do plano xy , corresponde um par ordenado de números reais (a, b) , pertencente a $\mathbb{R}^2$, dizendo-se a e b as *coordenadas do ponto*. No seguimento, por simplicidade, referimo-nos aos pares ordenados de números reais por ‘pontos’.

Uma sequência de pontos no plano corresponde a uma infinidade ordenada de pares de números reais

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

sendo (x_n, y_n) o *termo geral* da sequência (um par de expressões na variável n). Substituindo n por um número inteiro positivo, k , obtém-se o termo de ordem k da sequência. O conjunto ordenado formado por todos os termos da sequência representa-se por $((x_n, y_n))$.

Exemplo 1. Na figura 1 estão representados os primeiros três termos da sequência de termo geral $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$:

$$(1, 0), (1/2, 0), (1/3, 0), \dots$$

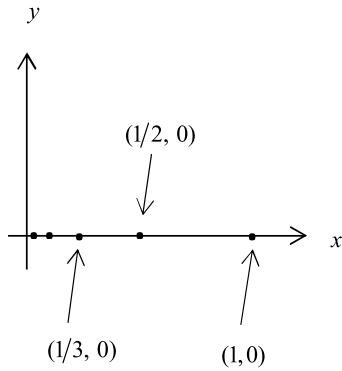


Figura 1: Alguns pontos da sequência $((x_n, y_n))$.

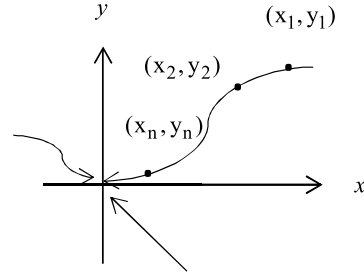


Figura 2: Uma sequência de pontos do plano, $((x_n, y_n))$, pode convergir para um ponto segundo diferentes trajetórias.

É imediato verificar que se fizermos $n \rightarrow \infty$ os pontos marcados se aproximam da origem do referencial $(0, 0)$, situando-se sucessivamente a uma distância deste que tende para zero. Escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n, 0) = (0, 0).$$

Vale a seguinte definição.

Definição 1. O ponto (a, b) diz-se limite da sequência (x_n, y_n) quando n tende para infinito, e escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b),$$

se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

No caso das sequências de números reais convergentes, (u_n) , os seus pontos situam-se sobre a recta real em torno do ponto limite da sequência. Já os termos de diferentes sequências convergentes de pontos no plano, $((x_n, y_n))$, podem aproximar-se do ponto do limite segundo diferentes direcções (figura 2).

3 Limites de funções. Funções contínuas

Dada uma função real de variáveis reais $f(x, y)$, define-se o seu *domínio natural* como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, (x, y) , para os quais a função está definida. O conjunto das imagens $f(x, y)$ de todos os pontos (x, y) do domínio da função, designa-se por *imagem* da função.

Exemplo 2. O domínio natural da função $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) , tais que $x - y \geq 0$, ou $x \geq y$ (porquê?). O ponto $(-2, 1)$ não pertence ao domínio da função. A imagem da função é $\mathbb{R}_0^+$ (porquê?).

Diz-se que o *limite de uma função* $f(x, y)$ no ponto (a, b) é L , e escreve-se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L,$$

se a sequência de valores da função $(f(x_n, y_n))$ tende para o número real L , qualquer que seja a sequência de pontos $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$ considerada.

Na figura 3 está representada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y > 0 \\ 1, & \text{noutros casos} \end{cases}$$

Esta função toma o valor 1 em todos os pontos do plano xy , excepto nos pontos do primeiro quadrante, nos quais toma o valor 0.

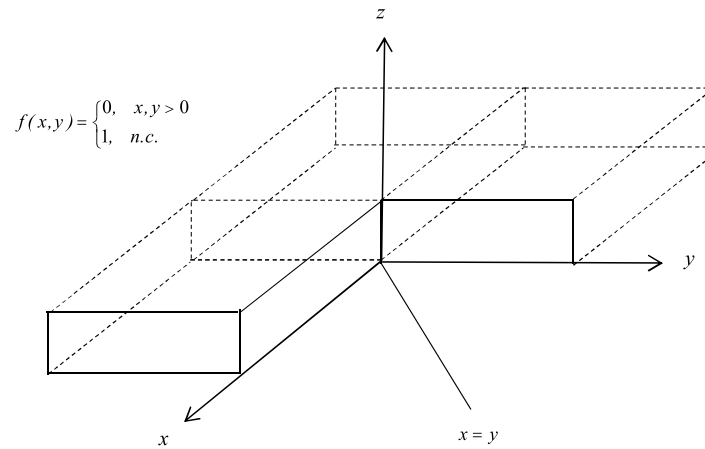


Figura 3

Podemos verificar que não existe o

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Se este limite existisse, teria que ser independente da sequência de pontos $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ escolhida. Acontece que se escolhermos uma sequência de pontos situados sobre o eixo dos xx , convergente para $(0, 0)$, por exemplo a sequência de termo geral $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1,$$

já que a função toma o valor 1 para todos os pontos desta sequência. No entanto, se escolhermos uma sequência de pontos situados sobre a recta $y = x$, convergente para $(0, 0)$, seja $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ o seu termo geral, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0,$$

já que a função toma o valor zero em todos os pontos desta sequência. Vale a seguinte definição.

Definição 2. Dizemos que uma função $f(x, y)$ é *contínua* no ponto (a, b) do seu domínio se, e somente se, para todas as sequências de pontos do domínio de $f(x, y)$ convergentes para (a, b) , se tem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Esta definição implica que, para que uma função $f(x, y)$ seja contínua num ponto (a, b) do seu domínio, não só deve existir o $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$, como o valor deste limite deve ser igual a $f(a, b)$.

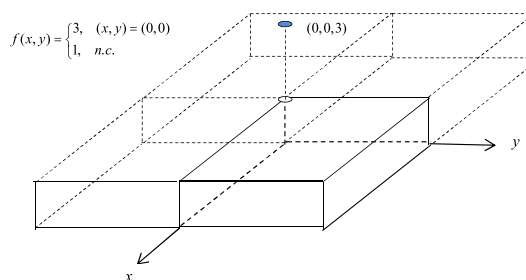


Figura 4

A função $f(x, y)$ representada na figura 3, não é contínua no ponto $(0, 0)$ porque, como se viu antes, não existe o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Já a função $f(x, y)$ representada na figura 4, não é contínua no ponto $(0, 0)$ porque, apesar de existir o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$, este não é igual ao valor da função no ponto $(0, 0)$, que é $f(0, 0) = 3$.

4 Representação gráfica de funções no espaço

A representação gráfica de funções de duas variáveis, $z = f(x, y)$, requer um referencial com três eixos que não estejam contidos no mesmo plano. Como dispomos apenas de uma folha de papel, ou de um écran de computador (ambos bidimensionais), o melhor que podemos fazer é simular profundidade visual nas figuras obtidas (figuras 5, 6). O sistema de referência xyz divide o espaço em 8 partes (figura 6), sendo cada uma delas designada por *octante*. O octante correspondente a $x, y, z > 0$ costuma designar-se por *primeiro octante*, não tendo os restantes octantes designações especiais.

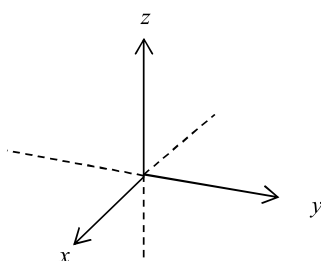


Figura 5

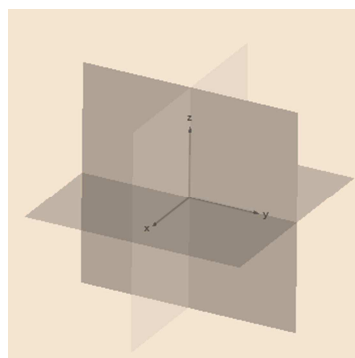


Figura 6

Seguem-se alguns exemplos de superfícies e curvas no espaço.

1. *Representação de um ponto, por exemplo $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.*

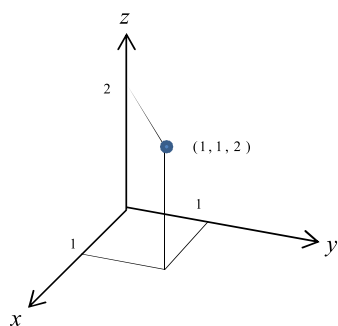


Figura 7: Ponto de coordenadas $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

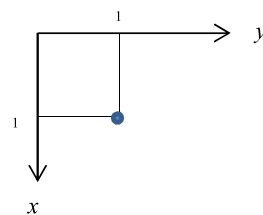


Figura 8: Projecção do ponto de coordenadas $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ no plano xy .

2. Representação de um plano.

A equação geral do plano é

$$ax + by + cz = d,$$

sendo a, b, c, d constantes.

Nas figuras 9 e 10 estão representados os planos de equações $x = 3$ (resulta da equação geral fazendo $a = 1, b = c = 0, d = 3$) e $z = 3$ (resulta da equação geral fazendo $a = b = 0, c = 1, d = 3$). O plano $x = 3$ contém todos os pontos do espaço da forma $(3, y, z)$. O plano $z = 3$ contém todos os pontos do espaço da forma $(x, y, 3)$.

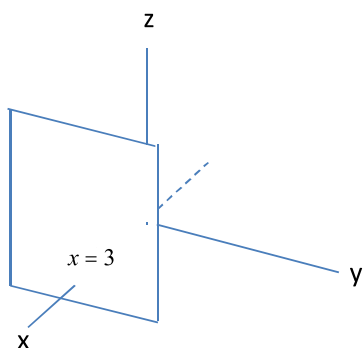


Figura 9: Plano de equação $x = 3$.

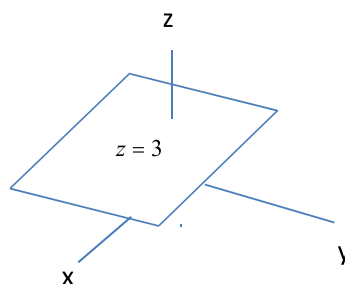
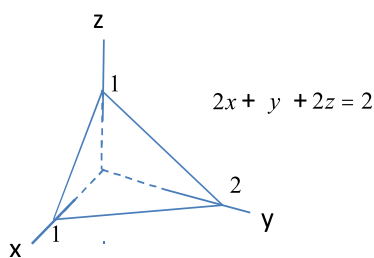


Figura 10: Plano de equação $z = 3$.

A figura 11 contém a parte do plano $2x + y + 2z = 2$ que se situa no 1º octante. Podemos determinar os pontos em que o plano intersecta os eixos coordenados. Fazendo na equação $x = y = 0$, obtemos $z = 1$; ficam determinadas as coordenadas do ponto $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, que corresponde à intersecção do plano com o eixo dos zz . Analogamente, fazendo na equação $x = z = 0$ determina-se o ponto de intersecção do plano com o eixo dos yy , $(x, y, z) = (0, 2, 0)$; fazendo na equação $y = z = 0$ determina-se o ponto de intersecção do plano com o eixo dos xx , $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

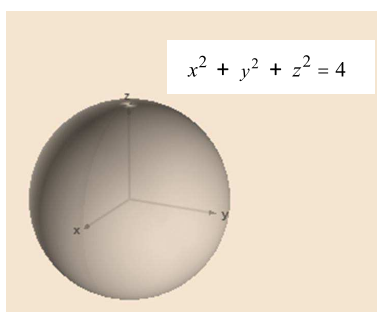
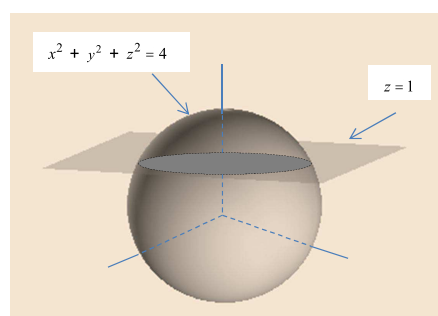
Figura 11: Plano de equação $2x + y + 2z = 2$.

3. Representação de uma esfera.

A equação geral de uma esfera no espaço, de centro no ponto (a, b, c) e raio r , é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

sendo a, b, c números reais.

Figura 12: Esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.Figura 13: Esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e plano de equação $z = 1$.

Na figura 12 está representada uma esfera de centro na origem do referencial xyz e raio 2. Na figura 13 representa-se a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $z = 1$. Os pontos comuns a estas duas superfícies são aqueles cujas coordenadas x, y, z satisfazem ambas as equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases},$$

e correspondem à circunferência representada na figura. Substituindo z por 1 na equação da esfera obtemos

$$x^2 + y^2 + 1^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3,$$

que representa a projecção dos pontos da circunferência de raio $\sqrt{3}$ no plano xy . Os pontos da circunferência satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}.$$

4. Representação de um elipsóide.

A equação geral de um elipsóide de centro na origem é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

sendo a, b, c números reais positivos (figura 14).

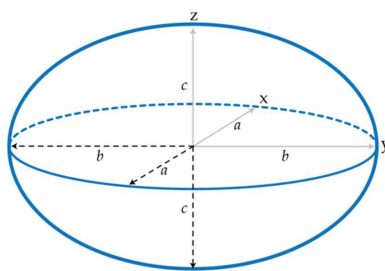


Figura 14: ¹

Uma esfera é um caso particular de elipsóide. Por exemplo, a esfera de centro na origem e raio r é um caso particular do elipsóide em que $a = b = c = r$. A equação geral de um elipsóide de centro no ponto (u, v, w) é

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} + \frac{(z-w)^2}{c^2} = 1.$$

5. *Representação de um cilindro de secção circular.*

Na figura 15 está representada a intersecção de um cilindro de secção circular $x^2 + z^2 = r^2$ com o plano $y = 1$, de que resulta a circunferência na figura 16

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

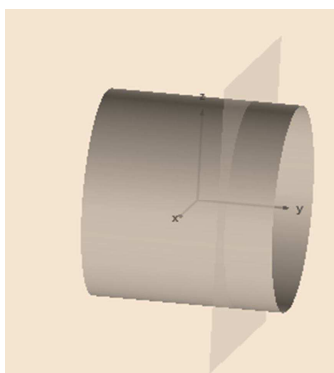


Figura 15: Cilindro de equação $x^2 + z^2 = r^2$ e plano de equação $y = 1$.

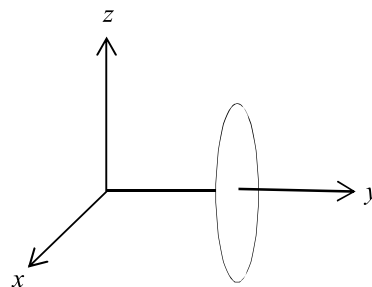


Figura 16: Intersecção do cilindro e do plano da figura anterior.

A equação do cilindro não envolve a variável y , o que significa que se variarmos a coordenada y de um ponto sobre o cilindro (deslocação paralela ao eixo dos yy), as coordenadas x, z não alteram os seus valores.

6. *Representação de um cone de secção circular.*

Na figura 17 está representado o cone de secção circular $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Apenas pontos com coordenada z não negativa podem satisfazer a equação, razão pela qual o gráfico está 'acima' do plano xy , à excepção do ponto $(0, 0, 0)$.

¹ <https://brilliant.org/problems/a-charged-ellipsoid/>.

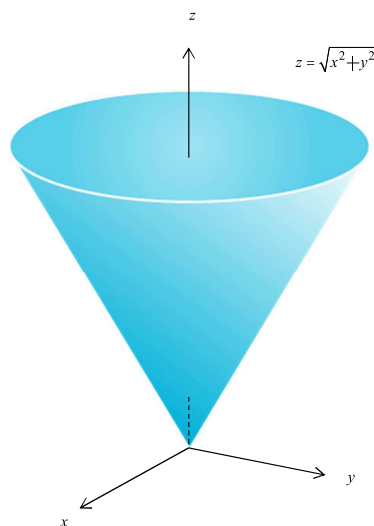


Figura 17: ⁽²⁾ Cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

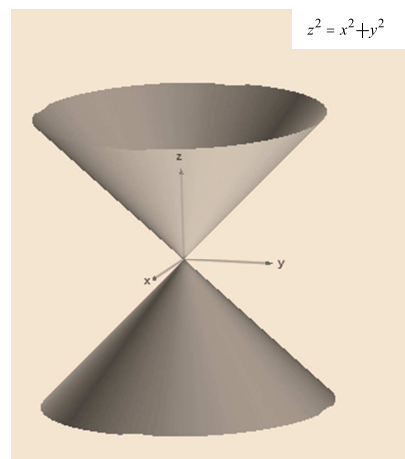


Figura 18: Duplo cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$.

Na figura 18 está representado o duplo cone de secção circular $z^2 = x^2 + y^2$. Notar que esta equação representa implicitamente as duas superfícies $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

5 Curvas de nível

Curvas de nível de uma superfície $z = f(x, y)$ são curvas no plano xy , cada uma delas correspondendo à projecção neste plano de todos os pontos sobre a superfície com a mesma coordenada z (pontos ao mesmo ‘nível’).

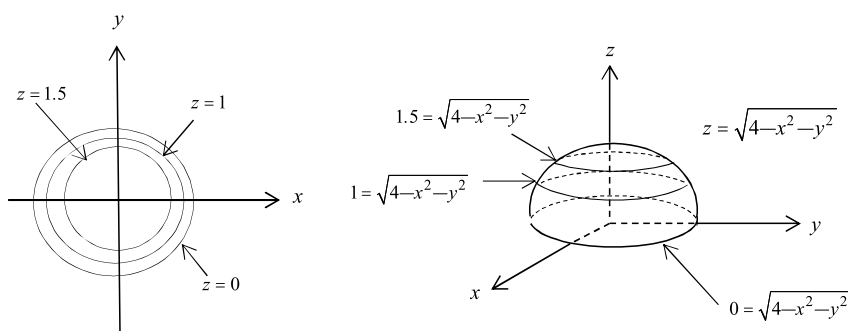


Figura 19: Esquerda: curvas de nível da semiesfera de equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Direita: semiesfera de equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Como exemplo temos representadas na figura 19, à esquerda, algumas curvas de nível da semiesfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, representada na parte direita da figura. Sobre a semiesfera encontram-se as circunferências que resultam da sua intersecção com vários planos do tipo $z = k$. São as projecções destas circunferências no plano xy que correspondem às curvas de nível da semiesfera. Formalmente obtemos estas curvas fazendo $z = k$ na fórmula da semiesfera

$$k = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

²<http://www.okclipart.com/Math-Clip-Art-Cone30clxtprwg/>

e verificando que se obtém a equação

$$x^2 + y^2 = 4 - k^2,$$

que representa uma família de circunferências de centro na origem e raio $\sqrt{4 - k^2}$, sendo $0 \leq k \leq 2$ um parâmetro real. As curvas de nível são uma forma de representar uma superfície $z = f(x, y)$ num referencial bidimensional xy .

6 Derivadas parciais

Na figura 20 está representada a intersecção do parabolóide circular $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 1$.

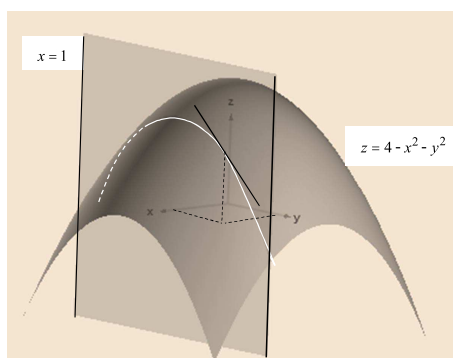


Figura 20: Parabolóide circular de equação $z = 4 - x^2 - y^2$ e plano de equação $x = 1$.

Da intersecção do parabolóide e do plano, resulta a parábola representada nas figuras 20 (linha a branco) e 21,

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Todos os pontos (x, y, z) desta parábola são da forma $(1, y, z)$, uma vez que se encontram no plano $x = 1$.

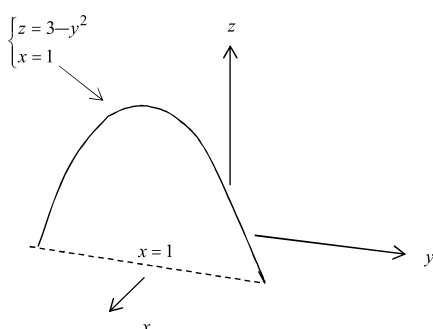


Figura 21: Intersecção do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 1$.

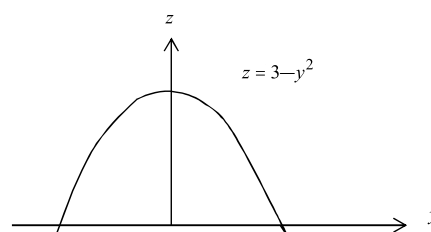


Figura 22: Projecção no plano yz da curva da figura anterior.

Podemos localizar o ponto $(1, y, z)$ no qual a parábola atinge o valor máximo, escrevendo a expressão de z em função de y

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 4 - 1^2 - y^2 \Leftrightarrow z = 3 - y^2,$$

e calculando depois o extremo desta função. Da derivada

$$\frac{dz}{dy} = (3 - y^2)' = -2y, \quad (5.1)$$

obtemos o ponto crítico $y = 0$, no qual a curva tem um máximo local de valor $z = 3$. No caso de o plano que intersecta o parabolóide ser $x = k$, com k diferente de 1, o procedimento para determinar o máximo da parábola resultante seria o mesmo. Salientamos que no cálculo da derivada apresentado na expressão (5.1), a função $z(x, y)$ é derivada em ordem a y , tomando-se $x = 3$. Uma derivada deste tipo diz-se *derivada parcial* de primeira ordem da função $z(x, y)$. Vale a seguinte definição.

Definição 3. Dada uma função $f(x, y)$, designa-se por derivada parcial de primeira ordem de $f(x, y)$ em ordem a y , e representa-se por

$$f_y \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y},$$

a função que se obtém derivando $f(x, y)$ em ordem à variável y , considerando x constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

De forma análoga se define a *derivada parcial* de primeira ordem de uma função $z(x, y)$ em ordem à variável x . Neste caso fixa-se a variável y , variando apenas x . Vale a seguinte definição.

Definição 4. Dada uma função $f(x, y)$, designa-se por derivada parcial de $f(x, y)$ em ordem a x , e representa-se por

$$f_x \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x},$$

a função que se obtém derivando a expressão $f(x, y)$ em ordem à variável x , considerando y constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Na figura 23 está representada a intersecção do parabolóide circular $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $y = 1$. A parábola resultante está representada também nas figuras 24 e 25, dizendo esta última respeito à projecção da parábola no plano xz .

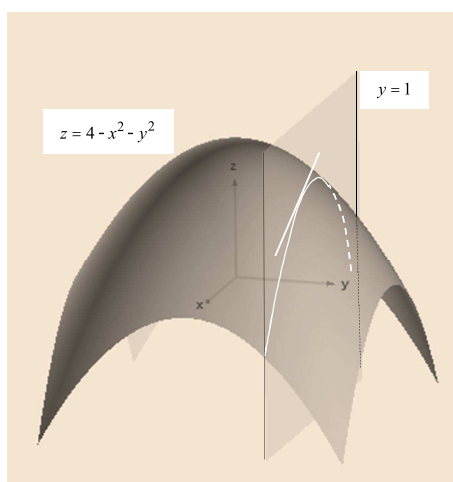


Figura 23

Todos os pontos (x, y, z) desta parábola são da forma $(x, 1, z)$, uma vez que se encontram no plano $y = 1$.

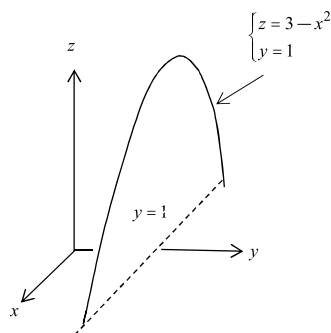


Figura 24

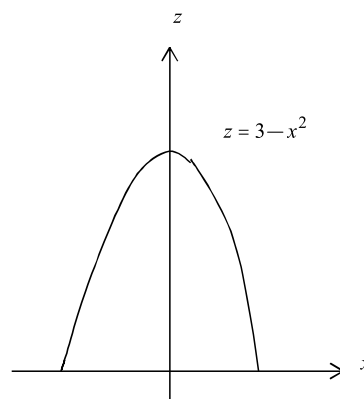


Figura 25

As derivadas parciais, por representarem derivadas de curvas, fornecem os declives das rectas contidas nos planos de intersecção e tangentes às curvas nos pontos onde são calculadas. Dada uma função $f(x, y)$:

1. A derivada parcial em ordem a x , f_x , calculada no ponto (x_0, y_0) , também se diz derivada parcial de $f(x, y)$ na *direcção* do eixo dos xx , no ponto (x_0, y_0) ;
2. A derivada parcial em ordem a y , f_y , calculada no ponto (x_0, y_0) , também se diz derivada parcial de $f(x, y)$ na *direcção* do eixo dos yy , no ponto (x_0, y_0) .

As derivadas parciais dão-nos informação sobre a variação das funções $f(x, y)$ nas direcções correspondentes.

Exercício 1. Caracterizar a variação da função (crescente, decrescente, estacionária) $z = 4 - x^2 - y^2$ no ponto $(x, y) = (1, 1)$, na direcção do eixo dos xx (figura 23).

Resolução

Calcula-se a derivada parcial da função em ordem a x :

$$z_x = (4 - x^2 - y^2)'_x = -2x.$$

Depois determina-se o valor desta derivada no ponto $(x, y) = (1, 1)$:

$$z_x(1, 1) = -2 < 0.$$

Como a derivada é negativa a função é decrescente no ponto $(x, y) = (1, 1)$, na direcção do eixo dos xx . Isto significa que, para pequenos aumentos Δx da coordenada x , a partir do ponto $(x, y) = (1, 1)$, mantendo $y = 1$ fixo, a variação Δz de z é $\Delta z \approx -2\Delta x$. Podemos verificar que a projecção no plano xz da recta tangente à curva (figura 23) tem declive negativo.

Exemplo 3. Cálculo de algumas derivadas parciais.

$$\begin{aligned}
 1. \quad z &= 2xy - 3x + 4y + 5x^2y & z_x &= (2xy - 3x + 4y + 5x^2y)'_x \\
 & & &= (2xy)'_x - (3x)'_x + (4y)'_x + (5x^2y)'_x = 2y - 3 + 0 + 10xy \\
 & & &= 2y - 3 + 10xy \\
 2. \quad z &= 2e^{3x+4y} & z_y &= (2e^{3x+4y})'_y = 2(3x+4y)'_y e^{3x+4y} = 8e^{3x+4y} \\
 3. \quad z &= \ln(3x+4y) & z_y &= (\ln(3x+4y))'_y = \frac{(3x+4y)'_y}{3x+4y} = \frac{4}{3x+4y} \\
 4. \quad z &= \frac{2x}{y+y^2} & z_x &= \left(\frac{2x}{y+y^2} \right)'_x = \frac{1}{y+y^2} (2x)'_x = \frac{2}{y+y^2} \\
 5. \quad z &= \operatorname{sen}(xy) & z_x &= (\operatorname{sen}(xy))'_x = (xy)'_x \cos(xy) = y \cos(xy) \\
 6. \quad z &= y \sqrt[3]{2x-6y} & z_y &= \left(y \sqrt[3]{2x-6y} \right)'_y = (y)'_y \sqrt[3]{2x-6y} + y \left(\sqrt[3]{2x-6y} \right)'_y \\
 & & &= \sqrt[3]{2x-6y} + y \frac{1}{3} (2x-6y)'_y (2x-6y)^{-2/3} \\
 & & &= \sqrt[3]{2x-6y} - 2y(2x-6y)^{-2/3}
 \end{aligned}$$

6.1 Derivadas parciais de segunda ordem

As derivadas parciais de segunda ordem de uma função $f(x, y)$, representam-se por:

$$\begin{aligned}
 f_{xx} \text{ ou } \partial^2 f / \partial x^2 & \quad \text{derivada parcial de segunda ordem, em ordem à variável } x; \\
 f_{yy} \text{ ou } \partial^2 f / \partial y^2 & \quad \text{derivada parcial de segunda ordem, em ordem à variável } y; \\
 f_{xy} \text{ ou } \partial^2 f / \partial y \partial x & \\
 e & \\
 f_{yx} \text{ ou } \partial^2 f / \partial x \partial y & \quad \text{derivadas de segunda ordem cruzadas, ou mistas.}
 \end{aligned}$$

Exemplo 4. Determinar as derivadas de segunda ordem da função $z = 2xy^2 - 3x^2y$.

Resolução

Derivadas de 1ª ordem

$$z_x = (2xy^2 - 3x^2y)'_x = 2y^2 - 6xy$$

$$z_y = (2xy^2 - 3x^2y)'_y = 4xy - 3x^2$$

Derivadas de 2ª ordem

$$z_{xx} = (z_x)'_x = (2y^2 - 6xy)'_x = -6y$$

$$z_{yy} = (z_y)'_y = (4xy - 3x^2)'_y = 4x$$

$$z_{xy} = (z_x)'_y = (2y^2 - 6xy)'_y = 4y - 6x$$

$$z_{yx} = (z_y)'_x = (4xy - 3x^2)'_x = 4y - 6x$$

Neste exemplo verifica-se $z_{xy} = z_{yx}$. Esta igualdade não acontece por acaso, como indica o seguinte resultado.

Teorema 1. (de Schwarz) Dada uma função $f(x, y)$, se f_{xy} e f_{yx} são contínuas numa região aberta³ do plano, então $f_{xy} = f_{yx}$ em todos os pontos dessa região.

6.2 Derivação da função composta (regra da cadeia)

Dada uma função $f(x, y)$, consideremos o caso em que as variáveis x e y representam duas funções da variável t , por exemplo

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x + 3y \\ x = 5t \\ y = 4t^2 + 1 \end{cases} . \quad (5.2)$$

Querendo conhecer df/dt , podemos substituir as expressões em t para x e y na expressão de $f(x, y)$, obtendo uma expressão em t para $f(x, y)$, e em seguida derivar em ordem a t a expressão resultante. No caso do exemplo acima obtemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2(5t) + 3(4t^2 + 1) = 12t^2 + 10t + 3 \\ df/dt &= (12t^2 + 10t + 3)' = 24t + 10. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pode porém calcular-se esta derivada usando a *regra de derivação da função composta*, enunciada a seguir, que não requer o cálculo prévio da expressão em t para a função $f(x, y)$.

Teorema 2. Se $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e se $f(x, y)$ tem derivadas de 1ª ordem contínuas no ponto $(x(t), y(t))$, então

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (5.4)$$

Apliquemos este resultado às funções (5.2) apresentadas acima. Começamos por calcular as derivadas do segundo membro da fórmula (5.4).

$$dx/dt = 5; \quad dy/dt = 8t; \quad \partial f/\partial x = 2; \quad \partial f/\partial y = 3.$$

Substituindo estas expressões na fórmula (5.2), confirmamos o resultado (??) obtido acima para df/dt ,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 5 \times 2 + 8t \times 3 = 24t + 10.$$

A regra da cadeia pode ser estendida ao caso em que x e y dependem de várias variáveis. Por exemplo, se x e y dependem das variáveis u, v ,

$$\begin{cases} f = f(x, y) \\ x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} ,$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (5.6)$$

³Tudo o ponto de uma região G do plano que pertence a um círculo contido nessa região, se diz *ponto interior* de G . *Região aberta do plano* é uma porção do plano tal que todos os seus pontos são pontos interiores – por exemplo, um círculo ao qual é retirada a circunferência, que é a sua *fronteira*.

Exemplo 5. Utilizar a regra da cadeia para obter a derivada parcial de 1ª ordem $\partial f / \partial v$, sendo

$$\begin{cases} f = \ln(xy) \\ x = 2u - 3v \\ y = uv \end{cases}.$$

Resolução

Começamos por determinar as derivadas do segundo membro da fórmula (5.6),

$$\partial x / \partial v = -3, \quad \partial y / \partial v = u, \quad \partial f / \partial x = \frac{1}{x}, \quad \partial f / \partial y = \frac{1}{y}.$$

Substituindo estas derivadas na fórmula (5.6) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-3}{x} + \frac{u}{y}.$$

Como queremos determinar $\partial f / \partial v$, estamos interessados numa expressão nas variáveis u, v . Para a obtermos basta substituir x, y pelas correspondentes expressões em u, v

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-3}{x} + \frac{u}{y} = \frac{-3}{2u-3v} + \frac{u}{uv} = \frac{-3}{2u-3v} + \frac{1}{v}.$$

7 Problemas de optimização

O cálculo de extremos relativos de funções reais de duas variáveis, $f(x, y)$, faz-se por um processo semelhante ao que vimos para o caso de funções reais de uma variável, $f(x)$. No gráfico da figura 26 estão indicados alguns pontos (x, y, z) de extremo da função respectiva.

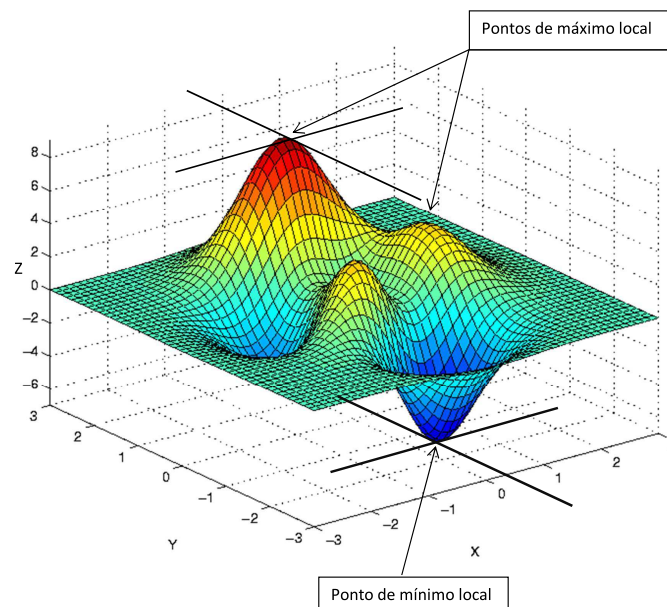


Figura 26

Valem as seguintes definições.

Definição 5. Uma função $f(x, y)$ tem um máximo relativo (mínimo relativo) no ponto (a, b) do seu domínio, sse existe um círculo centrado em (a, b) tal que, para todos os pontos interiores (x, y) do círculo se tem

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad (f(a, b) \leq f(x, y)).$$

Definição 6. Uma função $f(x, y)$ tem um máximo absoluto (mínimo absoluto) no ponto (a, b) do seu domínio, sse para todos os pontos (x, y) do domínio da função se tem

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad (f(a, b) \leq f(x, y)).$$

Basta uma função ser contínua num conjunto fechado (i.e., um conjunto que contém todos os seus pontos de fronteira) e limitado, para ter aí extremos absolutos.

Teorema 3. Se $f(x, y)$ é contínua no conjunto fechado e limitado $S \subset \mathbb{R}^2$, então $f(x, y)$ tem máximo e mínimo absolutos em S .

Na figura 26 estão representadas duas rectas tangentes à função $f(x, y)$ em dois dos seus pontos de extremo. Para cada caso, uma das rectas tem os seus pontos com coordenada x constante (é paralela ao plano zy) e a outra tem os seus pontos com coordenada y constante (é paralela ao plano zx). Ambas são paralelas ao plano xy . O declive da primeira representa a derivada parcial f_y , sendo f_x o declive da segunda. Sendo as rectas paralelas ao plano xy , ambas as derivadas parciais no ponto são nulas. Vale o seguinte teorema.

Teorema 4. Se $f(x, y)$ tiver um extremo relativo no ponto $(x, y) = (a, b)$ e se as derivadas parciais de primeira ordem f_x, f_y existirem nesse ponto, então $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

A seguir define-se *ponto crítico* de uma função $f(x, y)$.

Definição 7. O ponto (a, b) do domínio de $f(x, y)$ diz-se ponto crítico da função $f(x, y)$, sse $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se alguma das derivadas parciais $f_x(a, b), f_y(a, b)$ não existe.

Os pontos críticos são pontos do domínio da função, onde este pode ter, eventualmente, extremos.

Exemplo 6. Cálculo dos pontos críticos do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ (fig 23, pg. 13).

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x^2 - y^2)'_x = 0 \\ (4 - x^2 - y^2)'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtemos o ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$.

Exemplo 7. Cálculo dos pontos críticos do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (fig 17, pg. 11).

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2})'_x = 0 \\ (\sqrt{x^2 + y^2})'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \end{cases}$$

No ponto $(x, y) = (0, 0)$ nenhuma das duas derivadas parciais está definida (porquê?). Obtemos o ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$.

7.1 Classificação dos pontos críticos

Uma vez determinados os pontos críticos de uma função $f(x, y)$, devemos classificá-los, i.e., verificar se são pontos de máximo ou mínimo relativos, ou se são *pontos de sela* – pontos em que ambas as derivadas parciais são nulas, mas que não são pontos de extremo da função (figura 27).

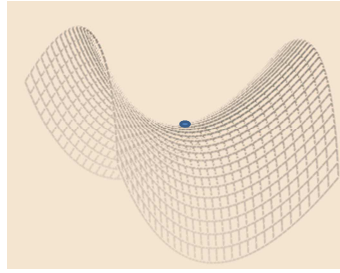


Figura 27: O ponto (a, b) marcado na figura não é ponto de extremo da função, apesar de se ter $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

A classificação de um ponto crítico, no caso em que as derivadas de primeira e segunda ordem no ponto existem e são contínuas, é feita usando o seguinte resultado.

Teorema 5. Se $f(x, y)$ tiver derivadas de segunda ordem contínuas nos pontos de um círculo centrado no ponto crítico (a, b) , considerando o discriminante

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2,$$

verifica-se que:

1. Se $D(a, b) > 0$ e $f_{xx} < 0$, então (a, b) é ponto de máximo relativo da função;
2. Se $D(a, b) > 0$ e $f_{xx} > 0$, então (a, b) é ponto de mínimo relativo da função;
3. Se $D(a, b) < 0$, então (a, b) é ponto de sela da função;
4. Se $D(a, b) = 0$, nada se pode concluir.

Exemplo 8. Vamos classificar o ponto crítico obtido no exemplo 6, pg. 18. Temos

$$z_{xx} = (-2x)_x = -2$$

$$z_{yy} = (-2y)_y = -2$$

$$z_{xy} = (-2x)_y = 0,$$

e

$$D(x, y) = (-2)(-2) - 0^2 = 4 \Rightarrow D(0, 0) = 4 > 0$$

$$z_{xx}(0, 0) = -2 < 0.$$

Por ser $D(0, 0) > 0$ e $z_{xx}(0, 0) < 0$, o ponto é um ponto de máximo local, o que confirma a informação que se retira da figura 23, pg. 13.