Sebenta de Cálculo I

Capítulo 2. Funções Reais de Uma Variável Real. Derivadas.

Bragança, Outubro 2021
Mário Abrantes

Matérias do Capítulo 2

2 Funções Reais de Variável Real **3**
1 Noções elementares . . . 3
1.1 Definição de função . . . 3
1.2 Gráfico de uma função . . . 6
1.3 Classificação das funções quanto à sua representação analítica . . . 8
1.4 Operações sobre funções . . . 8
Operações racionais. . . . 8
Função composta . . . 9
Função inversa . . . 10
1.5 Funções elementares . . . 11
Funções constantes . . . 11
Funções potência . . . 11
Funções exponenciais . . . 12
Funções logarítmicas . . . 12
Funções trigonométricas directas . . . 13
Funções trigonométricas inversas . . . 14
2 Sequências numéricas . . . 15
2.1 Vizinhança de um número real . . . 15
2.2 Definição de sequência numérica . . . 16
2.3 Limite de uma sequência numérica . . . 18
Limites infinitos . . . 18
Alguns teoremas sobre limites de sequências numéricas . . . 19
3 Funções contínuas . . . 20
3.1 Limite de uma função . . . 20
3.1.1 Limites laterais . . . 20
3.1.2 Alguns teoremas sobre limites de funções . . . 21
3.1.3 Limites no infinito . . . 22
3.2 Função contínua . . . 22
3.2.1 Alguns teoremas sobre continuidade . . . 24

3 Derivadas de Funções Reais de Variável Real **26**
1 Função derivada . . . 26
1.1 Taxa de variação média de uma função . . . 26
1.2 Taxa de variação instantânea de uma função. Função derivada . . . 28
1.3 Derivadas laterais . . . 32
2 Derivadas de algumas funções elementares. Regras de derivação . . . 33
2.1 Derivadas de algumas funções elementares . . . 34
Funções constantes . . . 34
Funções potência . . . 34
Funções exponenciais . . . 35
Funções logarítmicas . . . 36
Funções trigonométricas directas . . . 36
2.2 Derivadas de somas, produtos e divisões de funções . . . 37
2.3 Derivada da função composta . . . 39
2.4 Derivada da função inversa . . . 39
3 Teoremas relativos a funções deriváveis . . . 41
4 Derivadas de ordem superior . . . 41
5 Derivada da função implícita . . . 42

Capítulo 2

Funções Reais de Variável Real

1 Noções elementares

1.1 Definição de função

Uma função representa uma relação entre grandezas numéricas. As funções que vamos estudar neste capítulo relacionam apenas duas grandezas numérias, sejam elas x e y, e escrevem-se geralmente da forma $y = f(x)$. Esta expressão deve ser lida da seguinte forma (figura 1):

- f é a designação (o nome) da função, sendo x e y as designações das grandezas que a função relaciona. Podem usar-se quaisquer outras letras, ou sequências de letras, para os nomes da função e das grandezas relacionadas;

- x representa cada elemento de um conjunto de valores que conhecemos. Designa-se por *variável independente*, uma vez que o seu valor pode ser escolhido livremente nesse conjunto de números;

- y representa o valor assumido pela expressão $f(x)$. Designa-se por *variável dependente*, uma vez que o seu valor não pode ser escolhido livremente, dependendo do valor de x e da fórmula $y = f(x)$. A cada valor de x corresponde um só valor de y.

Se x só pode assumir valores reais, a função diz-se *de variável real*. Se y também só assumir valores reais, a função diz-se *real*. Em resumo, uma função $y = f(x)$ em que tanto y quanto x tomam apenas valores reais, diz-se *função real de varável real*.

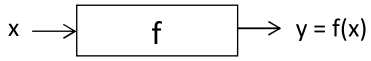

Figura 1: Uma função pode ser vista como uma máquina que recebe x e produz $f(x)$.

Vídeo . *2.1 (no anexo deste capítulo)*

Exemplo 1.

1. O termómetro representado na figura 2, relaciona a *temperatura* ambiente T com a *altura h* de uma coluna de mercúrio. A escala na esquerda do termómetro representa a temperatura em graus *Celsius* ($^\circ C$), usada na Europa; a escala na direita representa a temperatura em graus *Fahrenheit* ($^\circ F$), usada nos Estados Unidos da América. A

temperatura y, em graus *Fahrenheit*, e a temperatura x, em graus *Celsius*, relacionam-se por meio da função,

$$y = 1.8x + 32.$$

Por exemplo, a $x = 20$ graus Celsius correspondem $y = 68$ graus Fahrenheit.

2. A distância d, em quilómetros, percorrida por um automóvel, e o tempo t de duração de uma viagem, em horas, relacionam-se por uma função que tem a representação genérica $d = f(t)$. Se o automóvel se desloca à velocidade constante de $50km/h$, a função que relaciona a distância percorrida, d, com duração do percurso, t, é dada por

$$d = 50t.$$

Se a duração da viagem for de $t = 1.5$ horas, a distância percorrida é $d = 50 \times 1.5 = 75$ quilómetros. Se suposermos que o automóvel, quando inicia uma viagem à velocidade constante de $50km/h$, se encontra já à distância de $80km$ do local L realtivamente ao qual se mede a distância d, obtemos a seguinte função para d em função do tempo de viagem, t

$$d = 50t + 80.$$

Uma hora depois de iniciada a viagem, a distância a que o automóvel se encontra do local L é $d = 50 \times 1 + 80 = 130km$.

3. Seja $q = f(p)$ a função relaciona o número de unidades vendidas, q, de um certo produto, com o preço de mercado p de cada unidade desse produto. Quanto menor for o preço de cada unidade, maior tende a ser o número de unidades vendidas, porque o que é mais barato vende geralmente mais. Uma função deste tipo designa-se por *função de procura* do produto. Suponhamos que se tem

$$q = 400 - 3p.$$

Esta função diz-nos que se o preço por unidade do produto for $p = 4€$, então $q = 400 - 3 \times 4 = 388$, o que significa que são vendidas 388 unidades do produto.

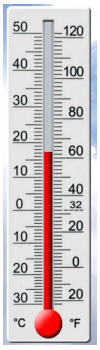

Figura 2: Termómetro de mercúrio.[1]

Podemos agora estabelecer uma ideia mais formal de função, que vai ser útil no nosso estudo. Uma função $y = f(x)$ é definida por três entidades:

[1] (https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bti.tempMeter).

1. o conjunto A de valores que a variável independente x pode assumir, designado por *domínio* da função. Os elementos do domínio designam-se por *objectos* da função. No caso da função no ponto 1 do exemplo anterior, o domínio é o conjunto das temperaturas ambiente possíveis. Por exemplo, pode ser razoável, num dado local, tomar como domínio o conjunto $[-5,35]$ (graus Celsius);

2. um conjunto B que contém todos os valores que a variável dependente y pode assumir (podendo conter outros elementos), designado por *contradomínio* da função. *Imagem* de uma função, é o conjunto dos valores efectivamente assumidos pela função;

3. uma regra que exprime o modo como cada valor de x é feito corresponder à sua imagem y (em geral esta regra é descrita por meio de uma equação).

Para se indicar que uma função f tem por domínio o conjunto A e por contradomínio o conjunto B, escreve-se $f : A \to B$.

Exemplo 2.

1. A função que exprime a distância de um veículo ao ponto de início de uma viagem (ponto 2. do exemplo 1), $d = 50t + 80$, pode ser definida da forma

$$d : \mathbb{R}_0^+ \to [80, +\infty[, \quad d(t) = 50t + 80.$$

   Esta função é um *modelo matemático* do movimento do veículo. Podemos usá-la para conhecer, em qualquer instante t, a posição do veículo relativamente ao ponto de partida. Mas não é o único modelo possível. Podemos estar interessados em conhecer a posição do veículo apenas durante as primeiras $2h$ do seu movimento, que é dada pela função

$$d : [0,2] \to [80,180], \quad d(t) = 50t + 80.$$

2. A função que exprime o volume v de uma esfera em função do seu raio r é

$$v : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

3. A relação definida no esquema da figura 3 não representa uma função de A em B, porque ao elemento 1 no conjunto A corresponde, por f, mais do que um elemento em B. Certos autores designam relações deste tipo por *funções plurívocas* (um objecto pode ter várias imagens). No nosso estudo usamos o termo *função* para referir uma relação unívoca do domínio para o contradomínio.

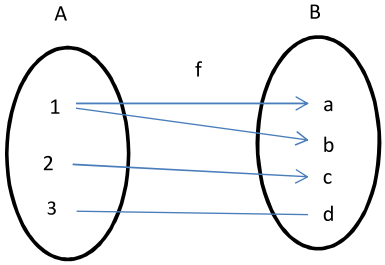

Figura 3: f define uma relação entre conjuntos que não é *unívoca* de A para B.

É importante salientar que, ao definir-se uma variável y como função de outra variável x, tal como aqui o fazemos, é entendido que a cada valor do domínio assumido pela variável x corresponde *um só valor* do contradomínio assumido pela variável y.

Dada uma função $y = f(x)$ definida num intervalo I de números reais, se para quaisquer dois valores $a, b \in I$ se verifica:

- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, então diz-se que a função f é *crescente* no intervalo I;
- $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, então diz-se que a função f é *decrescente* no intervalo I;
- $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, então diz-se que a função f é *não decrescente* no intervalo I;
- $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, então diz-se que a função f é *não crescente* no intervalo I.

A função f diz-se *monótona* se é de algum dos 4 tipos anteriores.

Exemplo 3. A funçao representada na figura 4: é crescente no intervalo (a,b) e no intervalo (c,d); é não decrescente no intervalo (a,c); é decrescente no intervalo (d,e).

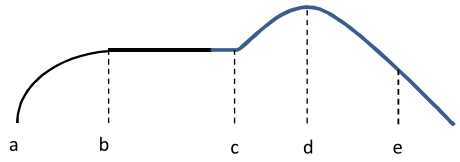

Figura 4

Exemplo 4. A funçao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ é crescente em todo o seu domínio porque $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

1.2 Gráfico de uma função

Gráfico de uma função $y = f(x)$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$, $x \in D_f$, sendo D_f o domínio da função. O gráfico de uma função real de variável real é pois um conjunto de pares de números reais, embora normalmente se designe também por gráfico da função qualquer representação deste conjunto de pontos num referencial cartesiano.

Exemplo 5. O gráfico da função $f(x) = x^2$ é o conjunto que contém, entre outros, os elementos (x, y) seguintes: $(1,1)$, $(-3,9)$, $(0.1, 0.01)$, isto é, pares ordenados da forma (x, x^2), com $x \in \mathbb{R}$.

Uma função $f : A \to B$ diz-se

- *Injectiva,* se cada elemento $y \in B$ é imagem de apenas um elemento de $x \in A$. A função representada na figura 5 não é injectiva.[2]
- *Sobrejectiva,* se cada elemento $y \in B$ é imagem de algum elemento do domínio A. Dito de outra forma, f é sobrejectiva se a imagem de f e o contradomínio de f são conjuntos iguais. A função representada na figura 5 não é sobrejectiva porque o elemento b (por exemplo) do contradomínio não pertence à imagem da função. A função representada na figura 6 é sobrejectiva;

[2] Não confundir a definição de *função injectiva* com a definição de *função unívoca* (ver ponto 3 do exemplo 2).

- *Bijectiva,* se é injectiva e sobrejectiva (ver figura 6).

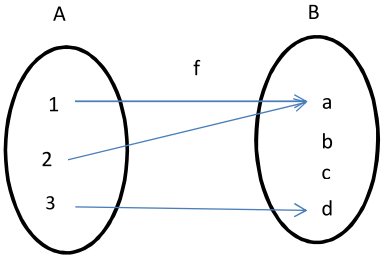

Figura 5: f não é injectiva porque os objectos 1 e 2 têm a mesma imagem, i.e., $f(1) = f(2) = a$.

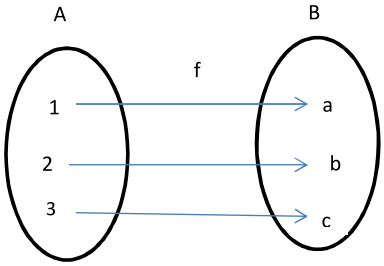

Figura 6: f é bijectiva.

Exemplo 6.

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$, representada na figura 7, não é injectiva, porque o seu domínio possui elementos diferentes que têm a mesma imagem. Por exemplo, $x = -2$ e $x = 2$ pertencem ao domínio da função, e $f(-2) = (-2)^2 = 4 = f(2)$.

2. A função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$, representada na figura 8, é injectiva, porque o seu domínio não possui elementos diferentes que tenham a mesma imagem.

As funções são ambas sobrejectivas

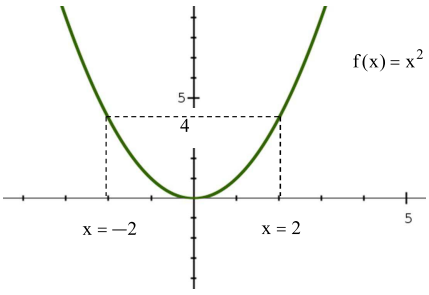

Figura 7: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$.

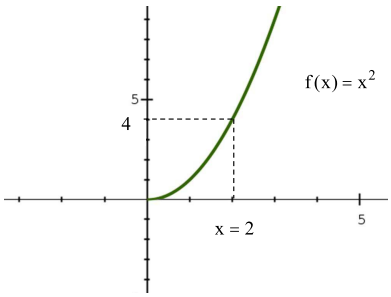

Figura 8: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$.

Exemplo 7. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \ln(x)$, não é sobrejectiva (figura 9), porque o seu contradomínio possui elementos que não são imagem de algum elemento do domínio. Por exemplo, nenhum dos valores do intervalo $\big(\ln(2), \ln(3)\big)$ pertence à imagem da função.

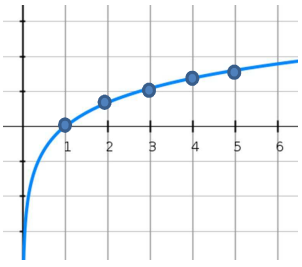

Figura 9: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \ln(x)$.

Vídeos . *2.2 a 2.7 (no anexo deste capítulo)*

1.3 Classificação das funções quanto à sua representação analítica

As funções admitem uma classificação quanto à sua *representação analítica*, i.e., quanto ao tipo de expressão matemática $f(x)$ que lhes corresponde.

1. *Funções algébricas:* são representadas por *expressões algébricas* numa dada variável, ou seja, expressões envolvendo um número finito de adições, subtracções, multiplicações, divisões e extracções de raiz. As funções algébricas podem ser de dois tipos:

   (a) *Racionais:* nas operações com raízes, os radicandos não contêm a variável x. As funções racionais podem ainda classificar-se como:
   - *funções inteiras* (ou *polinómios*)
   $$y = 2x^3 - 3x + 2 \qquad y = \sqrt{3}x^5 - \frac{3}{4}x^3 \qquad y = 3;$$
   - *funções fraccionárias* (divisões de polinómios): esta classe de funções contém as funções inteiras;
   $$y = x^4 - 3x + 2 \qquad y = \frac{1-x}{x^2+2x} \qquad y = \frac{2}{x-3}$$

   (b) *Irracionais:* nas operações com raízes, há radicandos que contêm a variável x.
   $$y = 1 - \sqrt[3]{x} \qquad y = \frac{1-x}{2+\sqrt[5]{1-x}} \qquad y = 1 - x^{\frac{1}{4}}.$$

2. *Funções transcendentes:* são as funções que não são algébricas.
   $$y = e^x \qquad y = \ln(x) \qquad y = sen(x).$$

1.4 Operações sobre funções

Operações racionais.
Sejam f e g duas funções quaisquer, de domínios D_f e D_g e contradomínios CD_f e CD_g. Definem-se as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão destas duas funções do modo seguinte.

- Adição / Subtracção: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D_{(f\pm g)} = D_f \cap D_g$.
- Multiplicação: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad D_{(f\cdot g)} = D_f \cap D_g$.
- Divisão: $(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad D_{(f/g)} = (D_f \cap D_g) \setminus \{\text{zeros de } g(x)\}$.

Exemplo 8. Para as funções
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = x^2$$
$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad g(x) = \sqrt{x}$$
temos

- $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x}, \quad D_{(f+g)} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+$.
- $(f \cdot g)(x) = x^2\sqrt{x} = x^{5/2}, \quad D_{(f\cdot g)} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+$.
- $(f/g)(x) = x^2/\sqrt{x} = x^{3/2}, \quad D_{(f/g)} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_0^+) \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+$.

Vídeo . *2.8 (no anexo deste capítulo)*

Função composta
Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções. Define-se a função $(g \circ f)(x)$, que se lê "*função composta* de f com g" ou "g após f", da forma

$$(g \circ f) : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Exemplo 9. A figura 10 representa a composição $(g \circ f)(x)$ de duas funções f e g. Pode observar-se que

$$f(4) = 2 \quad g(2) = 3,$$

e por isso

$$(g \circ f)(4) = g\big(f(4)\big) = g(2) = 3.$$

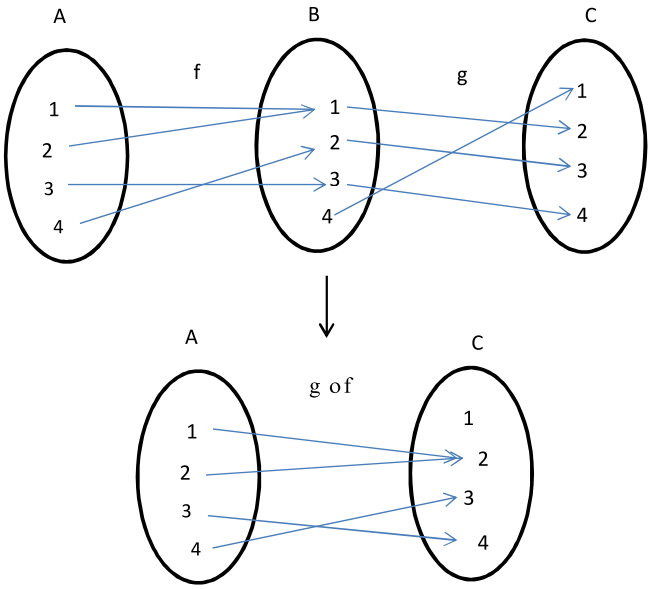

Figura 10: Função composta.

Para podermos definir a função composta de f com g, não é necessário que a imagem de f e o domínio de g sejam iguais, bastando que a primeira esteja contido no segundo, i.e. $Imagem_f \subset D_g$.

Exercício 1. Calcular $(g \circ f)(1)$ usando os dados da figura 10.

Exemplo 10. Dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 1$ e $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = \sqrt{x}$, podemos escrever a função composta de g com f

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1 = 2x - \sqrt{x} + 1, \; D_{f \circ g} = \mathbb{R}_0^+,$$

e podemos também escrever a função composta de f com g

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{2x^2 - x + 1}.$$

Verificamos assim que, em geral, se tem $f \circ g \neq g \circ f$.

Podemos compor um número qualquer de funções.

Exemplo 11. Considerar as funções $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Temos

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x) = f\big(g(h(x))\big).$$

Como $g(h(x)) = 3\sqrt{x}$, fica $f\big(g(h(x))\big) = 2(3\sqrt{x})^2 + 1 = 18x + 1$.

A operação de composição goza da *propriedade associativa*, i.e.

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x).$$

Vamos verificar esta propriedade com as funções do exemplo anterior. Já calculámos a expressão no primeiro membro, $(f \circ (g \circ h))(x)$. A expressão no segundo membro é $((f \circ g) \circ h)(x) = ((18x^2 + 1) \circ h)(x) = 18x + 1$.

Vídeos . *2.9 a 2.11 (no anexo deste capítulo)*

Função inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijectiva. Diz-se *função inversa* de f, e escreve-se f^{-1}, a função $f^{-1} : B \to A$ tal que, para todo elemento $y \in B$ se tem $f^{-1}(y) = x$, sendo $y = f(x)$, i.e. (figuras 11 e 12)

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{e} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

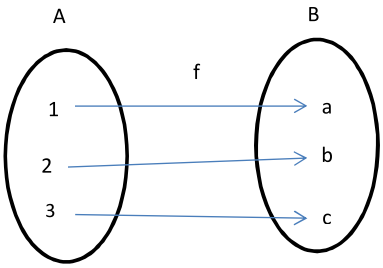

Figura 11: f é a função inversa de f^{-1}.

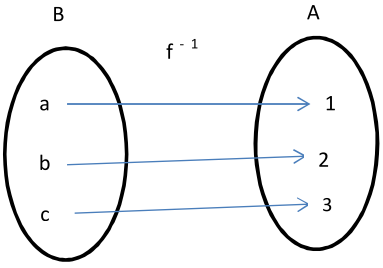

Figura 12: f^{-1} é a função inversa de f.

Exemplo 12. A função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$, representada na figura 8, pg. 7, é uma função bijectiva. A função inversa de f, f^{-1}, determina-se da seguinte forma:

1. Resolver em ordem a x a equação $y = x^2$, $x \geq 0$. Obtém-se $x = \sqrt{y}$;
2. Trocar as letras 'x' e 'y' nesta equação. Obtém-se $y = \sqrt{x}$. Esta troca serve apenas para escrever a fórmula na forma habitual (x é a variável independente e y a variável dependente);
3. A função inversa é $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo 13. A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, é uma função bijectiva. A sua função inversa determina-se da seguinte forma:

1. Resolver em ordem a x a equação $y = \ln(x)$. Obtém-se $x = e^y$;
2. Trocar as letras 'x' e 'y' nesta equação. Obtém-se $y = e^x$;
3. A função inversa é $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f^{-1}(x) = e^x$.

Vídeos . *2.12 a 2.15 (no anexo deste capítulo)*

1.5 Funções elementares

A grande parte das funções que vamos encontrar no nosso curso são *funções elementares*. Uma função diz-se elementar se é alguma das seguintes funções:

- uma constante
- uma potência
- uma exponencial
- um logaritmo
- uma função trigonométrica directa
- uma função trigonomérica inversa
- uma combinação de funções dos tipos acima referidos, usando um número finito de operações racionais $+, -, \times, \div$ e de composição de funções.

Segue-se uma descrição destas funções.

Funções constantes

$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R} \qquad \text{Imagem}_f = \{c\}$
Exemplos: $f(x) = -2 \qquad f(x) = \pi$

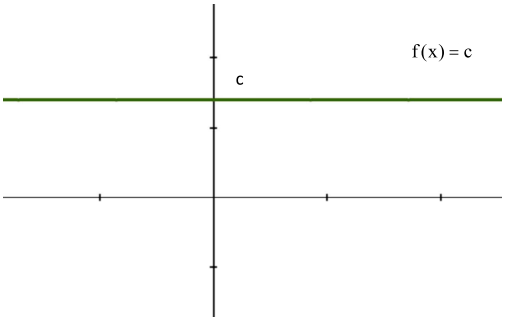

Figura 13: Função constante $f(x) = c$.

Funções potência

$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}$
D_f, Imagem_f : dependem de r
Exemplos: $f(x) = x^2 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f(x) = x^{-2.1}$
(figuras 14, 15, 16, 17)

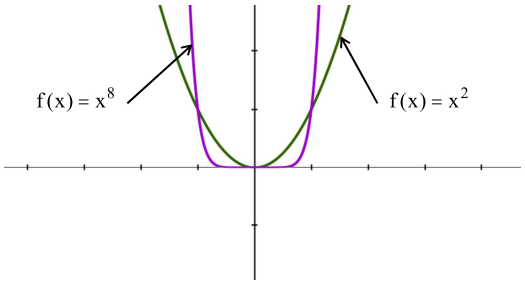

Figura 14: $D_f = \mathbb{R}$, $\text{Imagem}_f = \mathbb{R}_0^+$.

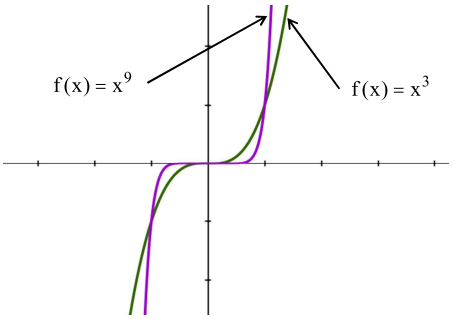

Figura 15: $D_f = \mathbb{R}$, $\text{Imagem}_f = \mathbb{R}$.

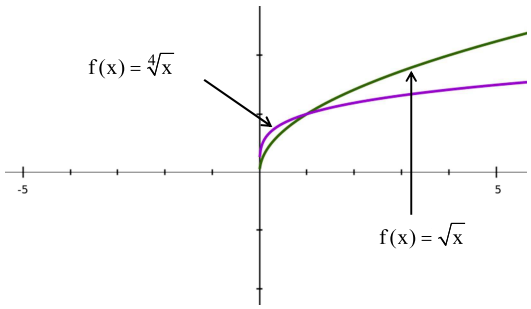

Figura 16: $D_f = \mathbb{R}_0^+$, Imagem$_f = \mathbb{R}_0^+$.

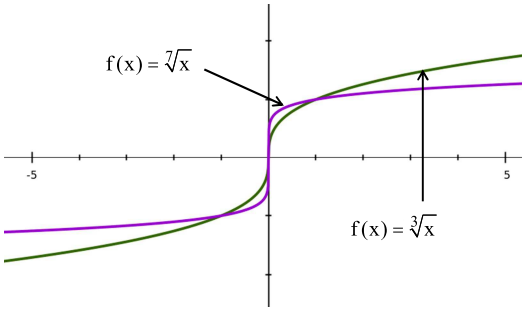

Figura 17: $D_f = \mathbb{R}$, Imagem$_f = \mathbb{R}$.

Funções exponenciais

$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} \qquad \texttt{Imagem}_f = \mathbb{R}^+$

$\texttt{Exemplos:}\ f(x) = e^x \quad f(x) = 2^x \quad f(x) = 0.5^x$

(figuras 18, 19)

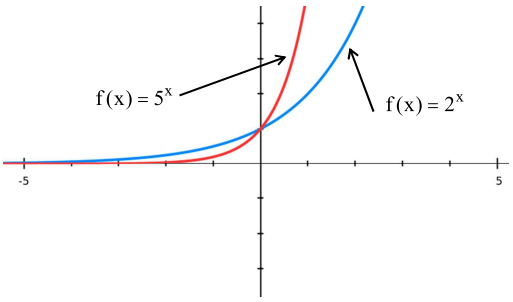

Figura 18: $D_f = \mathbb{R}$, Imagem$_f = \mathbb{R}^+$.

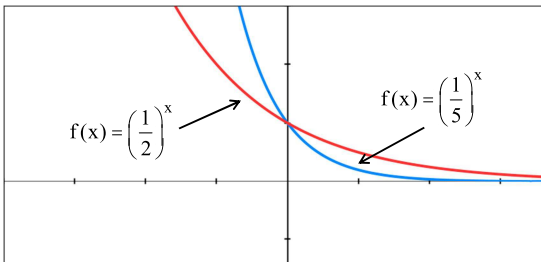

Figura 19: $D_f = \mathbb{R}$, Imagem$_f = \mathbb{R}^+$.

Funções logarítmicas

$f(x) = \log_a(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$

$D_f = \mathbb{R}^+ \qquad \texttt{Imagem}_f = \mathbb{R}$

$\texttt{Exemplos:}\ f(x) = \ln(x) \quad f(x) = log_{0.5}(x) \quad f(x) = \log_{10}(x)$

(figuras 20, 21)

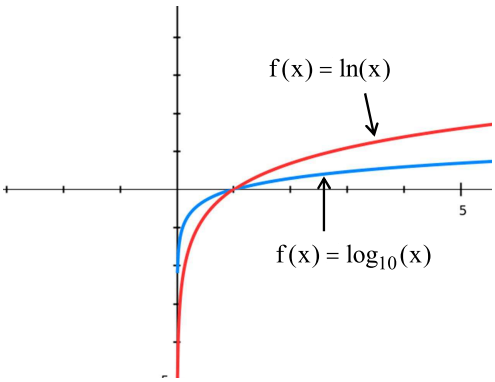

Figura 20: $D_f = \mathbb{R}^+$, Imagem$_f = \mathbb{R}$.

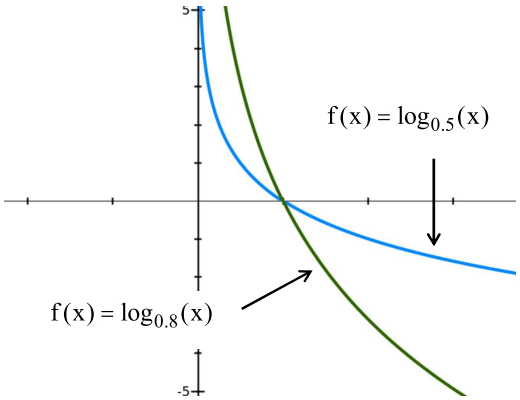

Figura 21: $D_f = \mathbb{R}^+$, Imagem$_f = \mathbb{R}$.

Funções trigonométricas directas

Funções seno e co-seno

$f(x) = sen(x)$ $\quad$ $f(x) = cos(x)$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ Imagem$_f = [-1,1]$

(figuras 22, 23, 24, 25)

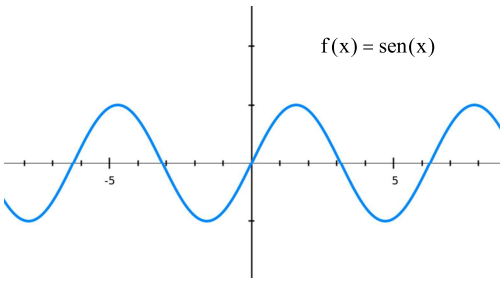

Figura 22: $D_f = \mathbb{R}$, Imagem$_f = [-1,1]$.

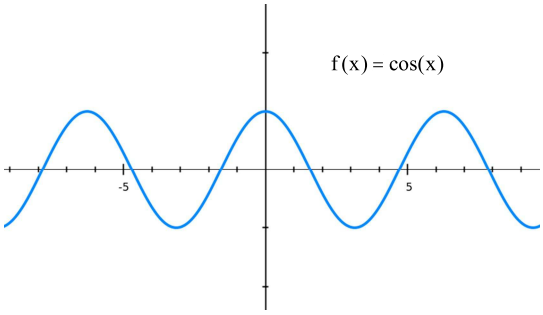

Figura 23: $D_f = \mathbb{R}$, Imagem$_f = [-1,1]$.

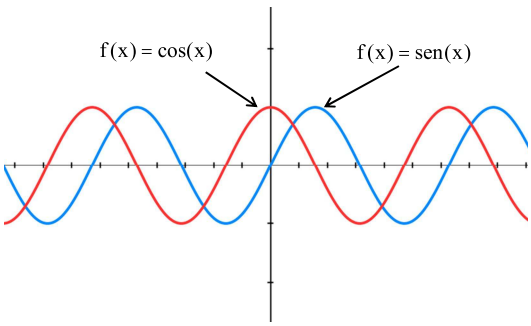

Figura 24

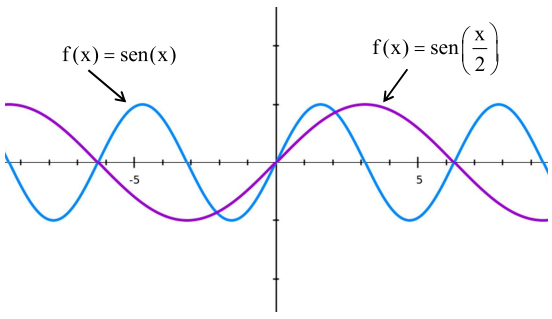

Figura 25

Função tangente

$$f(x) = tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Imagem}_f = \mathbb{R}$$

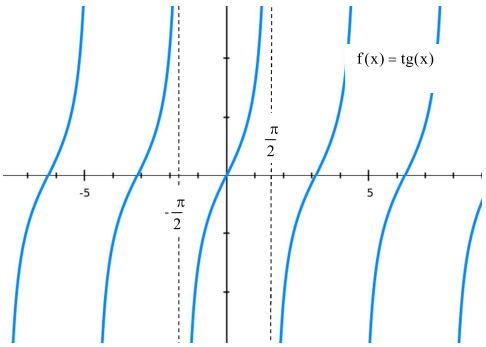

Figura 26

Definem-se ainda as seguintes funções directas:

$$\text{Co-tangente: } cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$

$$\text{Secante: } sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

$$\text{Co-secante: } csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas não admitem funções inversas, porque não são injectivas. No entanto, considerando apenas intervalos dos domínios nos quais a funções sejam bijectivas, pode obter-se, nesses intervalos, inversas das funções. Apresentam-se a seguir alguns casos.

Função arco seno

$$y = arcsen(x) \quad \text{ou} \quad y = sen^{-1}(x)$$

$$D_y = [-1,1] \quad \text{Imagem}_y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

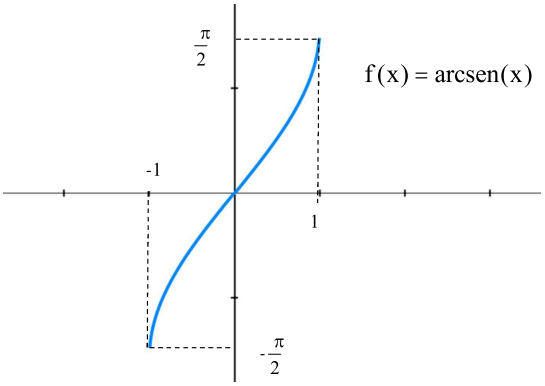

Figura 27

Função arco co-seno

$y = arccos(x)$ ou $y = cos^{-1}(x)$

$D_y = [-1,1]$ Imagem$_y = [0,\pi]$

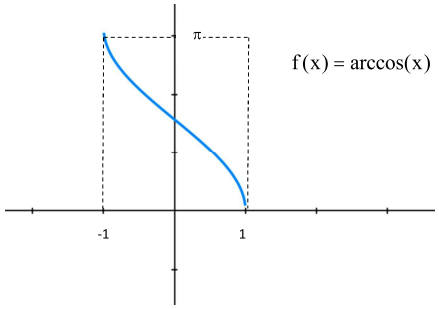

Figura 28

Função arco tangente

$y = arctan(x)$ ou $y = tan^{-1}(x)$

$D_y = [-\infty,\infty]$ Imagem$_y = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

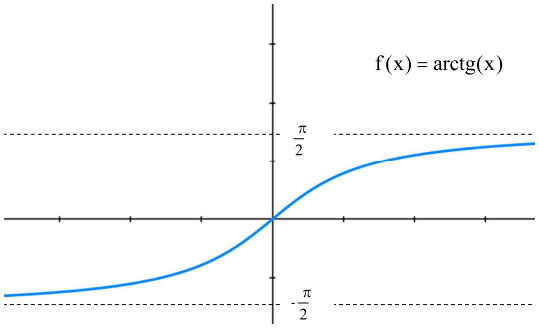

Figura 29

Definem-se ainda as seguintes funções inversas:

Arco co-tangente: $arccot(x)$

Arco secante: $arcsec(x)$

Arco co-secante: $arccsc(x)$

Vídeo . *2.16 (no anexo deste capítulo)*

2 Sequências numéricas

2.1 Vizinhança de um número real

Consideremos um número real a e um número real positivo ϵ. A inequação $|x-a| < \epsilon$ é satisfeita pelos valores de x correspondentes ao intervalo aberto centrado em a e de raio igual a ϵ:

$$|x-a| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x-a < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow a-\epsilon < x < a+\epsilon.$$

Um intervalo deste tipo diz-se *vizinhança ϵ do número a* (figura 30).

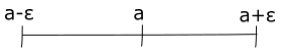

Figura 30

Exemplo 14. A vizinhança 0.1 do número 2, corresponde ao conjunto de pontos do intervalo $(2-0.1, 2+0.1) = (1.9, 2.1)$. Uma vizinhança definida por um intervalo aberto, como neste caso, costuma designar-se por *vizinhança aberta* (diz-se *vizinhança fechada*, se o intervalo for fechado).

2.2 Definição de sequência numérica

Uma *sequência* (ou *sucessão*) de números reais é uma fila infinita de números reais separados por vírgulas, gerados segundo uma certa regra. Por exemplo,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

Cada um dos números designa-se por *termo* da sequência. O termo $1/n$ designa-se por *termo geral* da sequência. Substituindo sucessivamente neste termo a variável n pelos inteiros positivos $1, 2, 3, \cdots$, obtêm-se os termos nas posições correspondentes.

Uma sequência numérica representa-se da forma $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (u_n), e pode ser encarada como uma função de domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio $\mathbb{R}$. Pode usar-se qualquer outra letra no lugar de u.

Exemplo 15. Algumas sequências numéricas.

1. $(u_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$
2. $(v_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$: $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$
3. $(w_n) = \left((-1)^n\right)$: $\quad -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$
4. $(x_n) = (1)$: $\quad 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$
5. $(y_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)$: $\quad 2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$
6. $(z_n) = n$: $\quad 2, 1, 2, 3, 4, , \cdots, n, \cdots$

Uma sequência numérica (u_n) diz-se:

- *limitada*, se existem dois números reais a, b tais que $a \leq u_n \leq b$ para qualquer valor de n, i.e., todos os elementos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$;
- *limitada superiormente*, se existe um número real b tal que $u_n \leq b$ para qualquer valor de n, i.e., todos os elementos da sequência são inferiores, ou quando muito iguais a b;
- *limitada inferiormente*, se existe um número real a tal que $a \leq u_n$ para qualquer valor de n, i.e., todos os elementos da sequência são maiores, ou ,no mínimo, iguais a a.

Exemplo 16.

1. A sequência

$$(u_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right) : 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

é limitada, dado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1.$$

2. A sequência

$$(u_n) = (2n) : 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$$

é apenas limitada inferiormente, dado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$2 \leq 2n.$$

3. A sequência

$$(u_n) = (-2n) : -2, -4, -6, \cdots, -2n, \cdots$$

é apenas limitada superiormente, dado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$-2n \leq -2.$$

Uma sequência numérica (u_n) diz-se:

- *crescente*, se $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots u_n < \cdots$;
- *decrescente*, se $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots u_n > \cdots$;
- *não decrescente*, se $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots u_n \leq \cdots$;
- *não crescente*, se $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots u_n \geq \cdots$;
- *monótona*, se é de algum dos 4 tipos anteriores.

Exemplo 17.

1. A sequência 1 do exemplo 16 é decrescente, dado que $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} \cdots$.
2. A sequência 2 do exemplo 16 é crescente, dado que $2 < 4 < 6 \cdots$.
3. A sequência

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots$$

é não decrescente, dado que $1 \leq 1 \leq 2 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \cdots$

2.3 Limite de uma sequência numérica

Definição 1. Diz-se que uma sequência (u_n) de número reais *converge*, ou *tende*, para o número real L, ou ainda que tem *limite* igual a L, e escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L,$$

se, e somente se, dado qualquer intervalo centrado em L, $]L-\epsilon, L+\epsilon[$ (figura 31), com $\epsilon > 0$, existe uma ordem n_0 tal que para todos os valores de $n > n_0$, se tem $u_n \in]L-\epsilon, L+\epsilon[$.

Dito de forma equivalente, qualquer intervalo de diâmetro 2ϵ, centrado em L, contém uma quantidade infinita de elementos da sequência (u_n), ficando fora do intervalo uma quantidade finita de elementos.

Figura 31: Intervalo aberto de raio ϵ, centrado em L.

Uma sequência que tem limite diz-se *convergente*. Uma sequência que não tem limite diz-se *divergente*.

Exemplo 18. A sequência de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ tem limite igual a zero quando n tende para infinito, e escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por exemplo, se $\epsilon = 0.001$, pode verificar-se que a partir da ordem $n = 1001$, $u_{1001} = 1/1001$, todos os termos seguintes tomam valores pertencentes ao intervalo $(-\epsilon, \epsilon) = (-0.001, 0.001)$, centrado no ponto zero. Existe uma quantidade finita de elementos da sequência fora deste intervalo e uma quantidade infinita de elementos da sequência dentro do intervalo.

Limites infinitos

Dada uma sequência de números reais (u_n), escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \tag{2.1}$$

se para todo o número k positivo existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, se tem $u_n > k$. Não interessando quão grande seja o valor de k, há uma quantidade finita de termos da sequência que são menores que k e uma quantidade infinita de termos da sequência que são maiores que k (figura 32). De modo análogo se define

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

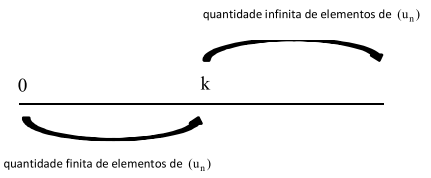

Figura 32: Para qualquer $k > 0$, se $u_n \to +\infty$, então há uma quantidade finita de termos de (u_n) menores que k e uma quantidade infinita de termos da sequência maiores que k.

Exemplo 19. Dada a sequência de termo geral $u_n = 2n$

$$(2n) : 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$$

se fizermos $k = 1000$ verificamos que a partir do elemento $u_{500} = 2 \times 500 = 1000$, todos os termos da sequência são maiores que k. Existe uma quantidade finita de elementos menores que $k = 1000$ e uma quantidade infinita de elementos maiores que $k = 1000$. Este argumento é válido qualquer que seja o valor $k \in \mathbb{R}^+$ escolhido. Por isso podemos escrever

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty. \tag{2.2}$$

Deve notar-se que não é correcto dizer que (u_n) tem limite infinito, porque o limite quando existe é um número real. Esta sequência *não tem* limite, é uma *sequência divergente*. A expressão (2.2) diz-nos apenas de que forma diverge a sequência.

Vídeos . *2.8 (no anexo deste capítulo)*

Alguns teoremas sobre limites de sequências numéricas
Cada um dos teoremas seguintes enuncia um resultado importante sobre limites de sequências numéricas.

O resultado seguinte afirma que o limite de uma sequência numérica (quando existe) é único.

Teorema 1. (unicidade do limite) Se $\lim u_n = a$ e $\lim u_n = b$, então $a = b$.

O resultado seguinte afirma que se uma sequência é convergente, então toda a sequência que se obtém desta considerando apenas uma parte dos seus infinitos elementos, mas não todos, mantendo a ordem entre estes, converge para o mesmo limite.

Teorema 2. Se $\lim u_n = a$, então toda a subsequência de $\left(u_n\right)$ converge para a.

O resultado seguinte afirma que se uma sequência é convergente, então todos os seus elementos estão contidos num intervalo da forma $[c, d]$, com $c, d \in \mathbb{R}$.

Teorema 3. Toda a sequência numérica convergente é limitada.

A recíproca do teorema 3 é falsa, i.e., uma sequência numérica pode ser *limitada* e não ter limite. Por exemplo, a sequência $1, 0, 1, 0, \cdots$ é limitada, visto que todos os seus termos pertencem ao intervalo $[0, 1]$, mas não tem limite (porquê?).

Teorema 4. Toda a sequência numérica monótona e limitada é convergente.

Vídeo . *2.17 (no anexo deste capítulo)*

3 Funções contínuas

3.1 Limite de uma função

Definição 2. Diz-se que uma função real de variável real, $f(x)$, *converge* (ou *tende*) para o número real L, ou ainda que tem *limite* igual a L, quando x tende para a, e escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se, e somente se, dada qualquer sequência de valores de x convergente para a

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \quad \to a$$

a sequência de imagens por f que lhe corresponde converge para L,

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots \quad \to L.$$

Exemplo 20. A igualdade $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$, significa que quanto mais próximo o valor de x estiver de 4, mais próximo de 2 está o valor de $\sqrt{x}$. Podemos dizer, com significado equivalente, que o valor de $\left|\sqrt{x}-2\right|$ pode ser tão próximo de zero 'quanto se queira', bastanto para isso que o valor da diferença $|x-4|$ seja suficientemente pequeno.

3.1.1 Limites laterais

(ver figura 33, pg. 20)

- *Limite à direita* de $f(x)$ no ponto $x = a$: escreve-se $\lim_{x\to a^+} f(x)$. É o limite de $f(x)$ quando $x \to a$ por valores maiores que a.
- *Limite à esquerda* de $f(x)$ no ponto $x = a$: escreve-se $\lim_{x\to a^-} f(x)$. É o limite de $f(x)$ quando $x \to a$ por valores menores que a.

Exemplo 21. Na função representada na figura 36, pg. 23, temos

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 5.$$

Teorema 5. O limite de $f(x)$ no ponto $x = a$ existe e é igual a b se, e somente se, existem os dois limites laterais de $f(x)$ no ponto $x = a$ e são ambos iguais a b:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

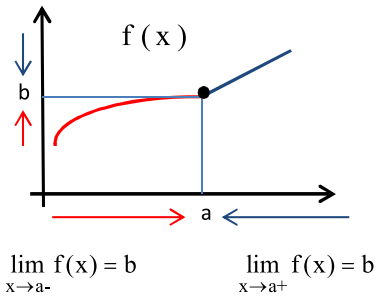

Figura 33: Limites laterais.

O limite de uma função num ponto não depende do valor da função nesse ponto. Para as funções $f(x)$ e $g(x)$ na figura 34, temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} g(x),$$

apesar de a função $g(x)$ não estar definida no ponto $x = a$.

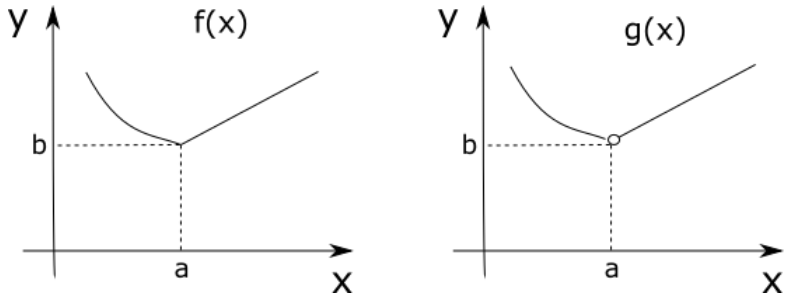

Figura 34

Vídeos . *2.18 a 2.21 (no anexo deste capítulo)*

3.1.2 Alguns teoremas sobre limites de funções

Cada um dos teoremas seguintes enuncia um resultado importante sobre limites de funções.

Teorema 6. (unicidade do limite) Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} f(x) = c$, então $b = c$.

Teorema 7. Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ três funções de domínio D e contradomínio $\mathbb{R}$. Se para todo $x \in D$, $x \neq a$, tivermos

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Teorema 8. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Então,

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$;
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L \times M$;
3. Se $M \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$.

Exemplo 22. Embora existam os limites $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0}(1+x) = 1$, não existe o limite $\lim_{x\to 0}(1+x)/\sqrt{x}$, porque quando $x \to 0$ o denominador tende para zero e $1/0$ não é um número.

3.1.3 Limites no infinito

Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$$

com $b \in \mathbb{R}$, se para todo a sequência (x_n) de valores de x, tal que $\lim_{x\to+\infty} x_n = +\infty$,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \quad \to +\infty$$

a sequência de imagens por f que lhe corresponde converge para b,

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots \quad \to b.$$

Exemplo 23. A função $f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ tem limite igual a 2, quando x tende para $+\infty$ (ver figura 35). De facto, se aumentarmos ilimitadamente x, o valor de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tende para zero.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2+0 = 2.$$

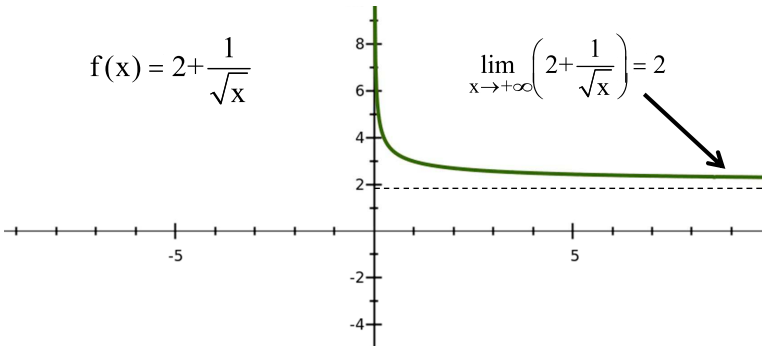

Figura 35: Limites no infinito

3.2 Função contínua

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua* no ponto $x = a$ do seu domínio, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, fazendo x suficientemente próximo de a. A definição seguinte apresenta esta ideia de modo formal.

Definição 3. Uma função $f(x)$ diz-se *contínua* num ponto $x = a$ do seu domínio, se não existe nenhuma sequência de valores da variável x no domínio de $f(x)$, convergente para a,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \quad \to a$$

à qual corresponda uma sequência de imagens por $f(x)$, que não convirja para $f(a)$,

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots \quad \not\to f(a).$$

Observação. Se o ponto a do domínio de f pertence a um intervalo fechado $[b, c]$, contido no domínio de f, então f é contínua em a se e somente se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definição 4. Uma função $f(x)$ diz-se *contínua num conjunto D*, se e somente se, é contínua em todos os pontos do conjunto D. Se algum ponto do conjunto D é um *ponto de fronteira*, como por exemplo os pontos b, c do intervalo fechado $[b, c]$, ao dizer-se que a função é contínua no intervalo $[b, c]$ está a considerar-se apenas *continuidade lateral* nestes pontos - ver o exemplo 24, em baixo. Dizer-se que uma função é contínua, sem referir nenhum intervalo, significa que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio (sendo *lateralmente* contínua nos pontos de fronteira do domínio).

Exemplo 24.

- A função representada na figura 36 é descontínua no ponto $x = 3$, por ter limites laterais diferentes neste ponto. Esta tipo de descontinuidade diz-se de *1ª espécie*. Por ser

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5 = f(3),$$

diz-se que a função é *contínua à direita* no ponto $x = 3$. No entanto f não é *contínua à esquerda* no ponto $x = 3$, porque $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \neq f(3)$.

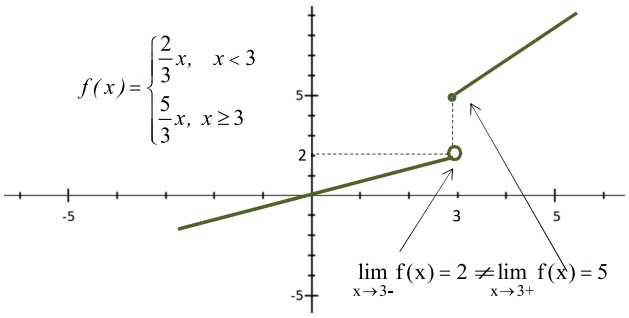

Figura 36: Função com descontinuidade de 1ª espécie no ponto $x = 3$.

- A função representada na figura 37 é descontínua no ponto $x = 0$, pertencente ao seu domínio. O tipo de descontinuidade que aí apresenta diz-se de *2ª espécie*, porque não existe algum dos limites laterais (neste caso não existe o limite à esquerda no ponto $x = 0$). A função é *contínua à direita* no ponto $x = 0$.

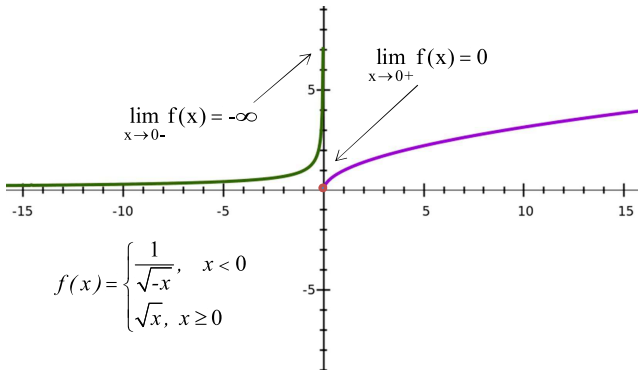

Figura 37: Função com descontinuidade de 2ª espécie no ponto $x = 0$.

Exemplo 25.

- A função representada na figura 38 é contínua, dado ser contínua em todos os pontos do domínio, mas tem uma descontinuidade no ponto $x = 0$. Este ponto diz-se um *ponto de acumulação* do domínio de f (qualquer vizinhança do ponto contém elementos do conjunto, para além do próprio ponto). Em geral, falamos de *continuidade* apenas em pontos do domínio de uma função, mas podemos falar de *descontinuidade* em pontos do domínio da função e nos pontos de acumulação do domínio.

  Observação. Da função na figura 39 não dizemos que é descontínua no ponto $x = -2$. A função não está aí definida, tal como a função da figura 38 não está definida no ponto $x = 0$. No entanto, ao contrário do ponto $x = 0$ na figura 38, o ponto $x = -2$ na figura 39 não é ponto de acumulação do domínio da função.

- A função representada na figura 39 é contínua em todos os pontos do seu domínio. O ponto $x = -3$ diz-se *ponto isolado* do domínio da função. Um ponto designa-se por *ponto isolado* de um conjunto, quando existe uma sua vizinhança que não contém mais nenhum elemento do conjunto, excepto o próprio ponto. Deve notar-se que a única sequência numérica com valores no domínio de f convergente para -3, é a sequência constante $-3, -3, \cdots, -3, \cdots$. Como a sequência das imagens por f que lhe correspondem é

  $$f(-3),\ f(-3),\ f(-3), \cdots, f(-3), \cdots \quad \to f(-3) = 5,$$

  a definição 3 diz-nos que a função f é contínua no ponto $x = -3$.

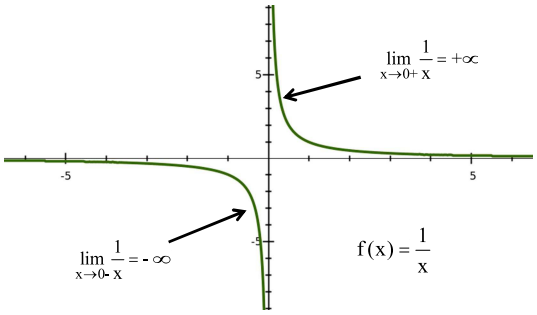

Figura 38: Descontinuidade assimptótica.

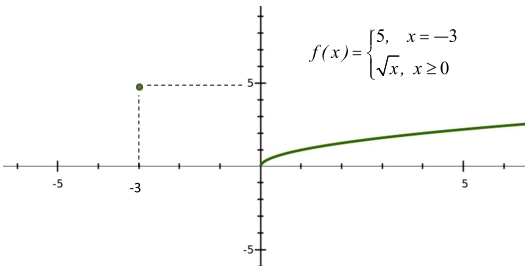

Figura 39: Função contínua em todos os pontos do seu domínio $\{-3\} \cup [0, +\infty[$.

Vídeo . *2.22 a 2.25 (no anexo deste capítulo)*

3.2.1 Alguns teoremas sobre continuidade

Teorema 9. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in D$, então f é limitada numa vizinhança de a [3]

Teorema 10. Sejam f, g funções contínuas num ponto $x = a$ comum aos seus domínios. Então:

1. $f(x) \pm g(x)$ e $f(x) \times g(x)$ são funções contínuas em $x = a$;
2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é uma função contínua em $x = a$, se $g(a) \neq 0$.

[3] Uma função $f(x)$ diz-se *limitada* num intervalo $[b, c]$ do seu domínio, se existem dois números reais, m, M, com $m \leq m$, tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [b, c]$.

Teorema 11. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ duas funções, com $f(D) \subset F$. Se f é contínua no ponto $x = a$ e g é contínua no ponto $f(a)$, então $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ é contínua no ponto $x = a$.

Exercício 2. Mostrar que a função $f(x) = e^{-x^2} + \frac{2x-2}{3x+1}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio natural.
Solução
O domínio natural da função f é $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. A função é contínua em todos os pontos do domínio, porque:

- $-x^2$ e e^x são contínuas em D, porque são contínua em $\mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}$. Como e^{-x^2} é a composta destas duas, então é contínua em D, pelo teorema 11;
- $2x-2$ e $3x+1$ são contínuas em D. Pelo teorema 10, $\frac{2x-2}{3x+1}$ é também contínua em D.
- Finalmente, pelo teorema 10, como e^{-x^2} e $\frac{2x-2}{3x+1}$ são contínuas em D, então $f(x) = e^{-x^2} + \frac{2x-2}{3x+1}$ é também contínua em D.

Teorema 12. (do valor intermédio para funções contínuas) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, tal que $f(a) \leq f(b)$. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$. Então existe pelo menos um ponto $c \in [a,b]$, tal que $d = f(c)$.

Exercício 3. (aplicação do teorema 12) Mostrar que o polinómio $f(x) = x^3 - x + 1$ se anula em pelo menos um ponto do intervalo $[-2,0]$.
Solução
A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pelo teorema 10 (todos os polinómios são funções contínuas em $\mathbb{R}$). Como $f(-2) = -5 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$, o teorema 12 permite-nos afirmar que existe pelo menos um ponto c no intervalo $[-2,0]$ tal que $f(c) = 0$, uma vez que $0 \in [-5,1]$.

Capítulo 3

Derivadas de Funções Reais de Variável Real

Neste capítulo vamos estudar o seguinte. Dada uma função $y = f(x)$, queremos saber quais os valores de x para os quais $f(x)$ se anula (pontos a, c, e, g na figura 40), ou nos quais atinge valores *extremos relativos*, máximos ou mínimos (pontos b, d, f). É importante sabermos também em que intervalos de valores de x a função cresce (intervalo $[b, d]$, por exemplo), em que intervalos a função decresce (intervalo $[d, f]$, por exemplo), e a sua taxa de variação com x nos vários pontos desses intervalos (i.e., com que rapidez varia a função ao longo de cada intervalo). Queremos também conhecer os pontos em que a função é estacionária (pontos a, b, d, f). A representação gráfica pode dar-nos informação importante, mas carece de rigor numérico.

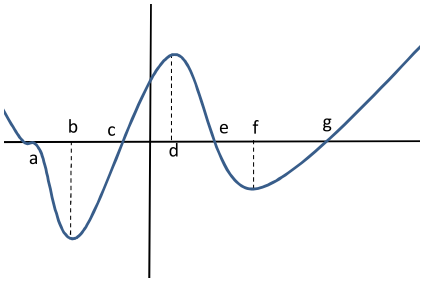

Figura 40

Vamos estudar a operação de *derivação*, que nos vai permitir obter com rigor a informação acima referida. Mais ainda, esta operação vai revelar-se fundamental para resolver problemas de optimização (cálculo de máximos ou mínimos de funções) e para formalizar matematicamente alguns problemas práticos por meio de *equações diferenciais*.

1 Função derivada

Nesta secção vamos definir a *função derivada* $f'(x)$ de uma função real de variável real $f(x)$.

1.1 Taxa de variação média de uma função

Na figura 41 está representada a relação entre a distância d percorrida por um automóvel, em quilómetros, e o tempo t de duração do percurso, em horas, numa viagem que ligou dois pontos que distam entre si 80 quilómetros. Da observação do gráfico, podemos obter a seguinte informação.

- A viagem durou $4h$;
- Na primeira hora de viagem, o automóvel percorreu $25km$;
- Passadas duas horas de viagem, o automóvel tinha percorrido $60km$. Isto significa que o automóvel andou mais depressa na segunda hora de viagem (da hora 1 para

a hora 2) do que na primeira hora, em média, já que nesta segunda hora percorreu $35km$, contra os $25km$ da primeira hora de viagem. O gráfico traduz a maior velocidade na segunda hora, sendo mais íngreme no intervalo $[1,2]$, de t, do que no intervalo $[0,1]$;

- Do instante $t = 2$ para o instante $t = 3$, a distância entre o automóvel e o ponto de partida diminuiu para $35km$, o que significa que o automóvel voltou para trás.
- Do instante $t = 3$ para o instante $t = 4$, o automóvel retomou o percurso no sentido do ponto de chegada.

Deve notar-se que a forma do gráfico na figura 41, não significa que o carro andou a subir e a descer. O que ela representa é apenas a distância a que o automóvel se encontra do ponto de partida, nos vários momentos da viagem.

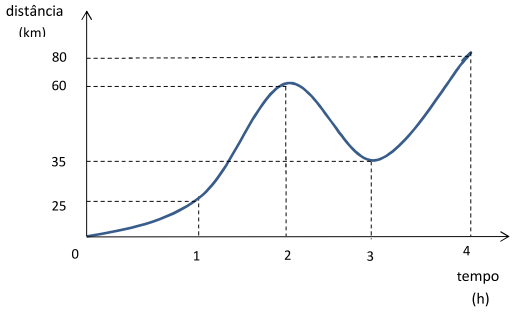

Figura 41: Distância em função do tempo – automóvel A.

Consideremos agora a figura 42. O segmento de recta que une os pontos $(t,d) = (0,0)$ e $(t,d) = (2,60)$ representa a distância em função do tempo respeitante a outro automóvel que, partindo no mesmo instante que o automóvel referido no gráfico da figura 41, se encontra no mesmo ponto do trajecto ao fim de $2h$ de viagem. Designemos por automóvel A o automóvel correspondente ao gráfico não linear e por automóvel B o automóvel correspondente ao gráfico linear.

O facto de o gráfico ser linear para o automóvel B, diz-nos que o veículo efectuou o percurso com um ritmo (velocidade) constante, i.e., percorrendo distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Recordemos que se um objecto se desloca a uma velocidade constante, o valor da velocidade é dado por

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

sendo as unidades km/h (quilómetros por hora), se a distância vier expressa em quilómetros e o tempo em horas. Assim, se o velocímetro do nosso carro indica $75km/h$, sabemos que se mantivermos esse ritmo percorreremos $75km$ a cada hora que passa. No caso da figura 42 a velocidade constante v_B a que se desloca o automóvel B é:

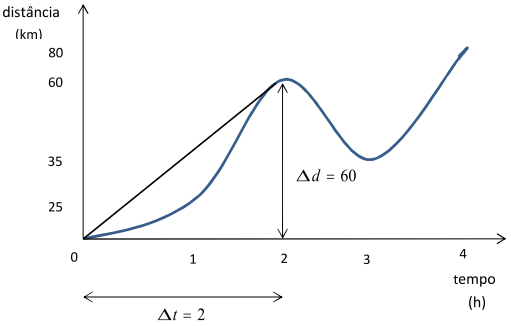

Figura 42: Distância em função do tempo – automóvel B.

$$v_B = \frac{60}{2} = 30km/h.$$

Esta velocidade é designada por *velocidade média* (ou *taxa de variação média* da distância com o tempo) do automóvel A no intervalo de tempo $[0,2]$, e representa a velocidade constante a que se deve deslocar um automóvel que, saindo ao mesmo tempo que o automóvel A, estão no mesmo ponto do percurso ao fim de duas horas de viagem. O valor de v_B representa o declive do segmento de recta representado na figura 42. De um modo geral, vale a seguinte definição.

Dada uma função $f(x)$, designa-se por *taxa de variação média* de f com x, no intervalo $[a,b]$, o quociente

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Exemplo 26. Considere-se o gráfico na figura 41.

1. Quais as velocidades médias do automóvel nos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$, $[1,3]$, $[3,4]$?
2. A que velocidade constante se deve deslocar um automóvel, de modo a começar e a terminar a viagem nos mesmos instantes que o automóvel A?

Solução
1. A velocidade média referente a um intervalo de tempo com início no instante t_0 e fim no instante t_1, é dada por $v_{[t_0,t_1]} = \frac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1-t_0}$. Temos então:

$$v_{[0,1]} = \frac{d(1)-d(0)}{1-0} = \frac{25-0}{1} = 25km/h$$
$$v_{[1,2]} = \frac{d(2)-d(1)}{2-1} = \frac{60-25}{1} = 35km/h$$
$$v_{[2,3]} = \frac{d(3)-d(2)}{3-2} = \frac{35-60}{1} = -25km/h$$
$$v_{[4,3]} = \frac{d(4)-d(3)}{4-3} = \frac{80-35}{1} = 45km/h$$

Notar que a velocidade média $v_{[2,3]}$ é negativa, porque a distância do veículo ao ponto de partida diminui entre os instantes $t = 2$ e $t = 3$.

2. A velocidade pretendida é a velocidade média do veículo A no intervalo $[0,4]$.

$$v_{[0,4]} = \frac{d(4)-d(0)}{4-0} = \frac{80-0}{4} = 20km/h.$$

Um automóvel B que parta ao mesmo tempo que o automóvel A, e que chegue também ao mesmo tempo que o automóvel A ao local de destino, fazendo todo o percurso com velocidade constante, deve deslocar-se à velocidade de $20km/h$.

Vídeos . *2.26 a 2.27 (no anexo deste capítulo)*

1.2 Taxa de variação instantânea de uma função. Função derivada

Na figura 42 podemos verificar que o automóvel se desloca mais rapidamente na segunda hora do que na primeira, porque o gráfico aparece mais inclinado no intervalo de tempo $[1,2]$ do que no intervalo $[0,1]$.

Na figura 43 representa-se alguns segmentos de recta tangentes ao gráfico. Os declives das tangentes relacionam-se com as velocidades associadas aos pontos de tangência.

A este respeito são válidas a seguintes observações.

-A velocidade é maior numa vizinhança pequena do ponto c, do que em vizinhanças pequenas dos pontos a e b. Isto significa que se no instante a o condutor do automóvel olhar para o velocímetro[1], lê um valor menor que o correspondente ao instante c;

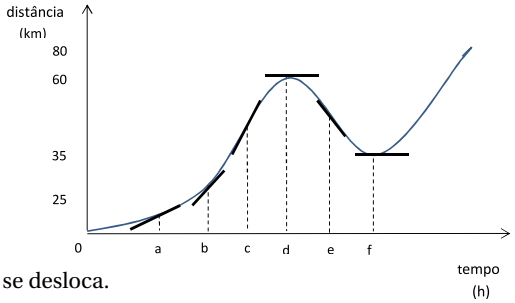

Figura 43: Quanto maior é a velocidade num ponto, maior é o declive da recta tangente à curva nesse ponto.

[1] Dispositivo no tablier do carro que indica a velocidade a que este se desloca.

-Para instantes muito próximos dos instantes d e f, o automóvel está praticamente parado. Isto tem sentido porque em ambos os instantes o automóvel tem que parar para inverter a marcha;
- Para instantes próximos de e, a velocidade do automóvel tem sinal negativo (o declive do segmento de recta traçado é negativo). Isto significa que nas proximidades do instante e, o automóvel está a diminuir a distância que o separa do ponto de partida.

O que pretendemos estabelecer a seguir é que, por muito próximos que estejam os dois instantes usados para calcular a velocidade média, o valor obtido para esta pode ser significativamente diferente da velocidade que o automóvel atinge em momentos intermédios a esses dois instantes.

Uma forma de calcularmos a velocidade num instante concreto de tempo, é sugerida pela figura 44. Nela está representado o gráfico de uma função genérica que exprime a distância f em função do tempo x. Fixemos um ponto no eixo das abcissas, x_0, e calculemos a taxa de variação média da função usando este ponto e um outro ponto, x_1. Obtemos

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

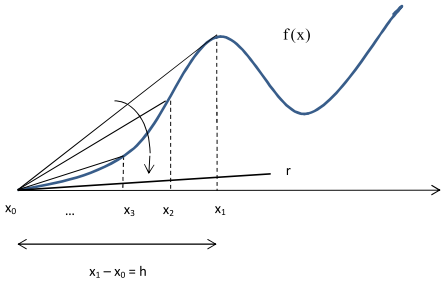

Figura 44: A recta r é a 'recta limite' de uma sucessão de rectas definidas pelo ponto x_0, e por cada um dos pontos da sequência $x_1, x_2, x_3, \cdots \to x_0$.

Este valor representa o declive da recta que une os pontos $\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $\big(x_1, f(x_1)\big)$. Consideremos agora esta taxa de variação média usando o ponto fixo x_0 e pontos de uma sequência numérica $x_1, x_2, x_3, \cdots$, cada vez mais próximos de x_0:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}, \quad \frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}, \quad \cdots$$

Estas taxas correspondem aos declives das rectas de uma *sequência de retas*, conforme mostra a figura. Podemos perguntar o seguinte: se esta sequência de números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ usados para calcular as variações médias, convergir para o ponto que mantemos fixo, x_0, a sequência de retas correspondentes converge para alguma "recta limite", cujo declive é dado por

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ ?$$

Se este limite existir, o seu valor diz-se *derivada* da função $f(x)$ no ponto x_0 e representa o *declive* da *recta tangente* à curva *no ponto* x_0 (a recta r, na figura 44). Escreve-se

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{3.1}$$

Registamos esta noção importante.

> Dada uma função $f(x)$ e um ponto x_0 do seu domínio, a *derivada da função no ponto* x_0, que se escreve $f'(x_0)$, se existir, representa o declive da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto x_0.
>
> $f'(x_0)$ designa-se por *taxa de variação instantânea* da função $f(x)$ no ponto x_0.

Vídeos . *2.28 a 2.30 (no anexo deste capítulo)*

Exercício 4. Calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$.
Resolução

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

Sabemos que $m = f'(2) = 4$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = 2$. Podemos determinar a equação desta recta, sabendo que ela contém o ponto $(x,y) = \big(2, f(2)\big) = (2,4)$. Obtemos (figura 45)

$$y = 4x + b$$
Cálculo de b: $4 = 4\times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$
Equação da recta: $y = 4x - 4$

Exercício 5. Calcular a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto $x = 0$.
Resolução

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-0^3}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Sabemos que $m = f'(0) = 0$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = 0$. Podemos determinar a equação desta recta, sabendo que ela contém o ponto $(x,y) = \big(0, f(0)\big) = (0,0)$. Obtemos (figura 46)

$$y = 0x + b = b$$
Cálculo de b: $0 = 0\times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$
Equação da recta: $y = 0$ (a recta coincide com o eixo das abcissas)

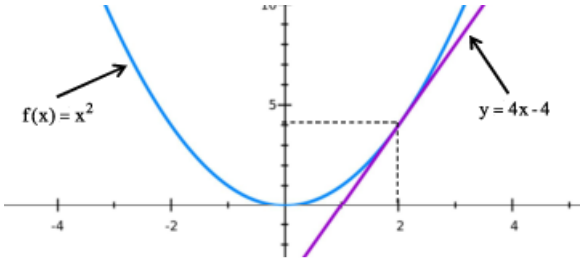

Figura 45

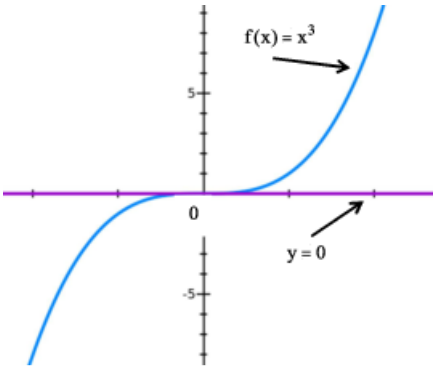

Figura 46

Torna-se mais cómodo calcular a derivada de um função num ponto, se dermos outra forma à fórmula (3.1). Fazendo $h = x - x_0$ temos $x = x_0 + h$ e podemos escrever a fórmula (3.1) na forma

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{3.2}$$

Exemplo 27. Usando a fórmula 3.2 para calcular a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$ (ver o exercício 4, pg. 30), temos

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2^2+2\times 2h+h^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\times 2h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2\times 2+h) = 4. \end{aligned}$$

É imediato verificar que, se quisermos calcular a derivada de $f(x) = x^2$ noutro ponto diferente de $x = 2$, por exemplo no ponto $x = 3$, basta repetir os cálculos efectuados no exercício 27, usando $x = 3$:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3^2+2\times 3h+h^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\times 3h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2\times 3+h) = 6. \end{aligned}$$

Podemos obter uma função $f'(x)$ que nos permita calcular o valor da derivada em qualquer ponto sem repetir os cálculos acima. Basta efectuá-los uma só vez, trocando o ponto 3 pelo ponto genérico x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

A função $f'(x) = 2x$ diz-de *função derivada* de $f(x) = x^2$. É agora imediato obter o valor da derivada de $f(x) = x^2$ em qualquer ponto. Por exemplo:

$$f'(2) = 2\times 2 = 4 \qquad f'(-3) = 2\times(-3) = -6.$$

A interpretação da função $f'(x) = 2x$ obtida acima é a seguinte (figura 45):

- Para valores de $x < 0$ a expressão $2x$ é negativa. Isto significa que, para valores negativos de x, a função $f(x) = x^2$ é *decrescente* e decresce de forma tão mais acentuada quanto menor for o valor de x;

- Para valores de $x > 0$ a expressão $2x$ é positiva. Isto significa que, para valores positivos de x, a função $f(x) = x^2$ é *crescente* e cresce de forma tão mais acentuada quanto maior for o valor de x;

- Para $x = 0$ obtemos $f'(0) = 0$. Dizemos que a função $f(x) = x^2$ é *estacionária* no ponto $x = 0$.

Em resumo, podemos dizer o seguinte.

Dada uma função $f(x)$, a expressão $f'(x)$ representa uma nova função de x, cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que a função $f(x)$ tem derivada. Atribuindo a x diferentes valores $x_1, x_2, \cdots$, obtêm-se para $f'(x)$ determinados valores, $f'(x_1), f'(x_2), \cdots$, que são as *derivadas* de $f(x)$ nesses pontos. A função $f'(x)$ diz-se *função derivada* de $f(x)$, ou simplesmente *derivada* de $f(x)$, e pode também ser representada pelas notação

$$\frac{df}{dx}.$$

A derivada de $y = f(x)$ num ponto concreto x_0 escreve-se, em geral, de alguma das formas

$$y'|_{x=x_0} \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \quad , \quad f'(x_0) \quad , \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Exercício 6. Considerar a função $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular a função derivada $f'(x)$.
Resolução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h} \frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \quad \text{(porquê?)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \quad \text{(porquê?)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\times(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Exercício 7. Justificar que não existe a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $x = 0$.

Vídeos . *2.31 a 2.37 (no anexo deste capítulo)*

1.3 Derivadas laterais

O limite na fórmula 3.2 pode não existir (o que significa que a função $f'(x)$ não está definida no ponto x_0) mas, apesar disso, existir algum dos limites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3.3}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{3.4}$$

Cada um destes limites designa-se por *derivada lateral* de $f(x)$ no ponto x_0, sendo o primeiro a derivada lateral de $f(x)$ *à direita*, no ponto x_0, que se escreve $f'_+(x_0)$, e o outro a derivada lateral de $f(x)$ *à esquerda* no ponto x_0, que se escreve $f'_-(x_0)$. Uma função é derivável num ponto x_0 se, e somente se, existem e são iguais nesse ponto as suas derivadas laterais.

Exemplo 28. A função representada na figura 47 não tem derivada no ponto $x = 1$, porque as derivadas laterais no ponto são distintas.

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$
$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1$$

Exemplo 29. A função representada na figura 48 não tem derivada no ponto $x = 2$, porque não está definida nesse ponto.

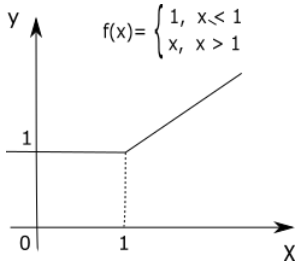

Figura 47

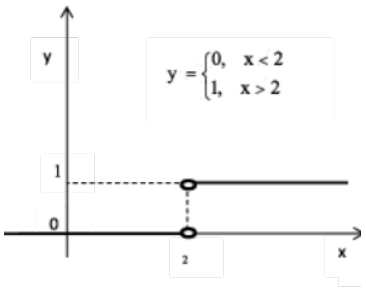

Figura 48

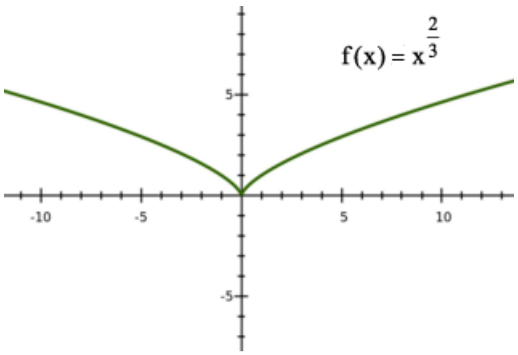

Figura 49

De um modo geral, podemos dizer o seguinte.

> Se uma função $f(x)$ é derivável no ponto x_0, então ela é 'lisa' nesse ponto, i.e., o ponto x_0 não é um ponto *anguloso* (o ponto x = 1 na figura 47 é um ponto anguloso) ou um ponto *cuspidal* (o ponto x = 0 na figura 49 é um ponto cuspidal).

Vídeo . *2.38 (no anexo deste capítulo)*

2 Derivadas de algumas funções elementares. Regras de derivação

Vamos agora determinar as derivadas de algumas funções elementares e apresentar algumas regras de derivação que nos permitem calcular a função derivada de uma soma ou de um produto de funções, bem como de uma divisão de funções, de uma composição de funções e da

inversa de uma função. Na posse deste conhecimento, podemos determinar facilmente a derivada de um grande número de funções.

2.1 Derivadas de algumas funções elementares

Funções constantes

$$\begin{aligned} f(x) &= k, \quad k \in \mathbb{R}. \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como se pode verificar, a derivada duma função constante é nula em qualquer ponto do seu domínio.

Exemplo 30.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} & f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)' = 0 \\ f(x) &= \log_{10} 12 & f'(x) &= \left(\log_{10} 12\right)' = 0 \\ f(x) &= e^{-2} & f'(x) &= \left(e^{-2}\right)' = 0 \end{aligned}$$

Funções potência

$$\begin{aligned} f(x) &= x^r, \quad r \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= r x^{r-1} \end{aligned}$$

Exemplo 31. Dedução da fórmula da derivada de $f(x) = x^n$, sendo n um número inteiro positivo. Sabemos que

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + h^n,$$

com

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + h^{n-1} \right) \\ &= \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo 32.

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \qquad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$
$$f(x) = x^{-4} \qquad f'(x) = \left(x^{-4}\right)' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$
$$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = \left(x^4\right)' = 4x^{4-1} = 4x^3$$

Funções exponenciais

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$
$$f'(x) = a^x \ln a$$

Prova.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h-1}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Vamos calcular o limite $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$. Designando a^h-1 por t, temos

$$a^h - 1 = t \Leftrightarrow a^h = 1+t \Leftrightarrow h = \log_a(1+t).$$

Podemos escrever, notando que se $h \to 0$ também $t \to 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= \frac{1}{\lim_{t\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

□

Notar que se $a = e$ ($e \approx 2.718$ é a constante de Euler) temos,

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x,$$

o que mostra que a fórmula para a derivada duma exponencial de base a é *mais simples* quando se tem $a = e$.

Exemplo 33.

$$f(x) = 2^x \qquad f'(x) = \left(2^x\right)' = 2^x \ln 2$$
$$f(x) = 0.34^x \qquad f'(x) = \left(0.34^x\right)' = 0.34^x \ln 0.34$$
$$f(x) = (\sqrt{7})^x \qquad f'(x) = \left((\sqrt{7})^x\right)' = (\sqrt{7})^x \ln\sqrt{7}$$

Sabendo que $0.34^x > 0$ (porquê?) e que $\ln 0.34 < 0$ (porquê?), temos $\left(0.34^x\right)' < 0$, para qualquer valor de x. Isto significa que a função $f(x) = 0.34^x$ é decrescente em todo o seu domínio.

Funções logarítmicas

$$f(x) = \log_a |x|, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Prova.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a |x+h| - \log_a |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left|1+\frac{h}{x}\right|.$$

Notar que $\log_a |x+h| - \log_a |x| = \log_a \left|\frac{x+h}{x}\right| = \log_a \left|1+\frac{h}{x}\right|$. Temos então

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \log_a \left|1+\frac{h}{x}\right|^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \log_a \left|1+\frac{h}{x}\right|^{\frac{x}{hx}} = \lim_{h\to 0} \log_a \left(\left|1+\frac{h}{x}\right|^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \log_a \left(\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

□

Notar que se $a = e$ temos,

$$\left(\log_e |x|\right)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x},$$

o que mostra que a fórmula para a derivada dum logaritmo de base a é *mais simples* quando se tem $a = e$.

Exemplo 34.

$$f(x) = log_{10}|x| \qquad f'(x) = (\log_{10}|x|)' = \frac{1}{x\ln(10)}$$
$$f(x) = log_{0.34}|x| \qquad f'(x) = (\log_{0.34}|x|)' = \frac{1}{x\ln(0.34)}$$
$$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Funções trigonométricas directas

$$f(x) = sen(x) \qquad f'(x) = cos(x)$$
$$f(x) = cos(x) \qquad f'(x) = -sen(x)$$

Prova. Dedução da fórmula da derivada da função $sen(x)$.

Vamos usar a fórmula $sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sen\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$$

e

$$\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = cos\left(\frac{2x}{2}\right) = cos(x),$$

temos

$$f'(x) = cos(x)$$

□

Notar que as igualdades $(sen(x))' = cos(x)$ e $(cos(x))' = -sen(x)$ são válidas se o ângulo x vier em *radianos*.

Vídeo . *2.39 (no anexo deste capítulo)*

2.2 Derivadas de somas, produtos e divisões de funções

Teorema 13. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis no ponto genérico x. Valem as seguintes regras de derivação.

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Prova.

1. Prova-se a regra da derivada de uma adição de funções. A prova para o caso da subtracção é análoga.

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(f/g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)/g(x+h)-f(x)/g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}\\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

□

Vídeos . *2.40 a 2.43 (no anexo deste capítulo)*

Exemplo 35.

$$f(x)=3x-2e^x \qquad f'(x)=\left(3x-2e^x\right)'=(3x)'-(2e^x)'=3-((2)'e^x+2(e^x)')=3-2e^x$$

$$f(x)=xsen(x) \qquad f'(x)=\left(xsen(x)\right)'=(x)'sen(x)+x(sen(x))'=sen(x)+xcos(x)$$

$$f(x)=\frac{x}{sen(x)} \qquad f'(x)=\left(\frac{x}{sen(x)}\right)'=\frac{(x)'sen(x)-x(sen(x))'}{sen^2(x)}=\frac{sen(x)-xcos(x)}{sen^2(x)}$$

Exercício 8. Usando as fórmulas para as derivadas de $sen(x)$ e $cos(x)$, obter as derivadas das funções trigonométricas seguintes.

$$f(x)=tan(x)=\frac{sen(x)}{cos(x)}$$
$$f(x)=cot(x)=\frac{cos(x)}{sen(x)}$$
$$f(x)=sec(x)=\frac{1}{cos(x)}$$
$$f(x)=csc(x)=\frac{1}{sen(x)}$$

2.3 Derivada da função composta

Teorema 14. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ duas funções, com $f(A) \subset B$ e $a \in A$, tal que $b = f(a)$ (ver figura 50). Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é derivável em $x = a$ e tem-se

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(b) = f'(a)g'\big(f(a)\big). \tag{3.5}$$

Se na fórmula (3.5) substituirmos a por um ponto genérico x, obtemos a fórmula

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big).$$

A expressão $g'\big(f(x)\big)$ determina-se em dois passos: (i) Calcula-se primeiro $g'(x)$ e substitui-se nesta expressão a variável x por $f(x)$; (ii) multiplica-se a expressão obtida por $f'(x)$. Pode indicar-se das formas

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big)$$

ou

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(u)|_{u=f(x)}.$$

A fórmula para a derivada da função composta, também se designa por *regra da cadeia*.

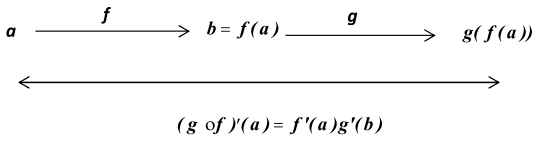

Figura 50

Vídeo . *2.44 (no anexo deste capítulo)*

Exercício 9. Sejam $f = x^2$ e $g = e^x$ duas funções. Determinar

1. $(g \circ f)(x)$ 2. $(g \circ f)'(x)$ 3. $(g \circ f)'(-2)$.

Resolução

1. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(x^2\right) = e^{x^2}$.
2. $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big) = (x^2)'(e^u)'|_{u=x^2} = 2xe^{x^2}$.
3. $(g \circ f)'(-2) = 2(-2)e^{(-2)^2} = -4e^4$.

2.4 Derivada da função inversa

Na figura 51 está representada uma recta de declive $m = 2$. Trocando o papel dos eixos do referencial, i.e., considerando como eixo dos xx o eixo dos yy e como eixo dos yy o eixo dos xx, a mesma recta fica, neste novo referencial, com o declive $m = \frac{1}{2}$. Consideremos agora a figura 52.

1. A função $f(x) = x^2$ aí representada é bijectiva no intervalo $[0, +\infty[$.
2. Admite, por isso, uma função inversa, na restrição $[0, +\infty[$ do seu domínio. Podemos ler do gráfico que, por exemplo, $f(2) = 4$ e por isso $f^{-1}(4) = 2$.
3. A recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $x = 2$, cuja equação é $y = 4x - 4$, tem declive $m = 4$. Isto significa que $f'(2) = 4$.
4. Como o gráfico de f^{-1} se obtém do gráfico de f trocando os papéis dos eixos do referencial, podemos afirmar que o valor da derivada de f^{-1} no ponto $x = 4$ é $m = \frac{1}{4}$, i.e.,

$$\left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{f'(2)}.$$

Podemos generalizar este resultado da seguinte forma.

Teorema 15. Seja f uma função invertível numa vizinhança do ponto $x = a$ e derivável nesse ponto. Então, a derivada da função inversa f^{-1} no ponto $b = f(a)$ é dada por

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

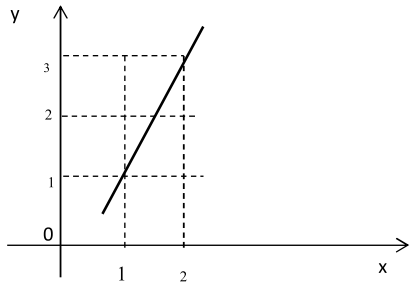

Figura 51

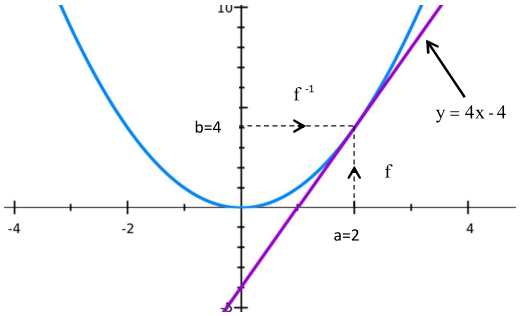

Figura 52: $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Vídeo . *2.45 (no anexo deste capítulo)*

Exercício 10. Calcular a derivada da função $f^{-1}(x)$, sendo $f(x) = e^x$.
Resolução
Se $x = a$ é um ponto genérico do domínio de $f(x) = e^x$, então a sua imagem por f é e^a. Pelo teorema 15, podemos escrever

$$\left(f^{-1}\right)'(e^a) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{e^a}. \tag{3.6}$$

Sabemos que a função inversa de $f(x) = e^x$ é

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

e por isso

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

, pelo que podemos escrever

$$\left(\ln(x)\right)'|_{x=e^a} = \frac{1}{e^a},$$

em concordância com o resultado que figura na expressão (3.6).

3 Teoremas relativos a funções deriváveis

O resultado seguinte diz-nos que uma função derivável num ponto é contínua nesse ponto.

Teorema 16. Se existe $f'(a)$, então f é contínua no ponto $x = a$.

A afirmação recíproca deste teorema é falsa, i.e., uma função pode ser contínua num ponto e não ser aí derivável. Por exemplo, a função representada na figura 53 é contínua no ponto $x = 1$, apesar de não ter derivada neste ponto, por serem aí diferentes as derivadas laterais.

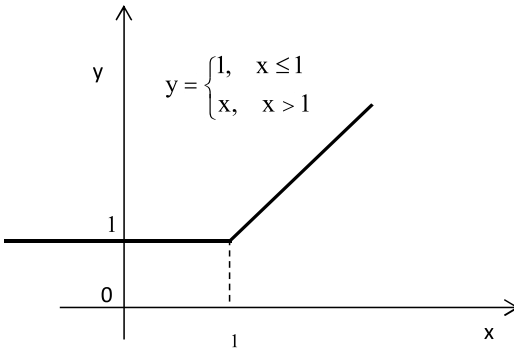

Figura 53

$$
\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0 \\
f'_+(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h} = 1
\end{aligned}
$$

O teorema seguinte permite-nos localizar zeros da função derivada (figura 54).

Teorema 17. (de Rolle) Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo (a,b), tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

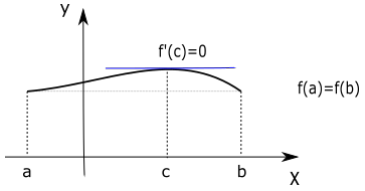

Figura 54

4 Derivadas de ordem superior

Até agora falámos de derivadas de *primeira ordem*. Dada um função $f(x)$ vimos que a sua derivada se pode representar por qualquer uma das formas

$$f'(x), \qquad \text{ou} \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}f(x).$$

Exemplo 36.

$$\begin{aligned}(x^4)' &= 4x^3\\ \frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3\\ \frac{d}{dx}sen(x) &= cos(x)\\ \frac{d}{dx}\ln(x) &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Se derivarmos agora a função $f'(x)$ obtemos a derivada de *segunda ordem* de $f(x)$, que se representa, em geral, por qualquer uma das formas

$$f''(x), \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

sendo

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right).$$

Exemplo 37.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}x^4 &= \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2\\ \frac{d^2}{dx^2}sen(x) &= \frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)\\ \frac{d^2}{dx^2}\ln(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Este conceito de derivação sucessiva estende-se a qualquer ordem de derivação, podendo falar-se de *derivada de ordem três*, ou *terceira derivada*, *derivada de ordem quatro*, ou *quarta derivada*, $\cdots$, *derivada de ordem n*, ou *derivada n-ésima* de uma função $f(x)$. Quando se usa a notação com linhas, $f', f'', \cdots$, é costume, se a ordem de derivação é maior que 3, usar notação romana em vez das linhas, ou colocar entre parênteses curvos a ordem da derivada em notação árabe.

Exemplo 38.

f^{iv} ou $f^{(4)}$ para a quarta derivada
f^{v} ou $f^{(5)}$ para a quinta derivada
etc.

Da mesma forma que a primeira derivada nos dá informação sobre a variação de f, a segunda derivada f'' dá-nos informação sobre a variação de f', a terceira derivada dá-nos informação sobre a variação de f'', etc.

5 Derivada da função implícita

Uma função diz-se representada na *forma implícita*, se a fórmula que a representa não tem a *forma explícita* de uma equação resolvida em ordem a y, i.e., $y = f(x)$.

Exemplo 39.

$y = 3x+2$	forma explícita da equação de uma recta
$y-3x = 2$	uma forma implícita da equação da mesma recta
$y-3x-2 = 0$	outra forma implícita da equação da mesma recta

Exemplo 40.

$y = x^2-3x+2$	forma explícita de uma função quadrática
$2-y = 3x-x^2$	uma forma implícita da função anterior

Exemplo 41. A equação $y^2 = 3x-1$ representa implicitamente as duas funções

$$y = \pm\sqrt{3x-1}.$$

A forma geral das funções implícitas é $F(x,y) = 0$, sendo o primeiro membro uma expressão que envolve a variáveis x e y.

Na prática deparamo-nos, em alguns casos, com funções na forma implícita, podendo não ser fácil, ou ser mesmo impossível, escrevê-las na forma explícita. Apesar disto é possível, em certas situações, obter a derivada y' da função assim representada sem ser necessário obter previamente a sua forma explícita.

Exercício 11. Calcular a derivada y' da função implícita $y-2x = 3$, sem escrever previamente a equação da função na forma explícita.
Resolução
Se temos duas funções *equivalentes*[2], $f(x) = g(x)$, podemos escrever

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).$$

Como a expressão $y-2x = 3$ exprime a equivalência das funções $y-2x$ e 3, podemos escrever

$$(y-2x)' = (3)' \Rightarrow y'-2 = 0 \Rightarrow y' = 2.$$

O resultado obtido para y' é o mesmo que se obtém resolvendo previamente a equação em ordem a y.

Exercício 12. Obter a equação da recta tangente à circunferência $x^2+y^2 = 4$, no ponto $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2})$ (ver figura 55).
Resolução
A circunferência tem centro na origem $(0,0)$ do referencial e raio igual a 2. Começamos por verificar que o ponto $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2})$ é um ponto da circunferência, substituindo estas coordenadas na equação e mostrando que a igualdade é verificada.

$$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 = 4 \Leftrightarrow 2+2 = 4.$$

Para obter a recta procurada, $y = mx+b$, precisamos de calcular o valor de y' no ponto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, que representa o declive da recta. Para isso derivamos a função implícita $x^2+y^2 = 4$ para obter y'.

$$(x^2+y^2)' = (4)' \Rightarrow 2x+2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

[2] Duas funções dizem-se equivalentes se têm o mesmo domínio, e se tomam valores iguais em cada ponto do domínio.

O valor de y' no ponto $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2})$ é $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$. Ficamos a saber que a equação da recta tangente é da forma $y = -x+b$. Resta-nos calcular o valor de b. Como a recta contém o ponto $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2})$, temos

$$\sqrt{2} = -\sqrt{2}+b \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}.$$

A equação da recta tangente procurada é $y = -x+2\sqrt{2}$.

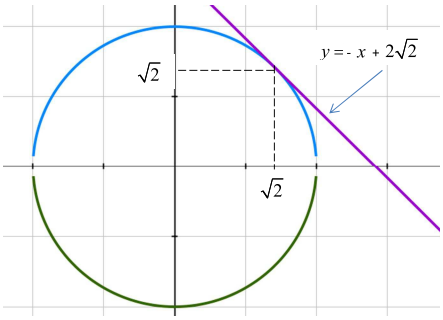

Figura 55

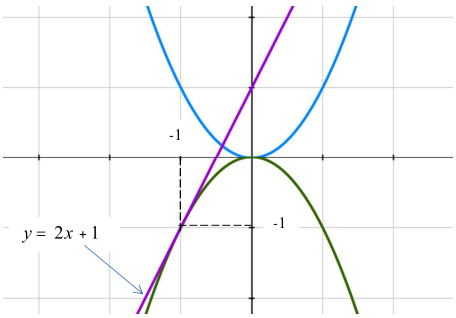

Figura 56

Exercício 13. Obter a equação da recta tangente ao gráfico que representa a equação $y^2 = x^4$, no ponto $(x,y) = (-1,-1)$ (ver figura 56).

Resolução

A equação $y^2 = x^4$ representa duas funções, $y = \pm x^2$. Vamos obter as derivadas das funções representadas implicitamente por esta equação.

$$(y^2)' = (x^4)' \Rightarrow 2yy' = 4x^3 \Rightarrow y' = \frac{2x^3}{y}.$$

Para obter a recta procurada, $y = mx+b$, precisamos de calcular o valor de y' no ponto $(x,y) = (-1,-1)$.

$$m = \frac{2(-1)^3}{-1} = 2.$$

Ficamos a saber que a equação da recta tangente é da forma $y = 2x+b$. Resta-nos calcular o valor de b. Como a recta contém o ponto $(x,y) = (-1,-1)$, temos

$$-1 = -2+b \Leftrightarrow b = 1.$$

A equação da recta tangente procurada é $y = 2x+1$.

Anexo: Vídeos

Função, Domínio, Imagem, Contradomínio, Gráfico

2.1 Ideia de função [06:25]	2.2 Gráfico de uma função [07:38]	2.3 Gráfico: raiz quadrada [10:12]	2.4 Gráfico: exponencial [04:48]	2.5 Gráfico: logaritmo [05:51]
2.6 Gráfico: seno [12:37]	2.7 Contradomínio [08:00]			

Operações com Funções, Função Composta, Função Inversa, Funções Elementares

2.8 Operações com Funções [13.33]	2.9 Função Composta, 1 [05:10]	2.10 Função Composta, 2 [05:50]	2.11 Função Composta, exercício [10:09]	2.12 Função Inversa [09:01]

2.13	2.14	2.15	2.16
Função inversa: exponencial [10:24]	Função inversa: quadrática [06:50]	Composta de Funções Inversas [03:57]	Funções Elementares [05:53]

Limite de uma Função num Ponto, Funções Contínuas

2.17	2.18	2.19	2.20	2.21
Constante de Neper [02:10]	Limite de uma função num ponto - 1 [07:12]	Limite de uma função num ponto - 2 [06:58]	Exercício [01:01]	Exercício [05:11]

2.22	2.23	2.24	2.25
Continuidade de uma função num ponto [03:12]	Exercício [02:45]	Exercício [08:47]	Importância da continuidade na relação output/input de sistemas físicos [03.36]

Derivadas: taxa de variação média e instantânea; velocidade média e instantânea; interpretação gráfica

2.26	2.27	2.28	2.29	2.30
Taxa de variação média [07.07]	Velocidade média [03:59]	Taxa de variação instantânea [06:21]	Derivada de uma função num ponto [06:28]	Derivada = velocidade [03:23]

2.31	2.32	2.33
Velocidade instantânea [06:35]	Derivada num ponto: interpretação gráfica [06:03]	f' é o velocímetro de f [09:22]

Derivadas de algumas funções; declive da recta tangente ao gráfico num ponto

2.34	2.35	2.36	2.37	2.38
Derivada da parábola [07:40]	Derivada da raiz quadrada [06:17]	Derivada: notação e unidades [04:42]	Derivada num ponto=declive da recta tangente [02:41]	Curva suave [2.27]

Derivadas de algumas funções elementares; regras de derivação

2.39	2.40	2.41	2.42	2.43
Derivadas de funções elementares [07.59]	Derivação de somas, produtos e cocientes [02.17]	Derivação da soma: prova [02:11]	Derivação do produto: prova [05:03]	Derivação do cociente: prova [04:35]

Derivada da função composta; derivada da função inversa

2.44	2.45
Derivada da função composta [05:29]	Derivada da função inversa [12:20]