Sebenta de Cálculo I

Capítulo 3. Integrais de funções reais de variável real

Bragança, Dezembro 2021

Mário Abrantes

Matérias do Capítulo 3

Capítulo 3

Integrais de funções reais de variável real

1 Áreas de regiões planas

A *área* de uma região plana é um número não negativo associado ao tamanho da região. Sobre as áreas das regiões A e B na figura 1, dizemos que A tem uma área superior a B. Mas como se atribui um valor de área a uma dada região plana?

Para o fazer precisamos de ter um região de referência, cuja área tenha valor igual a 1, com a qual comparamos a região que queremos avaliar. A região de referência é um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento (ver figura 2). Se a unidade de comprimento for o metro, então define-se a área do quadrado como sendo de 1 *metro quadrado* ($1m^2$); se a unidade de comprimento for o centímetro, então define-se a área do quadrado como sendo de 1 *centímetro quadrado* ($1cm^2$), etc. Uma vez definida desta forma uma unidade para a área, torna-se fácil verificarmos que a área de um rectângulo de lados b e h é dada por bh, e que a área de um triângulo rectângulo de catetos b e h é igual a $bh/2$ (cf. figura 3).

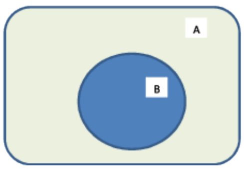

Figura 1

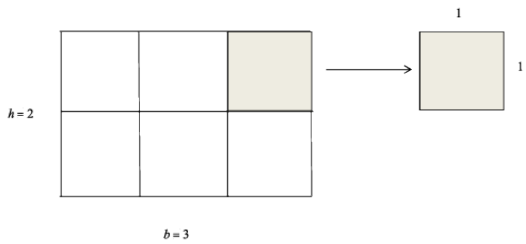

Figura 2: Área do rectângulo = $bh = 6$.

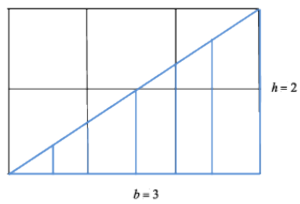

Figura 3: Área do triângulo = $bh/2 = 3$.

Podemos também verificar que $bh/2$ é a área de qualquer triângulo cujas altura e base tenham medidas respectivamente h e b. Observando a figura 4, podemos determinar a área do triângulo ACE subtraindo à área do rectângulo $ABDE$, de lados b e h, a soma das áreas dos triângulos rectângulos ABC e CDE.

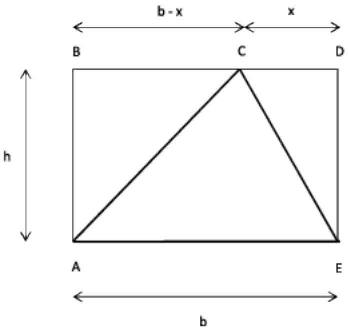

Figura 4

$$\begin{aligned}\text{Área }\ ACE &= \text{Área } ABDE - \left(\text{Área } ABC + \text{Área } CDE\right)\\ &= bh - \left(\frac{h(b-x)}{2} + \frac{xh}{2}\right) = bh - \frac{bh}{2} = \frac{bh}{2}\end{aligned}$$

1.1 Cálculo aproximado de áreas

Consideremos o problema de determinar a área de uma região plana definida pelo gráfico de uma função $f(x)$ e o eixo dos xx, no intervalo $[a,b]$. Como exemplo, tomemos região definida pelo gráfico da função $f(x) = \ln(x)$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[1,3]$ (figura 5). Seja A a área dessa região. Podemos obter uma aproximação desta área determinando um minorante m e um majorante M para o valor de A. Um majorante pode obter-se somando as áreas dos dois rectângulos marcados na figura 6. Como os rectângulos têm alturas $\ln(3)$ e $\ln(2)$, e têm ambos largura 1, a soma dos valores das suas áreas é $\ln(2) + \ln(3) \approx 1.80$.

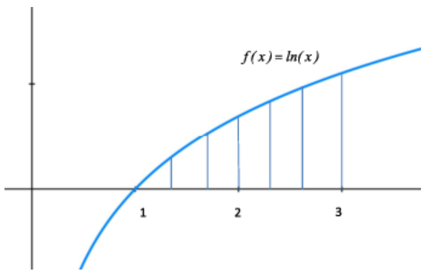

Figura 5

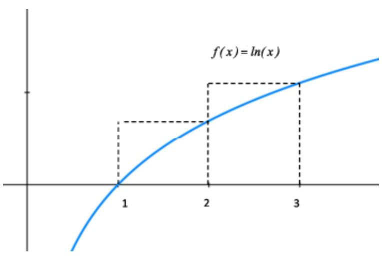

Figura 6

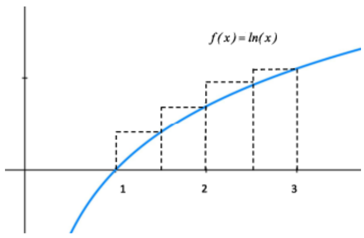

Figura 7

Um majorante melhor, M, pode obter-se usando mais rectângulos, como mostra a figura 7,

$$M = 0.5(\ln(1.5) + \ln(2) + \ln(2.5) + \ln(3)) \approx 1.56.$$

Por um procedimento semelhante, podemos obter um minorante, m, para o valor da área, somando as áreas dos três rectângulos da figura 8.

Obtemos $m = (\ln(1.5) + \ln(2) + \ln(2.5))0.5 \approx 1.007$. Podemos escrever $1.007 \leq A \leq 1.56$. Esta estimativa pode também ser melhorada usando mais rectângulos para calcular m e M.

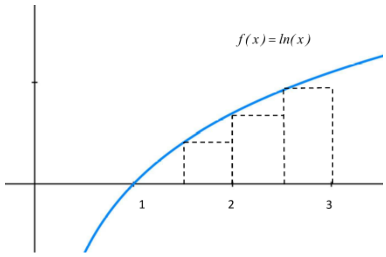

Figura 8

1.2 Aplicação do cálculo de áreas: consumo de energia eléctrica

A figura 9 representa uma placa com as características eléctricas de um certo dispositivo. Entre essas características podemos ler o valor da potência eléctrica, $1200W$. O 'W' significa $Watt$, que é a unidade de potência eléctrica. Uma vez ligado este dispositivo à corrente, a empresa que fornece energia contabiliza o consumo atendendo a dois factores: a potência do aparelho, em $watts$, e o tempo que este fica ligado, em $horas$. A unidade de energia correspondente é o $Watt.hora$.

Figura 9

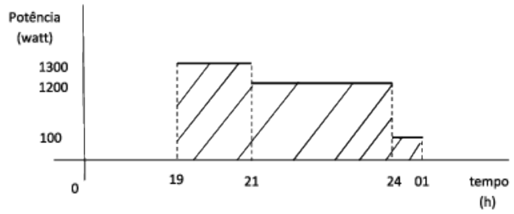

Figura 10

Assim, se o dispositivo estiver ligado $1h$, o consumo é de $1200Wh$, que se lê '1200 Watt-hora', ou $1.2kWh$, que se lê '1.2 kiloWatt-hora'. Se o dispositivo estiver ligado $2h$, o consumo energético é (potência × tempo) $= 1200 \times 2 = 2400Wh = 2.4kWh$. O custo da energia consumida é calculado multiplicando o valor da energia consumida pelo preço do kWh (que em 2017 ronda os 0.15€).

Exercício 1. Numa habitação são ligados os seguintes dispositivos eléctricos:

- uma lâmpada de $100W$ e um aquecedor de $1200W$, das $19h$ às $21h$;
- apenas o aquecedor de $1200W$, das $21h$ às $24h$;
- apenas a lâmpada de $100W$, das $24h$ à $01h$.

Sabendo que o preço do kWh é de 0.15€, qual a despesa do consumo de energia eléctrica das $19h$ às $01h$?

Resolução

A figura 10 contém um gráfico que representa a potência solicitada à rede eléctrica em função do tempo. Fazendo uso desta informação, obtemos os seguintes valores para a energia consumida.

das $19h$ às $21h$: lâmpada de $100W$+ aquecedor de $1200W$

$$\text{Energia} = (100 + 1200)W \times 2h = 2600Wh$$

das $21h$ às $24h$: aquecedor de $1200W$

$$\text{Energia} = 1200W \times 3h = 3600Wh$$

das $24h$ à $01h$: lâmpada de $100W$

$$\text{Energia} = 100W \times 1h = 100Wh$$

Notar que a energia calculada, por envolver o produto da potência eléctrica pelo tempo, corresponde à soma das áreas dos rectângulos na figura. A energia total consumida é de $2600 + 3600 + 100 = 6300Wh$ ou $6.3kWh$, cujo custo é igual a $6.3kWh \times 0.15€ \approx 0.95€$.

1.3 Função área

Seja $A(x)$ a função que determina a área da região do plano definida pelo gráfico de uma função $f(x)$ e o eixo dos xx, no intervalo $[0, x]$ (figura 11), sendo $f(x)$ contínua no intervalo $[0, x]$.

Vamos mostrar que a relação entre a função área $A(x)$ e a função $f(x)$ é $A'(x) = f(x)$, i.e.

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x). \tag{3.1}$$

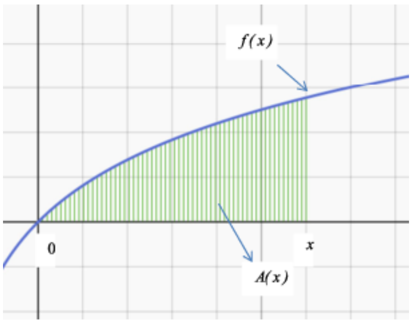

Figura 11

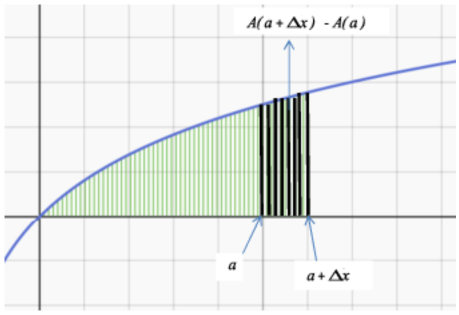

Figura 12

Consideremos a região correspondente ao intervalo $[a, a+\Delta x]$, sombreada na figura 12. Se o valor de Δx for suficiente pequeno, o gráfico de $f(x)$ pode considerar-se linear neste intervalo, o que nos permite aproximar, em termos do valor da área, a região sombreada na figura 12 pelo trapézio na figura 13.

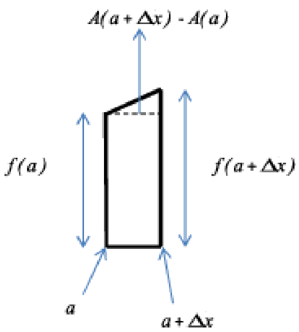

Figura 13

A área do trapézio é aproximadamente $A(a+\Delta x) - A(a)$, e obtém-se somando as áreas do triângulo e do rectângulo na figura 13.

$$\begin{aligned} A(a+\Delta x) - A(a) &\approx \text{Área do trapézio} \\ &= \text{Área do triângulo} + \text{Área do rectângulo} \\ &= \Delta x \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{2} + \Delta x f(a) \\ &= \Delta x \frac{f(a+\Delta x) + f(a)}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo este valor aproximado para $A(a+\Delta x) - A(a)$ na fórmula 3.1, temos

$$\begin{aligned} A'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(a+\Delta x) - A(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (f(a+\Delta x) + f(a))}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) + f(a)}{2} = \frac{2f(a)}{2} = f(a). \end{aligned}$$

Verificámos que $A'(a) = f(a)$. Como a é um ponto qualquer no qual $f(x)$ é contínua, podemos escrever $A'(x) = f(x)$ para qualquer ponto x.

Exemplo 1. Seja $f(x) = 2x$ (figura 14). Queremos determinar a função $A(x)$ que nos dá a área da região definida pelo gráfico de $f(x)$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[0, x]$. Sabemos que $A'(x) = f(x)$. Usando apenas esta condição, qualquer uma das três funções seguintes é candidata a ser $A(x)$.

$$A(x) = x^2$$
$$A(x) = x^2 - 2$$
$$A(x) = x^2 + \pi$$

De um modo geral, toda a função da forma $x^2 + C$, sendo C uma constante real qualquer, é candidata ser a função $A(x)$. Vamos verificar que apenas uma destas funções nos interessa. Para tal, usamos mais uma condição, para além de $A'(x) = f(x)$, que é $A(0) = 0$. A validade desta condição é imediata, sabendo que $A(0)$ representa a área da região correspondente ao intervalo $[0, 0]$, ou seja, a área de uma região de área nula. Usando a igualdade $A(0) = 0$, determinamos o valor do parâmetro C, na expressão $x^2 + C$,

$$A(0) = 0 \Leftrightarrow 0^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

A função pretendida é pois $A(x) = x^2$.

Vamos testar esta função, calculando $A(3)$. Este valor representa a área do triângulo cuja base tem medida 3, sendo a sua altura $f(3) = 2 \times 3 = 6$ (ver a figura 14). A área deste triângulo é igual a 9, o que confirma o valor $A(3) = 3^2 = 9$.

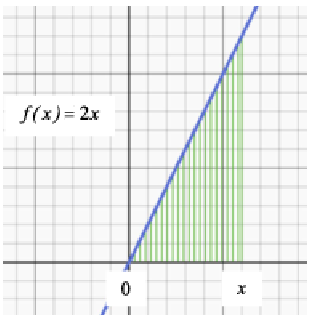

Figura 14

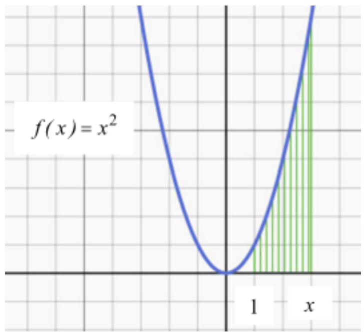

Figura 15

Exemplo 2. Seja $f(x) = x^2$ (figura 15). Queremos determinar a fórmula da função $A(x)$ que nos dá a área da região definida pelo gráfico da função e o eixo das abcissas, no intervalo $[1, x]$. Sabemos que $A'(x) = f(x)$, i.e., $A'(x) = x^2$. Analogamente ao exercício anterior, podemos escrever $A(x) = \frac{x^3}{3} + C$, com $C \in \mathbb{R}$. Para determinar o valor de C usamos a condição $A(1) = 0$, de que resulta $\frac{1^3}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1^3}{3}$ e $A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$. Usando esta última expressão podemos escrever $A(3) - A(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

2 Função primitiva. Integral indefinido de uma função

Nos exemplos 1 e 2, dada uma função $f(x)$, foi necessário calcular uma outra função, $A(x)$, sendo $A'(x) = f(x)$. Vale a seguinte definição.

Definição 1. Dada uma função $f(x)$, diz-se função primitiva de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, toda a função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 3. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. As funções $F_1(x) = \ln|x|$ e $F_2(x) = \ln|x| - 3$ são ambas funções primitivas de $f(x)$. É imediato verificar que a sua diferença é uma constante, $F_1(x) - F_2(x) = 3$.

Vale o seguinte resultado.

Teorema 1. Se F_1 e F_2 são duas primitivas de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, então a sua diferença $F_1 - F_2$ neste intervalo é uma constante.

Prova. Se F_1 e F_2 são duas primitivas de $f(x)$, então $F_1' = F_2' = f(x)$, o que implica que $F_1 - F_2$ seja uma constante, dado que $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0$.

□

Este enunciado significa que se conhermos uma primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, então qualquer outra primitiva pode ser escrita como $F(x) + C$, sendo C uma constante. Se uma função tiver uma primitiva, então tem infinitas primitivas.

Definição 2. Se $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, então a expressão $F(x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$, diz-se integral indefinido de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, e representa a família de todas as funções primitivas de $f(x)$. Escreve-se

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Deve ficar claro que o significado da expressão

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

é

$$F'(x) = f(x).$$

De forma equivalente podemos escrever

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

ou

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Exemplo 4.

1. $\int 2dx = 2x + C,$ porque $(2x + C)' = 2 + C' = 2$
2. $\int 2xsen(x^2)dx = -cos(x^2) + C,$ porque $\left(-cos(x^2) + C\right)' = (x^2)'sen(x^2) + C' = 2xsen(x^2)$
3. $\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| + C,$ porque $(2\ln|x| + C)' = 2(ln|x|)' + C' = \frac{2}{x}$

Vídeos. *3.1 a 3.4 (no anexo deste capítulo)*

3 Primitivação de algumas funções elementares

Nas expressões que se seguem, u representa uma função qualquer de x e C representa um parâmetro real.

1. $\int a dx = ax + C,$ sendo a uma constante.
2. $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \; n \in \mathbb{R}, \; n \neq -1$
3. $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$
4. $\int u' e^u dx = e^u + C$
5. $\int u' sen(u) dx = -cos(u) + C$
6. $\int u' cos(u) dx = sen(u) + C$
7. $\int \frac{u'}{1+u^2} = arctg(u) + C = -arcctg(u) + C$
8. $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = arcsen(u) + C = -arccos(u) + C$

Exemplo 5.

1. $\int 3dx = 3x + C$
2. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \; n \in \mathbb{R}, \; n \neq -1$
3. $\int \frac{2x}{x^2} dx = \ln(x^2) + C = 2\ln|x| + C$
4. $\int -e^{-1} dx = e^{-1} + C$
5. $\int -2sen(-2x) dx = -cos(-2x) + C$
6. $\int cos(x) dx = sen(x) + C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} = arctan(x) + C = -arccot(x) + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + C = -arccos(x) + C$

Vídeos. *3.5 a 3.9 (no anexo deste capítulo)*

4 Integral definido

O cálculo de áreas efectuado nos exemplos 1 e 2, pg. 6, pode ser resumido da seguinte maneira:

1. determinou-se o integral indefinido $A(x)$ da função $f(x)$ envolvida;

2. calculou-se a diferença de valores assumidos pela função $A(x)$ nos dois extremos do intervalo correspondente.

$$\begin{aligned}\text{Exemplo 1: Área } &= A(3)-A(0)=3^2+C-(0^2+C)=3^2-0^2=9\\ \text{Exemplo 2: Área } &= A(3)-A(1)=\frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right)=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}.\end{aligned}$$

Note-se que é irrelevante o valor de C, uma vez que o parâmetro é anulado na subtracção. Uma forma de indicar estas diferenças entre valores de primitivas é o seguinte.

$$\begin{aligned}\text{Exemplo 1: Área } &= A(3)-A(0)=\int_0^3 2x dx = x^2\Big|_0^3 = 3^2-0^2=9\\ \text{Exemplo 2: Área } &= A(3)-A(1)=\int_1^3 x^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}.\end{aligned}$$

Vale a seguinte definição.

`Dada uma função` $f(x)$ `e uma sua primitiva` $F(x)$ `no intervalo` $[a,b]$`, chama-se integral definido de` $f(x)$ `no intervalo` $[a,b]$ `à expressão` $\int_a^b f(x)dx$`, sendo`

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Exemplo 6. Dada a função $sen(x)$, o integral definido

$$\int_0^\pi sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^\pi = -cos(\pi)-(-cos(0)) = -(-1)-(-1)=2,$$

representa a área da região sombreada na figura 16. O integral

$$\int_\pi^{2\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_\pi^{2\pi} = -cos(2\pi)-(-cos(\pi)) = -1-(1)=-2,$$

representa o *simétrico* da área da região sombreada na figura 17. O integral

$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -cos(2\pi)-(-cos(0)) = -1-(-1)=0,$$

representa a soma dos dois integrais anteriores.

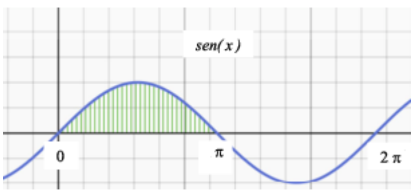

Figura 16

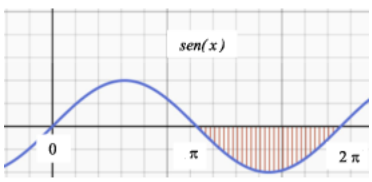

Figura 17

No caso geral o valor do integral $\int_a^b f(x)dx$ é igual à diferença entre a área da região acima do eixo das abcissas e a área da região abaixo do eixo das abcissas, definidas por este eixo e pelo gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ de valores de x.

4.1 Propriedades dos integrais definidos

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, se k é constante.
2. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$, se os integrais no segundo membro existem.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, sendo $c \in [a,b]$.
4. Se $f(x) \leq g(x)$ no intervalo $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. Se $m \leq f(x) \leq M$ no intervalo $[a,b]$, com $m, M \in \mathbb{R}$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
6. Teorema do valor médio (para integrais): Se $f(x)$ é contínua no intervalo no intervalo $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

A propriedade 5 pode ser usada para calcular um valor aproximado de um integral definido.

Vídeos. *3.10 a 3.12 (no anexo deste capítulo)*

4.2 Justificação da forma $\int_a^b f(x)dx$ para o integral definido

Na figura 18 está representado o gráfico de uma função $f(x)$ e está marcado o intervalo $[a,b]$ no eixo das abcissas. O intervalo está dividido em n partes iguais, cada uma de medida $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. A área da região definida pelo gráfico da função e pelo eixo das abcissas neste intervalo, é aproximadamente igual à soma das áreas dos n rectângulos aí representados,

$$\text{Área} \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x = \tag{3.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \tag{3.3}$$

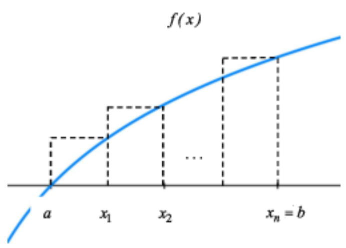

Figura 18

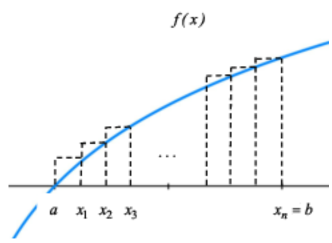

Figura 19

É fácil, no entanto, convencermo-nos de que esta é uma aproximação por excesso do valor exacto da área, porque as regiões junto dos cantos superiores esquerdos dos rectângulos estão fora da região definida pelo gráfico e pelo eixo das abcissas no intervalo $[a,b]$. Aumentando o número de rectângulos esta 'região em excesso' fica mais pequena e obtemos uma melhor aproximação para a área, como é sugerido pela figura 19. Se continuarmos a aumentar o número de rectângulos, vamos obtendo aproximações cada vez melhores para o valor exacto da área. Este valor não pode ser senão o que é obtido tomando uma infinidade de rectângulos. Vale a seguinte definição.

Definição 3. Se existir o limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x,$$

diz-se que a função $f(x)$ é integrável sobre o intervalo $[a,b]$ e o valor de L diz-se integral definido de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$. Escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

A notação $\int_a^b f(x)dx$ traduz a existência do limite acima referido, sendo que o símbolo '$\int$' remete para '$\sum$' e o diferencial 'dx' remete para a largura 'Δx' dos rectângulos (figura 19).

Vídeo . *3.13 (no anexo deste capítulo)*

4.3 Teorema fundamental do cálculo

Nos exemplos da secção 1.3, pg. 5, calculámos áreas de regiões definidas por gráficos de funções usando as primitivas das funções envolvidas. No entanto, nem todas as áreas definidas por gráficos de funções se podem calcular usando as primitivas dessas funções, pela razão de nem todas as funções admitirem uma função primitiva.

Como exemplo, consideremos a função da figura 20. Claramente podemos calcular a área $A(x)$ definida pelo gráfico da função e o eixo das abcissas no intervalo $[0,x]$, $x \geq 0$. Temos

$$A(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & ,\, x<3 \\ x-3 & ,\, x \geq 3 \end{cases}$$

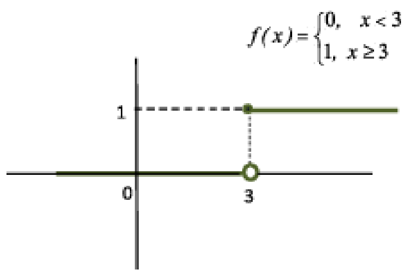

Figura 20

dado que se $x<3$ a função é nula e se $x \geq 3$ a região com área não nula é um rectângulo de largura $x-3$ e altura 1. No entanto a função $f(x)$ não tem uma função primitiva $F(x)$ em nenhum intervalo $[0,x]$ contendo o ponto $x=3$, porque teria que ser $F'(x) = f(x)$ e pode mostrar-se que uma função derivada não tem descontinuidades de 1ª espécie (a função $f(x)$ da figura tem uma descontinuidade de 1ª espécie no ponto $x=3$). Resumindo, não existe uma função $F(x)$ cuja derivada seja $f(x)$.

O que podemos dizer, usando como base este exemplo, é que o integral $\int_a^b f(x)dx$ pode existir mas não ser calculável usando primitivação. Em que condições podemos garantir que uma função tem primitiva? O resultado seguinte diz-nos que basta $f(x)$ ser contínua num dado intervalo para admitir aí uma função primitiva $F(x)$.

Teorema 2. Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$, então existe uma função $F(x)$ derivável tal que $F'(x) = f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Sempre que uma função $f(x)$ tem uma primitiva $F(x)$ num dado intervalo, podemos calcular áreas ou, mais geralmente, integrais definidos envolvendo a função, usando a primitiva $F(x)$. Isto é garantido pelo seguinte teorema.

Teorema 3. (Teorema fundamental do Cálculo) Se uma função $f(x)$, integrável sobre o intervalo $[a,b]$, possui uma primitiva $F(x)$ nesse intervalo, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Vídeo . *3.14 (no anexo deste capítulo)*

5 Técnicas de integração

A operação de integração é, em geral, mais difícil do que a operação de derivação. Nesta secção vamos estudar duas técnicas de primitivação, designadas *primitivação por substituição* e *primitivação por partes.* O propósito mais geral de ambos os métodos é o cálculo de uma primitiva que não conhecemos usando primitivas já conhecidas.

5.1 Primitivação por substituição

Seja por exemplo a integral $I=\int\sqrt{1-x}dx$. É imediato verificarmos a semelhança desta expressão com $\int\sqrt{x}dx$, cuja solução sabemos ser $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$. Vamos transformar a integral I de modo a que fique do tipo $\int\sqrt{x}dx$. Começamos por fazer a substituição $u=1-x$. Derivamos agora ambos os membros desta igualdade em ordem a x,

$$u'=(1-x)' \Leftrightarrow u'=-1.$$

Substituindo u' por $\frac{du}{dx}$, podemos escrever

$$\frac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du.$$

Substituimos agora as expressões na variável x, no integral I, pelas correspondentes expressões na variável u, de modo a obter um integral na variável u.

$$I=\int\sqrt{1-x}dx=\int\sqrt{u}(-du)=\int-\sqrt{u}du=-\int\sqrt{u}du$$

Esta substituição permitiu transformar o integral $\int\sqrt{1-x}dx$ no integral $-\int\sqrt{u}du$ que, por ser do tipo de $\int\sqrt{x}dx$, já sabemos resolver,

$$-\int\sqrt{u}du=-\frac{2}{3}u^{3/2}+C.$$

Revertendo agora este resultado em u para a expressão em x correspondente, temos

$$I=-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+C.$$

A justificação do que se fez neste exemplo é a seguinte.

1. Começamos por substituir no integral I a expressão $f(x)=\sqrt{1-x}$ por $\sqrt{u}$, com $u=x-1$. Chamemos $g(u)$ à função obtida, isto é, $g(u)=\sqrt{u}$; note-se que $g(u)$ é a função $f(x)$ 'disfarçada', porque sabemos que se fizermos $u=1-x$ em $g(u)$ recuperamos $f(x)$.

2. Trocamos também dx por $\frac{du}{u'}$. Resulta o integral
$$\int g(u)\frac{du}{u'} = \int \frac{g(u)}{u'}du.$$

3. Resolvendo o integral $\int \frac{g(u)}{u'}du$ obtemos
$$\int \frac{g(u)}{u'}du = G(u) + C.$$

4. Sabemos, pelo significado do integral indefinido, que $G'(u) = \frac{g(u)}{u'}$. Derivando $G(u)$ em ordem a x, usando a regra da derivada da função composta, temos $\frac{dG(u)}{dx} = G'(u)u'$, sendo $G'(u)$ a derivada de $G(u)$ em ordem a u e u' a derivada de u em ordem a x. Por ser $G'(u) = \frac{g(u)}{u'}$, podemos escrever
$$\frac{dG(u)}{dx} = \frac{g(u)}{u'}u' = g(u).$$
Como $g(u)$ representa $f(x)$, verificamos que substituindo em $G(u)$ u pela expressão em x correspondente, obtemos uma primitiva de $f(x)$.

Exercício 2. Calcular o integral $I = \int 5x\sqrt{1-x^2}dx$, usando a substituição $u = 1-x^2$.
Resolução
Temos $u' = \frac{du}{dx} = (1-x^2)' = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-2x}$. Fazendo a substituição em I para obtermos um integral na variável u, fica
$$I = \int 5x\sqrt{u}\frac{du}{-2x} = \int \frac{5x}{-2x}\sqrt{u}du = \int -\frac{5}{2}\sqrt{u}du = -\frac{5}{2}\int \sqrt{u}du,$$
cuja solução é
$$I = -\frac{5}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{5}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{5}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$
(verificar!)

Vídeos. *3.15, 3.16 (no anexo deste capítulo)*

5.2 Primitivação por partes

A técnica de primitivação por partes permite resolver alguns integrais do tipo $\int f(x)g(x)dx$ (nota:é errado escrever $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$!!). Para começo, sejam u e v duas funções de x. Sabemos que
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
Integrando ambos os membros desta expressão, obtemos
$$\int (uv)'dx = \int u'v dx + \int uv'dx,$$
que pode ainda ser escrita na forma (porquê?)
$$uv = \int u'v dx + \int uv'dx.$$

Podemos resolver esta igualdade em ordem a cada um dos integrais, o que dá

$$\int u' v dx = uv - \int uv' dx \tag{3.4}$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx. \tag{3.5}$$

Estas duas fórmulas podem ser usadas para resolver integrais do tipo $\int f(x)g(x)dx$, identificando f e g com u' e v, ou com u e v', e usando o segundo membro da igualdade escolhida para calcular o integral inicial, esperando que o integral no segundo membro seja mais simples que o integral que pretendemos calcular. Este é, em geral, o propósito deste método.

Exemplo 7. Primitivar por partes os integrais

1. $\int xe^x dx$

2. $\int e^x sen(x) dx$

3. $\int ln(x) dx.$

<u>Resolução</u>

1. $\int xe^x dx$
   Seja $u = x,\ v' = e^x$. Estamos a escolher a fórmula (3.5) acima. Para escrevermos o segundo membro precisamos de determinar u' e v. Temos $u' = 1,\ v = e^x$, e podemos escrever
   $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$
   Verificação: derivando $xe^x - e^x + C$, obtém-se a função integranda xe^x.

2. $I = \int e^x sen(x) dx$
   Seja $u' = e^x,\ v = sen(x)$. Estamos a escolher a fórmula (3.4) acima. Para escrevermos o segundo membro precisamos de determinar u e v'. Temos $u = e^x,\ v' = cos(x)$, e podemos escrever
   $$I = \int e^x sen(x) dx = e^x sen(x) - \int e^x cos(x) dx.$$
   O integral que aparece no segundo membro não é mais simples que o integral inicial. Mas usamos este exemplo para mostrar a versatilidade do método, calculando também por partes este segundo integral. Escolhemos novamente a fórmula (3.4). Seja $I_1 = \int e^x cos(x) dx$ e $u' = e^x,\ v = cos(x)$. Temos $u = e^x,\ v' = -sen(x)$. Usando a fórmula (3.4), temos
   $$\int e^x cos(x) dx = e^x cos(x) + \int e^x sen(x) dx.$$
   Subsituindo o segundo membro desta expressão na expressão do integral I, temos
   $$\begin{aligned} I = \int e^x sen(x) dx &= e^x sen(x) - \left(e^x cos(x) + \int e^x sen(x) dx\right) \\ &= e^x sen(x) - e^x cos(x) - \int e^x sen(x) dx. \end{aligned}$$

Passando o integral do segundo para o primeiro membro, fica

$$\begin{aligned} \int e^x sen(x)dx + \int e^x sen(x)dx &= e^x sen(x) - e^x cos(x) \\ \Leftrightarrow 2\int e^x sen(x)dx &= e^x sen(x) - e^x cos(x) \end{aligned}$$

e por fim

$$\int e^x sen(x)dx = \frac{1}{2}\left(e^x sen(x) - e^x cos(x)\right) + C.$$

Verificação: derivando $\frac{1}{2}\left(e^x sen(x) - e^x cos(x)\right)$, obtém-se a função integranda $e^x sen(x)$.

3. $\int ln(x)dx$
   Como $\ln(x) = 1.ln(x)$, podemos fazer $u' = 1,\ v = \ln(x)$. Estamos a escolher a fórmula (3.4) acima. Para escrevermos o segundo membro precisamos de determinar u e v'. Temos $u = x,\ v' = \frac{1}{x}$, e podemos escrever

$$\int ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C.$$

   Verificação: derivando $x\ln(x) - x + C$, obtém-se a função integranda $ln(x)$.

Vídeos . *3.17, 3.18 (no anexo deste capítulo)*

5.3 Integrais que não são funções elementares

Há funções cujo integral não corresponde a uma função elementar, i.e., não se pode escrever como um número finito de somas, subtracções, multiplicações, divisões, ou composições, sobre funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, ou funções trigonométricas directas, ou inversas. Isto significa que não conseguimos integrar funções deste tipo, nem por substituição nem por partes, por muito que tentemos fazê-lo com êxito. Alguns exemplos de integrais deste tipo são

$$\int sen(x^2)dx,\ \int cos(x^2)dx,\ \int \frac{1}{ln(x)}dx,\ \int e^{-x^2/2}dx,\ \int \ln(\ln(x))dx,\ \int \frac{e^x}{x}dx.$$

6 Integrais impróprios

Consideremos o problema de calcular a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[1, b]$, com $b \geq 1$ (figura 21). Obtém-se

$$\int_1^b 1/x^2 dx = -1/x\Big|_1^b = -1/b + 1.$$

Se $b = 2$, por exemplo, o valor da área é $-1/2 + 1 = 1/2$, se $b = 5$ o valor da área é $-1/5 + 1 = 4/5$, etc.

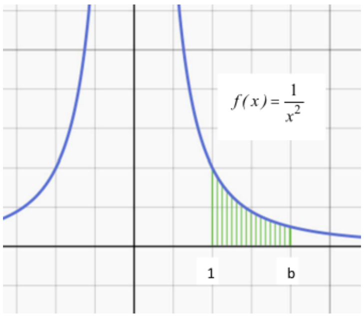

Figura 21

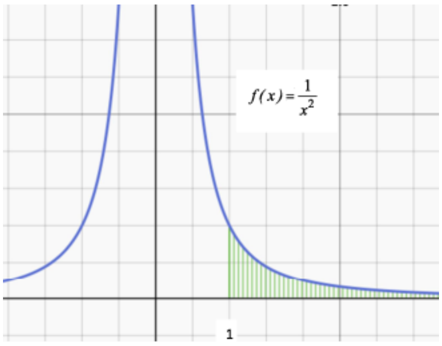

Figura 22

Tem interesse averiguar como evolui o valor da área se formos aumentando b. Em particular, será finita ou infinita a área obtida quando b tende para $+\infty$? A região correspondente está sombreada na figura 22 e o seu valor é dado pelo limite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b 1/x^2 dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-1/b+1\right) = 1.$$

Este resultado é curioso porque significa que a região definida pelo gráfico da função e o eixo dos xx, no intervalo $[1,+\infty[$, apesar de ilimitada, tem área finita. Podemos expressar a operação de limite seguida de integral

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b 1/x^2 dx$$

na forma mais compacta

$$\int_1^{+\infty} 1/x^2 dx.$$

Este é um exemplo de um *integral impróprio de 1ª espécie*. Vale a seguinte definição.

Definição 4. Um integral $\int_a^b f(x)dx$ diz-se integral impróprio de 1ª espécie, se $b=+\infty$, ou $a=-\infty$, ou ambas.

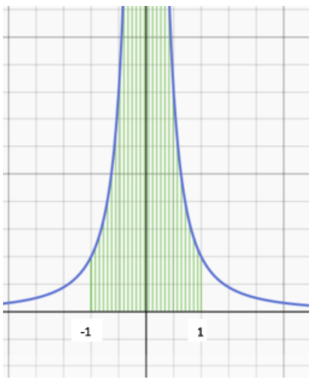

Figura 23

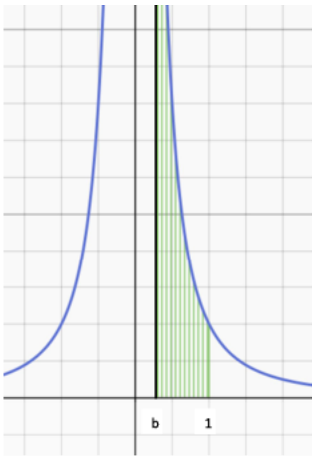

Figura 24

Consideremos agora o problema de calcular a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x)=1/x^2$ e o eixo das abcissas, no intervalo $[-1,1]$ (figura 23). Se para tal usarmos 'despreocupadamente' um integral definido, como fizemos em exemplos anteriores, obtemos

$$\int_{-1}^1 1/x^2 dx = -1/x\Big|_{-1}^1 = -1/1-(-1/(-1)) = -1-1 = -2.$$

Mas este não é o resultado que esperávamos, uma vez que a região envolvida não tem partes abaixo do eixo das abcissas, o que significa que o valor do integral deveria ser positivo. O problema com este resultado, que utiliza o teorema fundamental do cálculo (teorema 3, pg. 12), é que este teorema supõe que a função integranda é limitada no intervalo de integração, o que não acontece com a função $1/x^2$ no intervalo $[-1,1]$, dado que esta tem uma assíntota vertical no ponto $x=0$.

Como calcular o valor duma área numa situação deste tipo? Uma forma de o fazer está sugerida na figura 24. Vamos calcular a área respeitante ao intervalo $[0,1]$ e depois, dado a função ser par, multiplicar por 2 o valor da área obtido. Como o ponto $x=0$ é um ponto em que a função é ilimitada, em vez de calcularmos a integral $\int_0^1 1/x^2 dx$, calculamos a integral $\int_b^1 1/x^2 dx$, sendo que b é um valor um pouco maior que zero:

$$\int_b^1 1/x^2 dx = -1/x\Big|_b^1 = -1+1/b.$$

Fazendo agora b tender para zero obtém-se:

$$\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 1/x^2 dx = \lim_{b\to 0^+}\left(-1+1/b\right) = +\infty,$$

o que é bem diferente do valor negativo obtido acima. Um integral em que a função é ilimitada em algum ponto do intervalo de integração, diz-se *integral impróprio de 2ª espécie*. Valem as seguintes definições.

Definição 5. Um integral $\int_a^b f(x)dx$ diz-se integral impróprio de 2ª espécie, se $f(x)$ é ilimitada em algum ponto do intervalo $[a,b]$. Um integral $\int_a^b f(x)dx$ diz-se integral impróprio de 3ª espécie, se é simultaneamente de 1ª espécie e de 2ª espécie.

Exercício 3. Calcular o integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Resolução

O integral é de 2ª espécie, uma vez que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ é ilimitada no ponto $x=0$. Temos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 x^{-1/2}dx = \lim_{b\to 0^+}\left(2x^{1/2}\right)\Big|_b^1 = \lim_{b\to 0^+}\left(2-2b^{1/2}\right) = 2.$$

Anexo: Vídeos

Primitivação, Integral Indefinido

3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
Integral indefinido: notação [03:22]	Exercícios - 1 [09:40]	Exercícios - 2 [05:35]	Expressões integrais e diferenciais [05:32]	Tabela de integrais [15:43]
3.6	3.7	3.8	3.9	
Integral indef., exercícios 1: [10:24]	Integral indef., exercícios 2: [14:05]	Integral indef., exercícios 3: [14:11]	Integral indef., exercícios 4: [11:04]	

Integral definido, Cálculo de áreas, Teorema Fundamental do Cálculo

3.10	3.11	3.12	3.13	3.14
Integral definido, exercícios - 1 [15:19]	Integral definido, exercícios - 2 [08:42]	Cálculo de áreas [05:37]	Integral de Riemann [06:21]	Teorema Fundamental do Cálculo [08:41]

Integração por Substituição e por Partes

3.15	3.16	3.17	3.18
Integração por substituição - 1 [09:55]	Integração por substituição - 2 [08:27]	Integração por partes - 1 [13:14]	Integração por partes - 2 [05:04]