Sebenta de Cálculo I

Capítulo 4. Séries

Bragança, Janeiro 2022

Mário Abrantes

Matérias do Capítulo 4

Capítulo 4

Séries

1 Séries numéricas

Definição 1. Dada uma sequência numérica infinita

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

a expressão

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

diz-se *série numérica*, designando-se os u_s por *termos da série*.

Exemplos 1.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots$$

O termo u_n diz-se *termo geral* da série. O termo geral é uma função da posição n e gera qualquer termo da série. Por exemplo, o termo geral da série

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

é $u_n = 1/n$. Substituindo no segundo membro n pelos sucessivos inteiros positivos, $1, 2, 3, \cdots$, obtêm-se os sucessivos termos da série.

1.1 Notação sigma

Uma forma compacta de representar uma série envolve a chamada *notação sigma*[1]. A forma geral desta representação é

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

sendo u_n o termo geral da série. Não é forçoso que o valor inicial do contador n seja 1.

[1] A letra grega 'Σ' é um sigma maiúsculo; o sigma minúsculo é 'σ'.

Exemplos 2.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$1+1+1+1+1+\cdots+1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

$$1-1+1-1+1-\cdots+(-1)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

1.2 Soma de uma série

Dada uma série

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

designa-se por *soma parcial* dos primeiros n termos, a expressão

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n.$$

Exemplo 1. Algumas somas parciais da série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1+\frac{1}{2}=S_1+\frac{1}{2}\\
S_3 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=S_2+\frac{1}{3}\\
S_6 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=S_5+\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Dada a sequência numérica formada pelas somas parciais de uma série

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

dizemos que a série *converge*, ou que *tem soma S*, se esta sequência numérica converge, o que significa que existe o limite

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Exemplo 2. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \tag{4.1}$$

é convergente e a sua soma é igual a 1. Isto significa que se adicionarmos sucessivos termos da série, a soma parcial obtida fica tão próxima de 1 quanto se quiser, bastando para isso considerar mais e mais termos.

Uma perspectiva geométrica deste processo está mostrada na figura 1. A figura representa um quadrado de área igual a 1. Se tomarmos os termos da série como sendo áreas e se, começando no primeiro termo da série, formos reservando no quadrado os rectângulos com áreas correspondentes, verificamos que o total de área acumulada correspondente a cada soma parcial, se aproxima da área total do quadrado. A parte do quadrado não considerada após cada soma parcial, fica mais pequena à medida que as somas parciais consideradas têm mais termos. Podemos então escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Exercício 1. Verificar a igualdade

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{5-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}} = 7.$$

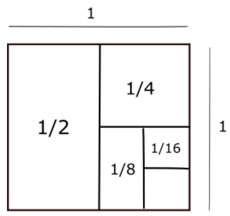

Figura 1

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente Vamos mostrar que esta série é divergente, usando outra série divergente de termos positivos menores ou iguais aos desta. A divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ resulta da comparação destas duas séries.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{2 termos}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\text{4 termos}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\text{8 termos}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}}_{\text{16 termos}} + \underbrace{\frac{1}{33} \cdots + \frac{1}{64}}_{\text{32 termos}} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{2 termos}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\text{4 termos}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\text{8 termos}} + \underbrace{\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}}_{\text{16 termos}} + \underbrace{\frac{1}{64} \cdots + \frac{1}{64}}_{\text{32 termos}} + \cdots\end{aligned} \tag{4.2}$$

É imediato verificar que a soma das sequências de termos sob cada chaveta na segunda série é igual a 1/2. Então podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty$$

Esta série é divergente. Como os seus termos são menores, ou iguais, aos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, então esta é também divergente.

Exercício 2. Qual o número mínimo de termos de valor 1/2 que é necessário somar para obter uma soma parcial superior a 10^9?.

Conclusão: construimos a série (4.2), de termos menores ou iguais aos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e verificámos que é divergente; então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ também é divergente.

1.3 Alguns resultados sobre convergência de séries

Para uma série ser convergente é condição necessária que o módulo do termo geral tenda para zero, quando $n \to +\infty$.

Teorema 1. Se a série Σu_n converge, então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

A afirmação recíproca é falsa, isto é, o termo geral pode tender para zero quando $n \to +\infty$, e a série ser divergente. É o caso da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, de termo geral $u_n = 1/n$. Apesar de ser

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a série é divergente. A utilidade deste teorema é permitir assinalar a divergência de algumas séries, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 3. A série

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1} + \cdots$$

é divergente, porque

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Será que mudamos a natureza de uma série, quanto à sua convergência, somando-lhe ou subtraindo-lhe um número finito de termos? Não.

Teorema 2. O carácter de convergência de uma série não se altera se acrescentarmos ou suprimirmos um número finito de termos.

A multiplicação de todos os termos de uma série por uma constante não nula, também não altera a sua natureza quanto à convergência.

Teorema 3. Se a série

$$\Sigma u_n$$

converge, e se a sua soma é S, então, dada a constante c, a série

$$\Sigma c u_n$$

também converge, e a sua soma é cS.

Exemplo 4. Dada a série convergente de soma 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$$

converge e a sua soma é 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4 \times 2 = 8$$

Teorema 4. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \pm T.$$

Exemplo 5. Por ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2},$$

temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

1.4 Estudo da convergência de séries de termos positivos

Vamos abordar dois métodos para estudar a convergência de séries numéricas de termos positivos. O primeiro é o *método da comparação*, que usa o conhecimento da convergência (ou divergência) de uma série conhecida para caracterizar a convergência de uma série nova. O segundo método, dito *critério da razão* ou *critério de d'Alembert*, usa o termo geral u_n de uma série Σu_n para tirar conclusões sobre a sua convergência. Ambos os métodos são de aplicação relativamente simples, mas não são universais, ou seja, não resolvem todos os casos. Existem na literatura outros métodos de estudo da convergência de séries numéricas de termos positivos que funcionam em mais casos do que estes dois, mas cuja aplicação é mais complexa. Faz-se notar que os métodos de estudo da convergência de séries de termos positivos se adequa também ao estudo das séries com termos de sinais quaisquer, como veremos adiante.

1.4.1 Método da comparação

Teorema 5. Dadas duas séries de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

se se verificar

$$u_n \leq v_n, \ \ n = 1, 2, \cdots$$

valem as seguintes conclusões

- se Σv_n converge, então Σu_n também converge;
- se Σu_n diverge, então Σv_n também diverge.

Exemplo 6. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n$ converge?

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Como

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}, \ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

então

$$\Sigma \frac{1}{n} \leq \Sigma \frac{2}{n}.$$

Conclusão: a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n$ diverge.

Exemplo 7. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+2^n}$ converge?

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ converge. Como

$$\frac{1}{2+2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \ \ n = 1,2,3,\cdots,$$

então

$$\Sigma \frac{1}{2+2^n} \leq \Sigma \frac{1}{2^n}.$$

Conclusão: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+2^n}$ converge.

Exemplo 8. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ = \ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

é divergente porque

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente.

Notar que o teorema exige que as séries não tenham termos negativos. Se considerarmos as duas séries

$$\begin{aligned} \sum u_n &= -1-2-3-4-\cdots = -\infty \\ \sum v_n &= 1/2+1/4+1/8+\cdots = 1 \end{aligned}$$

apesar de ser $u_n \leq v_n$ para todos os valores de n, a série $\sum v_n$ converge mas $\sum u_n$ diverge!

1.4.2 Critério da Razão (ou de d'Alembert)

Teorema 6. Dada uma série de termos positivos

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

se

$$u_n > 0, \ \ n = 1,2,3,\cdots,$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \ = \ L,$$

com L finito, valem as seguintes conclusões:

- se $L < 1$ a série converge;
- se $L > 1$ a série diverge;
- se $L = 1$ nada se pode concluir.

Exemplo 9. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \ = \ \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots \ = \ \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \cdots$$

converge? Vamos calcular L.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Pelo critério da razão, a série converge.

Exemplo 10. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$$

converge? Vamos calcular L.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/((n+1)(n+2))}{1/(n(n+1))}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

O critério da razão nada permite concluir. Mas esta série é convergente. De facto, verifica-se

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2},$$

e a série $\sum 1/n^2$ converge, porque é uma *série p* com $p > 1$.[2]

Exemplo 11. Vimos anteriormente que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. No entanto, o seu estudo usando o critério da razão é inconclusivo, como podemos concluir calculando L.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Apesar de existirem métodos de estudo de convergência que resolvem mais casos do que os métodos acima referidos, eles não resolvem todos os casos. Existem séries cuja convergência/divergência é desconhecida. Por exemplo, não se sabe (pelo menos até Janeiro de 2022) se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 sen^2(n)}$$

é, ou não, convergente.

1.5 Séries Geométricas

O estudo da convergência de uma série é, geralmente, (muito) mais simples do que o cálculo da sua soma, no caso de a série ser convergente. Por exemplo, sabe-se que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

[2]As séries do tipo p, ou *séries de Dirichlet*, são da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^p$, com $p \in \mathbb{R}$. Mostra-se que estas séries convergem se $p > 1$ e divergem se $p \leq 1$.

é convergente (o que permite calcular aproximações da sua soma tão precisas quanto se queira), mas não se encontrou uma boa caracterização da sua soma.[3].

As séries geométricas são uma família de séries especial, porque é simples ver se convergem e, no caso afirmativo, é também simples determinar a sua soma. Uma série geométrica é uma série cujos termos são os de uma *progressão geométrica*:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots,$$

sendo a o *primeiro termo* da série e r a *razão* da série.

Exemplo 12. A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3 \times 2^n = 3 + 6 + 12 + 24 + \cdots$$

é uma série geométrica de primeiro termo 3 e razão 2. A progressão geométrica correspondente é

$$3, 6, 12, 24, \cdots$$

Exemplo 13. A série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

é uma série geométrica de primeiro termo $1/4$ e razão $1/2$. A progressão geométrica correspondente é

$$1/4, 1/8, 1/16, \cdots$$

Exemplo 14. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{7^{n-1}} = -4 + \frac{4^2}{7} - \frac{4^3}{7^2} + \frac{4^4}{7^3} - \cdots$$

é uma série geométrica de primeiro termo -4 e razão $-4/7$. A progressão geométrica correspondente é

$$-4, 4^2/7, -4^3/7^2, \cdots$$

1.5.1 Soma dos primeiros n termos

Vamos determinar uma expressão para calcular a soma S_n dos primeiros n termos de uma série geométrica. Dada a série geométrica

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots,$$

temos

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{4.3}$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade pela razão r, obtemos

$$S_n r = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{4.4}$$

Subtraindo as expressões (4.3) e (4.4), membro a membro, temos

$$S_n - S_n r = a - ar^n$$

e por fim

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

[3]Sabe-se que é um número irracional, mas não se sabe se existe um polinómio com coeficientes racionais do qual a soma seja uma raiz. Quando tal polinómio existe, diz-se que a raiz é um número *algébrico*; de contrário, o número diz-se *transcendente*; $\sqrt{2}$ é um número irracional, mas algébrico – é uma das raízes do polinómio $x^2 - 2$; já o número π é irracional e transcendente – não é raiz de nenhum polinómio com coeficientes racionais.

Exemplo 15. A soma dos primeiros quatro termos da série

$$1+1/2+1/4+1/8+\cdots,$$

com primeiro termo $a=1$ e razão $r=1/2$ é

$$S_4 = \frac{1-(1/2)^4}{1-1/2} = 15/8$$

1.5.2 Soma de uma série geométrica

Dada uma série geométrica convergente, qual o limite S da soma parcial S_n quando $n \to +\infty$? Este limite corresponde à soma da série.

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a-ar^n}{1-r} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n\right) = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{1-r}r^n \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to+\infty} r^n \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n$$

é igual a zero se $|r|<1$, não existe (é infinito) se $|r|>1$, e por não interessar o caso em que $r=1$ (a série geométrica tem todos os termos iguais e por isso diverge, se $a \neq 0$), conclui-se que só existe soma da série se $|r|<1$, sendo neste caso

$$S = \frac{a}{1-r}. \tag{4.5}$$

Esta é a fórmula da *soma de uma série geométrica convergente*, com primeiro termo a e razão r.

Em resumo:

- Uma série geométrica com $a \neq 0$ é convergente se $|r|<1$;
- Se uma série geométrica de primeiro termo a e razão r converge, então a sua soma é dada por (4.5).

Exercício 3. Mostrar que a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$ é convergente e determinar a sua soma.

Numa série geométrica o cociente u_{n+1}/u_n de dois termos consecutivos é independente de n e corresponde à razão r da série. Calculemos este cociente.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} = r.$$

A série tem a razão $r=1/3$, que é menor que 1 em módulo. Portanto a série converge. O seu primeiro termo é $a=1/3$. A sua soma, S, é

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 4. Existe uma série geométrica convergente, com o primeiro termo $a=1$ e soma $S=-1/2$?

Se existir esta série, a sua razão r deve ser tal que

$$S = \frac{a}{1-r} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow r = 3.$$

Esta série geométrica é divergente porque $r>1$. Por isso não existe uma série geométrica nas condições indicadas.

1.6 Séries numéricas com termos de sinais quaisquer

Vamos fazer um estudo da convergência de séries cujos termos têm sinais quaisquer.

1.6.1 Séries alternadas

Uma *série alternada* é uma série da forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

ou da forma

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots,$$

sendo os u_s positivos.

Exemplos 3.

$$-1+1-1+1-\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}+\cdots$$

O seguinte é um critério para a convergência deste tipo de séries, dito *critério de Leibniz.*

Teorema 7. Dada uma série alternada

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots,$$

com os $u_s > 0$, se a sequência dos u_s é decrescente

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \cdots,$$

e se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

então a série converge e a sua soma S é $0 < S < u_1$.

Este enunciado é também válido, com pequenas alterações, se os us forem negativos. Neste caso deve verificar-se $|u_1| > |u_2| > |u_3| > |u_4| > \cdots$ e a soma S é tal que $u_1 < S < 0]$.

Exemplos 4. As séries

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}+\cdots$$

verificam as condições do teorema (são alternadas, os termos são positivos decrescentes, os termos gerais tendem para zero) e por isso convergem. Para cada uma delas a sua soma S verifica $0 < S < 1$

1.6.2 Séries com termos de sinais quaisquer (caso geral)

Fazemos agora uma breve referência às séries cujos termos podem ter sinais quaisquer (não obrigatoriamente dispostos de forma alternada). Uma forma de estudar a convergência destas séries $\sum u_n$, é estudar a convergência da série dos módulos dos seus termos, $\sum |u_n|$. A estas últimas, por serem de termos positivos, podemos aplicar os métodos de estudo de convergência que usámos com séries de termos positivos.

Teorema 8. Se a série de termos de sinais quaisquer

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

é tal que a série formada pelos valores absolutos dos seus termos

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \cdots$$

converge, então é uma série convergente.

Exemplo 16. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(n)}{n^2} = sen(1) + \frac{sen(2)}{2^2} + \frac{sen(3)}{3^2} + \cdots$$

é convergente, pelo seguinte argumento.

- A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, porque é uma série p, com $p = 2$;
- Por ser $\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ (porquê?), podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ converge, por comparação com a série do item anterior;
- O teorema acima enunciado permite concluir que a série dada converge.

Uma série $\sum u_n$ diz-se *absolutamente convergente* se for convergente a série dos módulos correspondente, $\sum |u_n|$. Se $\sum u_n$ converge, mas $\sum |u_n|$ diverge, então $\sum u_n$ diz-se *condicionalmente convergente.*

Exemplo 17. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - \cdots$$

é convergente, pelo critério de Leibniz. A sua série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$$

é, porém, divergente, dado ser a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/n$ é, por isso, condicionalmente convergente.

Exemplo 18. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -1/2 + 1/2^2 - 1/2^3 + \cdots$$

é convergente, pelo critério de Leibniz. A série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots$$

é convergente, porque é uma série geométrica de razão $|r| = 1/2 < 1$. Por isso a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/2^n$ é absolutamente convergente.

2 Séries de potências

2.1 Polinómios

Quando temos que fazer cálculos com a expressão analítica (fórmula) de uma função, é vantajoso que essa expressão seja um polinómio, por exemplo $p(x) = 2 + 5x - 2x^2$, pelas seguintes razões:

- É fácil calcular o valor da função num ponto $x = a$, $p(a)$;
- É fácil obter a derivada $p'(x)$ da função;
- É fácil primitivar a função.

2.2 Expansão de um polinómio em torno de um ponto x = b

A expressão $p(x) = 2 + 5x - 2x^2$ representa a *expansão* do polinómio em torno do ponto $x = 0$, no seguinte sentido: $p(x)$ pode escrever-se $p(x) = 2+5(x-0)-2(x-0)^2$; o termo independente 2 representa o valor de $p(0)$; a parte linear, $y = 2 + 5x$, é a equação da recta tangente ao gráfico de $p(x)$ no ponto $x = 0$ (figura 2).

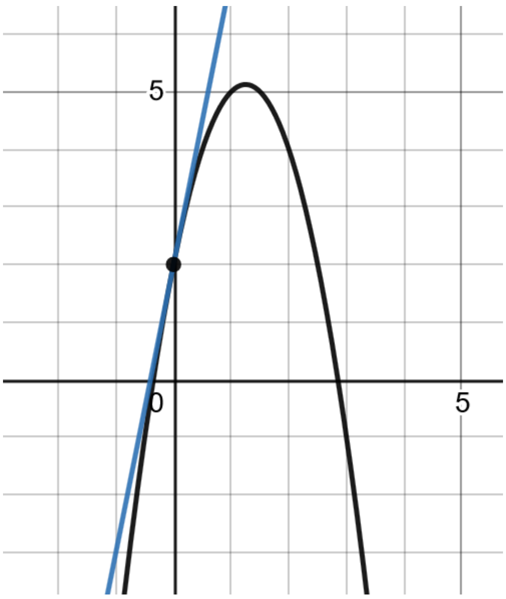

Figura 2

Podemos expandir o polinómio em torno do ponto $x = 2$.

$$p(x) \; = \; 2+5x-2x^2 \; = \; 2+5((x-2)+2)-2((x-2)+2)^2 \; = \; 4-3(x-2)-2(x-2)^2$$

A expressão $p(x) = 4-3(x-2)-2(x-2)^2$ representa a *expansão* do polinómio em torno do ponto $x = 2$; o termo independente 4 representa o valor de $p(2)$ e $y = 4 - 3(x - 2)$ é a equação da recta tangente ao gráfico de $p(x)$ no ponto $x = 2$ (figura 3).

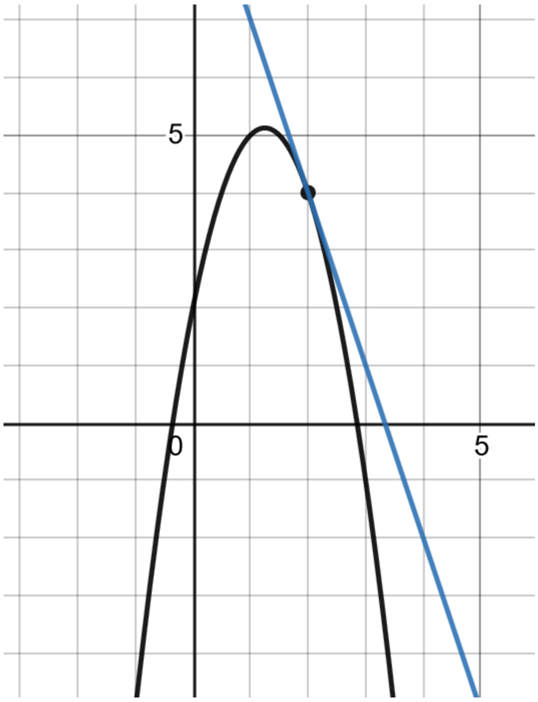

Figura 3

2.3 Expansão de uma função em série de potências de x

Funções como e^x, $sen(x)$, $cos(x)$ não podem ser representadas por polinómios. Isto quer dizer que não existe um polinómio, seja qual for o seu grau, que represente, por exemplo, a função $f(x) = e^x$. Se existisse esse polinómio (seja n o seu grau), a igualdade

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \tag{4.6}$$

seria válida ao menos num certo intervalo de valores de x. É imediato verificar que esta equivalência não é válida, porque derivando $n+1$ vezes os dois membros da mesma obtemos e^x no primeiro e zero no segundo. A situação é diferente se considerarmos uma série de potências de x no segundo membro (uma espécie de 'polinómio infinito')

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Neste caso, sucessivas derivações dos dois membros não anulam o segundo membro. Vamos calcular os coeficientes (os a_s) que tornam a equivalência válida.

- Calcular a_0: fazendo $x = 0$ em (4.6), obtemos

$$f(0) = e^0 = 1 = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f(0)}{1} = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 1$$

- Calcular a_1: derivar ambos os membros da igualdade (4.6) e calcular os dois membros fazendo $x = 0$.

$$f'(x) = (e^x)' = e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots .$$
$$f'(0) = e^0 = 1 = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1} = \frac{f'(0)}{1!} = 1$$

- Calcular a_2: derivar duas vezes ambos os membros da igualdade (4.6) e calcular os dois membros da expressão obtida, fazendo $x = 0$.

$$f''(x) = (e^x)'' = e^x = 2a_2 + 2\times 3a_3 x + \cdots + (n-1)\times n a_n x^{n-2} + \cdots.$$
$$f''(0) = e^0 = 1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}$$

- Calcular a_3: derivar três vezes ambos os membros da igualdade (4.6) e calcular os dois membros da expressão obtida, fazendo $x = 0$

$$f'''(x) = (e^x)''' = e^x = 2\times 3a_3 + \cdots + (n-2)\times(n-1)\times n a_n x^{n-3} + \cdots.$$
$$f'''(0) = e^0 = 1 = 2\times 3a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{2\times 3} = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!}$$

- ...

- Calcular a_n: derivar n vezes ambos os membros da igualdade (4.6) e calcular os dois membros da expressão obtida, fazendo $x = 0$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Substituindo estes coeficientes em (4.6), obtém-se

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{4.7}$$

dita *expansão em série de Taylor* em torno do ponto $x = 0$ (ou *série de Maclaurin*) da função e^x.

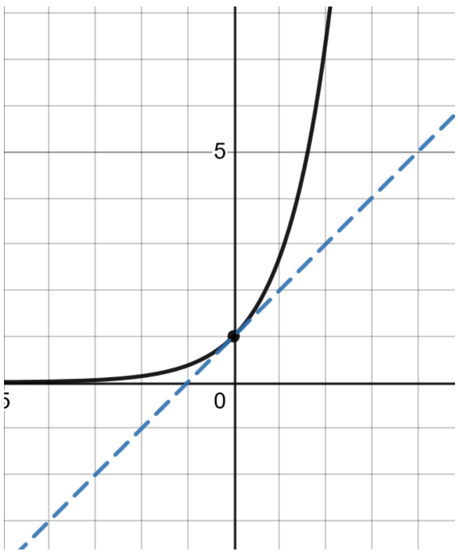

Figura 4: A tracejado o gráfico de $y = 1 + x$.

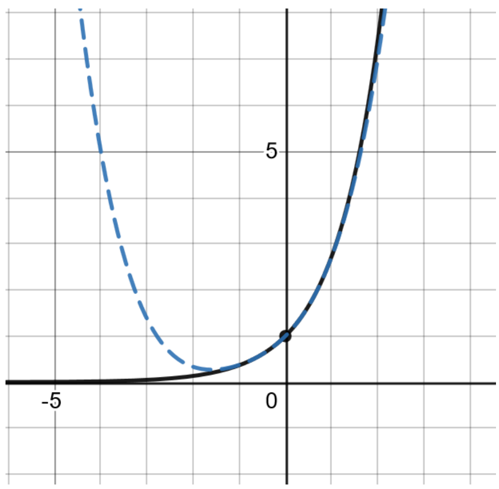

Figura 5: A tracejado o gráfico de $y = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!$.

Na figura (4) estão representados os gráficos das funções e^x e $1 + x$ (soma dos primeiros dois termos da série – gráfico a tracejado). A recta a tracejado é a tangente ao gráfico de e^x no ponto $x = 0$. É a melhor aproximação linear possível, tangente a e^x no ponto $x = 0$. Na figura (5) estão representados os gráficos das funções e^x e $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!$ (soma dos primeiros cinco termos da série – gráfico a tracejado). A curva a tracejado é tangente ao gráfico de e^x no ponto $x = 0$. É a melhor aproximação de grau quatro possível, tangente a e^x no ponto $x = 0$.

É uma boa aproximante, se quisermos calcular aproximadamente e^x para valores próximos de $x = 0$, mas uma má aproximante para valores de x afastados' de $x = 0$. Se formos considerando truncaturas da série com cada vez mais termos, obtemos sucessivamente aproximantes que, partindo do ponto $x = 0$ para a esquerda, e para a direita, se vão 'colando' mais e mais ao gráfico da exponencial. No limite (considerando todos os termos da série) obtém-se a tracejado o próprio gráfico de e^x.

2.3.1 Expansão de uma função em série de potências de $(\mathbf{x}-\mathbf{b})$

Podemos obter os coeficientes da expansão de uma função $f(x)$ em série de potência de $(x-b)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-b) + c_2(x-b)^2 + c_3(x-b)^3 + \cdots + c_n(x-b)^n + \cdots && (4.8)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-b)^n. && (4.9)
\end{aligned}
$$

Repetindo o exercício feito anteriormente obtém-se

$$
c_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,
$$

dita *expansão em série de Taylor* da função $f(x)$, em torno do ponto $x = b$.

Exercício 5. Determinar a expansão em série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = 2$.

Calculamos os coeficientes.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f(2) = e^2\\
c_1 &= f'(2) = e^2\\
c_2 &= \frac{f''(2)}{2!} = \frac{e^2}{2}\\
c_3 &= \frac{f'''(2)}{3!} = \frac{e^2}{3!}\\
c_4 &= \frac{f^{(4)}(2)}{4!} = \frac{e^2}{4!}\\
&\cdots\\
c_n &= \frac{f^{(n)}(2)}{n!}
\end{aligned}
$$

A série de Taylor fica

$$
e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4 + \cdots .
$$

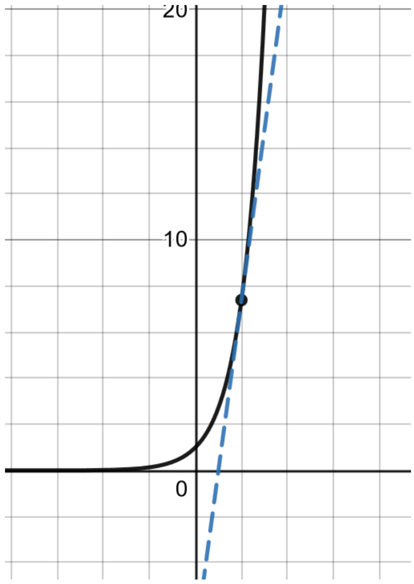

Figura 6: A tracejado o gráfico de $e^2 + e^2(x-2)$.

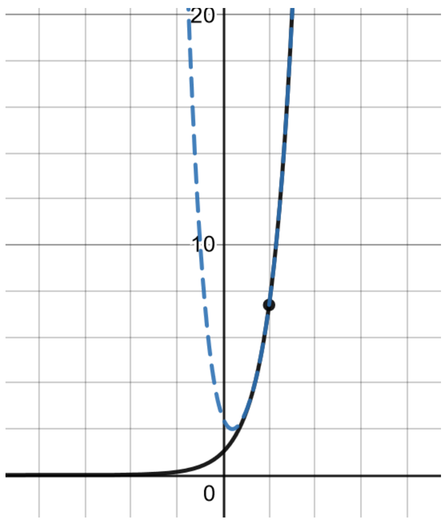

Figura 7: A tracejado o gráfico de $y = e^2 + e^2(x-2) + e^2/2!(x-2)^2 + e^2/3!(x-2)^3 + e^2/4!(x-2)^4$.

Na figura (6) estão representados os gráficos das funções e^x e $e^2 + e^2(x-2)$ (soma dos primeiros dois termos da série – gráfico a tracejado). A recta a tracejado é a tangente ao gráfico de e^x no ponto $x = 2$. É a melhor aproximação linear possível, tangente a e^x no ponto $x = 2$. Na figura (7) estão representados os gráficos das funções e^x e $e^2+e^2(x-2)+e^2/2!(x-2)^2+e^2/3!(x-2)^3 + e^2/4!(x-2)^4$ (soma dos primeiros cinco termos da série – gráfico a tracejado). A curva a tracejado é tangente ao gráfico de e^x no ponto $x = 2$. É a melhor aproximação de grau quatro possível, tangente a e^x no ponto $x = 2$. É uma boa aproximante, se quisermos calcular aproximadamente e^x para valores próximos de $x = 2$, mas uma má aproximante para valores de x 'afastados' de $x = 2$. Se formos considerando truncaturas da série com cada vez mais termos, obtemos sucessivamente aproximantes que, partindo do ponto $x = 2$ para a esquerda e para a direita, se vão 'colando' mais e mais ao gráfico da exponencial. No limite (considerando todos os termos da série) obtém-se a tracejado o próprio gráfico de e^x.

O seguinte teorema (de Taylor) fundamenta os resultado obtidos acima.

Teorema 9. Seja $f(x)$ uma função real de variável real que admite derivada de ordem $k > 1$ no ponto $b \in \mathbb{R}$. Verifica-se a identidade

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(b)}{(k-1)!}(x-b)^{k-1} + h_k(x)(x-b)^k, \tag{4.10}$$

sendo $h_k(x)$ uma função tal que $\lim_{x\to b} h_k(x) = 0$.

O polinómio em (4.10) diz-se *polinómio de Taylor de grau* $k-1$ da função $f(x)$. O limite $\lim_{x\to b} h_k(x) = 0$ indica que, quanto mais próximo de b estiver o valor de x no qual queremos calcular uma aproximação de $f(x)$, menor o erro cometido usando o polinómio de grau k em (4.10) como aproximante de $f(x)$.

2.4 Intervalo de convergência de uma série de potências

Teorema 10. O conjunto dos valores de x para os quais uma série de potências $\sum a_n(x-b)^n$ converge, é um intervalo aberto centrado no ponto $x = b$, $(b-R, b+R)$, sendo R o *raio de convergência* da série. Os extremos do intervalo podem, ou não, representar pontos onde a série convirja.

Exemplo 19. Determinar o intervalo de convergência I da série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$.

A série em estudo é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Vamos usar o critério da razão com a série dos módulos $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n} = 0 < 1$$

Como $L < 1$, para qualquer valor de x, a série dos módulos é convergente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. A série dada converge para todo os valores de $x \in \mathbb{R}$, sendo $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 20. Determinar o intervalo de convergência I da série

$$2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}.$$

Vamos usar o critério da razão com a série dos módulos $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|2x|^n}{n}$.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|2x|^{n+1}/(n+1)}{|2x|^n/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,|2x|^{n+1}}{(n+1)\,|2x|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}|2x| = |2x|$$

Para a série convergir deve ser

$$L = |2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

A série dada converge para valores de $x \in (-1/2, 1/2)$. A convergência nos extremos do intervalo deve ser estudada separadamente. A série converge para $x = 1/2$, uma vez que substituindo na mesma x por $1/2$ se obtém uma série alternada convergente:

$$2 \times \frac{1}{2} - \frac{(2\times 1/2)^2}{2} + \frac{(2\times 1/2)^2}{3} - \frac{(2\times 1/2)^2}{4} + \cdots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Pode mostrar-se que esta série converge para ln(2). A série diverge para $x = -1/2$, uma vez que substituindo na mesma x por $-1/2$ se obtém uma série divergente:

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{(2\times(-1/2))^2}{2} + \frac{(2\times(-1/2))^2}{3} - \frac{(2\times(-1/2))^2}{4} + \cdots = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots = -\infty.$$

O intervalo de convergência da série é $I = (-1/2, 1/2]$.

Exemplo 21. Dada a série

$$a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n + \cdots,$$

mostrar que, se existir o limite

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

então a série converge no intervalo centrado em b, $(b - 1/\alpha, b + 1/\alpha)$.

Vamos usar o critério da razão com a série dos módulos $= \sum_{n=0}^{+\infty} \left|a_n(x-b)^n\right|$.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-b)^{n+1}}{a_n(x-b)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-b| = \alpha|x-b|$$

Para a série convergir deve ser

$$L=\alpha|x-b|<1 \Leftrightarrow |x-b|<1/\alpha \Leftrightarrow -1/\alpha<x-b<1/\alpha \Leftrightarrow b-1/\alpha<x<b+1/\alpha,$$

mostrando-se assim que série converge no intervalo indicado (como se referiu anteriormente, a convergência nos *extremos* do intervalo deve ser estudada separadamente).

A expansão em série de Taylor de uma função, em torno de um ponto, se existir, é única. isto significa que a mesma função $f(x)$ não pode ter, em torno de um ponto, duas expansões em série de Taylor com algum coeficiente diferente para a mesma potência de x.

Exercício 6. Expandir em série de Maclaurin a função

$$f(x)\ =\ \frac{1}{1-x}.$$

A função $f(x)$ tem a forma da soma de uma série geométrica de primeiro termo $a=1$ e razão x, desde que $|x|<1$. Assim sendo temos

$$\frac{1}{1-x}\ =\ 1+x+x^2+x^3+\cdots\ =\ \sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Dada a unicidade da série de Taylor, o segundo membro da igualdade corresponde à série de Taylor de $f(x)$, como se pode verificar calculando os coeficientes respectivos. O intervalo de convergência da série é $-1<x<1$, o que significa que a igualdade é válida para valores de x neste intervalo e inválida para valores de x fora do intervalo. Por exemplo, fazendo $x=1/2$ em ambos os membros da igualdade anterior, obtém-se

$$\frac{1}{1-1/2}\ =\ 1+1/2+1/4+1/8+\cdots \Leftrightarrow 2\ =\ 1+1/2+1/4+1/8+\cdots.$$

Como a série numérica obtida tem soma igual a 2 (porquê?), a igualdade é verdadeira. Já se fizermos $x=3$, obtemos

$$\frac{1}{1-3}\ =\ 1+3+9+27+\cdots \Leftrightarrow -2\ =\ +\infty,$$

que é uma relação sem sentido (o segundo membro não é um número).

Expansão das funções sen(x) e cos(x) em potências de x

Vamos calcular os coeficientes duma série de potências, tal que $sen(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$.

$$\begin{array}{ll}
f(0)\ =\ sen(0)\ =\ 0 & a_0\ =\ 0\\
f'(0)\ =\ cos(0)\ =\ 1 & a_1\ =\ 1\\
f''(0)\ =\ -sen(0)\ =\ 0 & a_2\ =\ 0\\
f'''(0)\ =\ -cos(0)\ =\ -1 & a_3\ =\ -1/3!\\
f^{(4)}(0)\ =\ sen(0)\ =\ 0 & a_4\ =\ 0\\
f^{(5)}(0)\ =\ cos(0)\ =\ 1 & a_4\ =\ 1/5!\\
\ldots &
\end{array}$$

Obtemos

$$sen(x)\ =\ x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\ =\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Para obtermos a série de Maclaurin da função $cos(x)$, basta derivar a série de Taylor da função $sen(x)$. A série obtida tem o mesmo intervalo de convergência da série inicial (neste caso, $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Na figura (8) estão representados os gráficos das funções $cos(x)$ e $1-x^2/2!$ (soma dos primeiros dois termos da série – gráfico a tracejado). A curva a tracejado é a melhor aproximação quadrática possível, tangente a $cos(x)$ no ponto $x=0$. Na figura (9) estão representados os gráficos das funções $cos(x)$ e $1-x^2/2!+x^4/4!$ (soma dos primeiros três termos da série – gráfico a tracejado). A curva a tracejado é a melhor aproximação de grau quatro possível, tangente a $cos(x)$ no ponto $x=0$ (no seguinte sentido: qualquer outro polinómio de grau quatro, cujo gráfico seja tangente ao de $cos(x)$ no ponto $x=0$, constitui uma pior aproximante da função co-seno, para valores de x suficientemente próximos do ponto $x=0$.

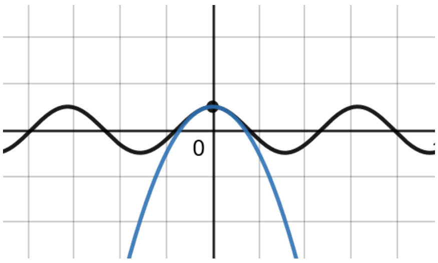

Figura 8: A tracejado o gráfico de $1-x^2/2!$.

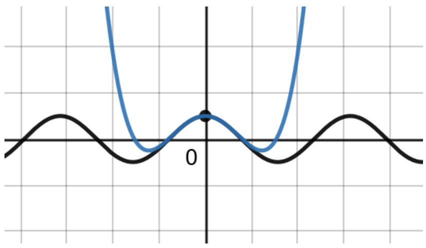

Figura 9: A tracejado o gráfico de $y=1-x^2/2!+x^4/4!$.

2.5 Fórmula de Euler

Usando a série de Maclaurin da função e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

para determinar e^{ix}, obtém-se

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots.$$

Por ser

$$\begin{aligned} & ix \\ (ix)^2 &= i^2x^2 = -x^2 \\ (ix)^3 &= i^3x^3 = -ix^3 \\ (ix)^4 &= i^4x^4 = x^4 \\ (ix)^5 &= i^5x^5 = ix^5 \\ & \ldots \end{aligned}$$

temos

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} \cdots.$$

Separando os termos reais dos imaginários, fica

$$e^{ix} = (1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots).$$

A parte real é a série de Maclaurin de $cos(x)$; a parte imaginária é a série de Maclaurin de $sen(x)$. Podemos então escrever a igualdade

$$e^{ix} = cos(x)+isen(x),$$

conhecida por *fórmula de Euler.*

Exemplos 5.

$$\begin{aligned} e^{i\pi/2} &= cos(\pi/2)+isen(\pi/2)=i \\ e^{i0} &= cos(0)+isen(0)=1 \\ e^{i\pi} &= cos(\pi)+isen(\pi)=-1 \end{aligned}$$

As funções $cos(x)$ e $sen(x)$ podem ser escritas em termos da exponencial complexa, usando a fórmula de Euler. De facto, somando membro a membro as fórmulas seguintes

$$e^{ix} = cos(x)+isen(x) \tag{4.11}$$

$$e^{-ix} = cos(-x)+isen(-x) = cos(x)-isen(x) \tag{4.12}$$

obtemos

$$e^{ix}+e^{-ix} = cos(x)+isen(x)+cos(x)-isen(x) = 2cos(x)$$

e podemos escrever

$$cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{4.13}$$

Subtraindo agora membro a membro as fórmulas (4.11), (4.12) obtemos,

$$e^{ix}-e^{-ix} = cos(x)+isen(x)-cos(x)+isen(x) = 2isen(x)$$

e podemos escrever

$$sen(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{4.14}$$

Exercício 7. Usar a fórmula de Euler para provar a igualdade

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x).$$

De (4.14) vem

$$sen(2x) = \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}.$$

Usando (4.13) e (4.14), temos

$$2sen(x)cos(x) = 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix}e^{ix}+e^{ix}e^{-ix}-e^{-ix}e^{ix}-e^{-ix}e^{-ix}}{2i}$$

Por ser $e^{ix}e^{ix}=e^{i2x}$, $e^{-ix}e^{-ix}=e^{-i2x}$, podemos escrever

$$2sen(x)cos(x) = \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} = sen(2x).$$