Sebenta de Cálculo I

Capítulo 1. Conceitos de Base

Bragança, Setembro 2021

Mário Abrantes

Se consegues resolver, não penses que sabes tudo.
Se não consegues resolver, não desanimes.
Se parece fácil, não resolvas de forma displicente.
Se parece difícil, não desistas.
Percorre o teu caminho temperando o almejo com sobriedade e paciência.

Matérias do Capítulo 1

Capítulo 1

Conceitos de Base

1 Números e Aritmética

A *Aritmética* é uma área da matemática que estuda as propriedades das operações com números, como a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão, o cálculo de potências, de raízes, de logaritmos, etc. É parte fundamental de uma área de estudo mais alargadada conhecida por *Teoria de Números*.

1.1 Representação decimal

Um número diz-se representado na *forma decimal* se está escrito como uma sequência de dígitos contendo o ponto decimal[1], como por exemplo 12.34 ou 0.04 ou 1.333. A sequência de dígitos à esquerda do ponto diz-se *parte inteira* do número, designando-se a sequência de dígitos à direita do ponto por *parte fraccionária* (ou *dízima*) do número.

Exemplo 1.

12.34	parte inteira 12, parte fraccionária 0.34
0.04	parte inteira 0, parte fraccionária 0.04

A representação decimal de um número inteiro, por exemplo 25, dispensa o ponto. Poderiamos, no entanto, escrever 25.0, que é uma representação equivalente.[2] Nas figuras 1 e 2 indicam-se as designações das posições dos dígitos relativamente ao ponto decimal.

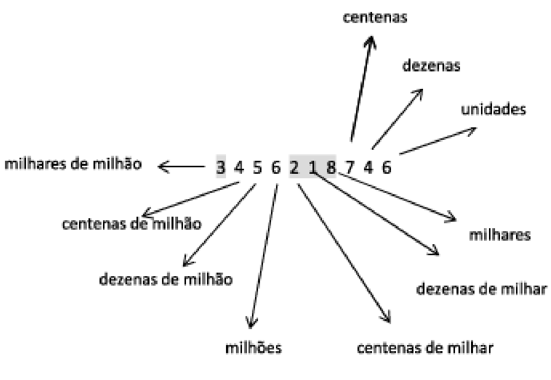

Figura 1: Valor posicional dos dígitos de números inteiros.

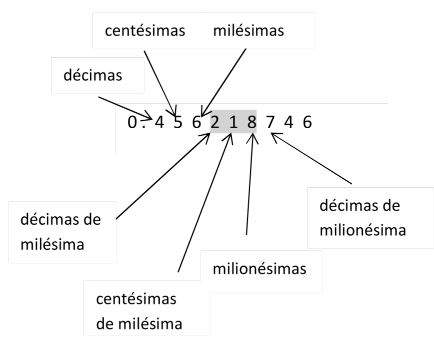

Figura 2: Valor posicional dos dígitos na dízima.

[1] Também se pode usar um vírgula em vez do ponto decimal. Nestes apontamentos usamos o ponto decimal.
[2] Nos textos de física e de engenharia a notação 25.0 representa um valor que se sabe ser maior ou igual a 24.5, mas menor que 25.5 (resultante, por exemplo, de uma medição).

Representação de números por extenso

O número decimal 3.456 pode escrever-se em português como 'três unidades e quatrocentas e cinquenta e seis milésimas'. Esta representação em português diz-se *representação por extenso*. Também podemos simplesmente dizer 'três ponto quatro cinco seis' ou 'três ponto quatrocentos e cinquenta e seis'. Mas é mais claro e prático dizer, por exemplo, o número 0.000006 da forma 'seis milionésimas' do que da forma 'zero ponto zero zero zero zero zero seis'.

Exercício 1. Representar por extenso os seguintes números.

(a) 14.256 (b) 0.023 (c) 0.000023 (d) 3222247653

Solução (a). Catorze unidades e duzentas e cinquenta e seis milésimas.

1.2 Operações elementares da aritmética

As operações elementares da aritmética (também designadas por *operações racionais*) são a adição, a subtracção, a multiplicação e a divisão. São operações que devemos saber resolver para perceber o seu significado nas aplicações práticas. Os símbolos $+, -, \times, \div$ designam-se por *operadores aritméticos racionais* (um operador representa uma certa operação). Os números ou expressões envolvidos numa operação, sejam o número 2 e o número 3 envolvidos na soma $2+3$, designam-se por *operandos*. O valor obtido depois de efectuada a operação, designa-se por *resultado* da operação. Os operadores $+, -, \times, \div$ dizem-se *operadores binários* por operarem sobre *dois* operandos. O operador '$-$' é um exemplo de um *operador unário*, quando usado sobre um só operando, como no caso da expressão -2.

1.2.1 Adição e subtracção

A figura 3 nomeia os números envolvidos numa adição (operandos e resultado).

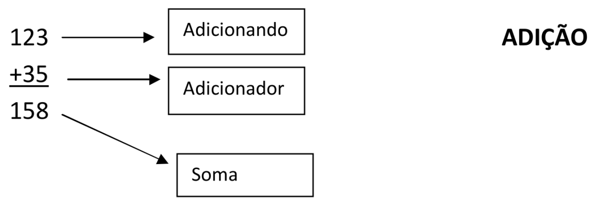

Figura 3: Os números 123 e 35 também se designam por *parcelas*.

A figura 4 exemplifica a adição de números na forma decimal. A operação decorre ignorando os pontos decimais, que são considerados apenas no final.

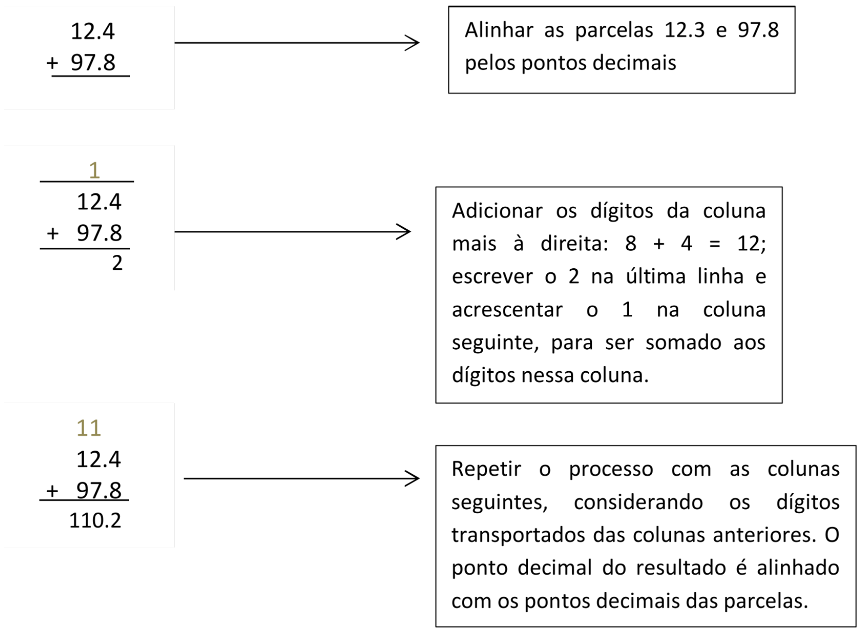

Figura 4: Adição de números na forma decimal.

Vídeos. *1, 2 (no anexo deste capítulo)*

Propriedades da adição/subtracção[3] [a, b e c são números reais]

- Comutativa: $a + b = b + a$
- Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existência de elemento neutro (zero): $a + 0 = a$
- Existência de inverso aditivo $a + (-a) = 0$

A figura 5 seguinte nomeia os números envolvidos numa subtracção.

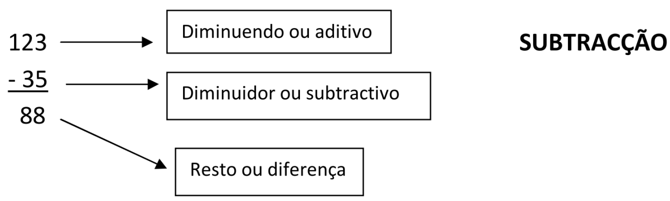

Figura 5

A figura 6 exemplifica a subtracção de números na forma decimal. A operação decorre ignorando os pontos decimais, que são considerados apenas no final.

[3]Se considerarmos o conjunto formado pelos números negativos, juntamente com o zero e com os números positivos (conjunto $\mathbb{R}$), a subtracção pode considerar-se um caso particular da adição, para efeito da validade destas propriedades. Por exemplo, a expressão $4 - 2$ pode ser escrita como $4 + (-2)$.

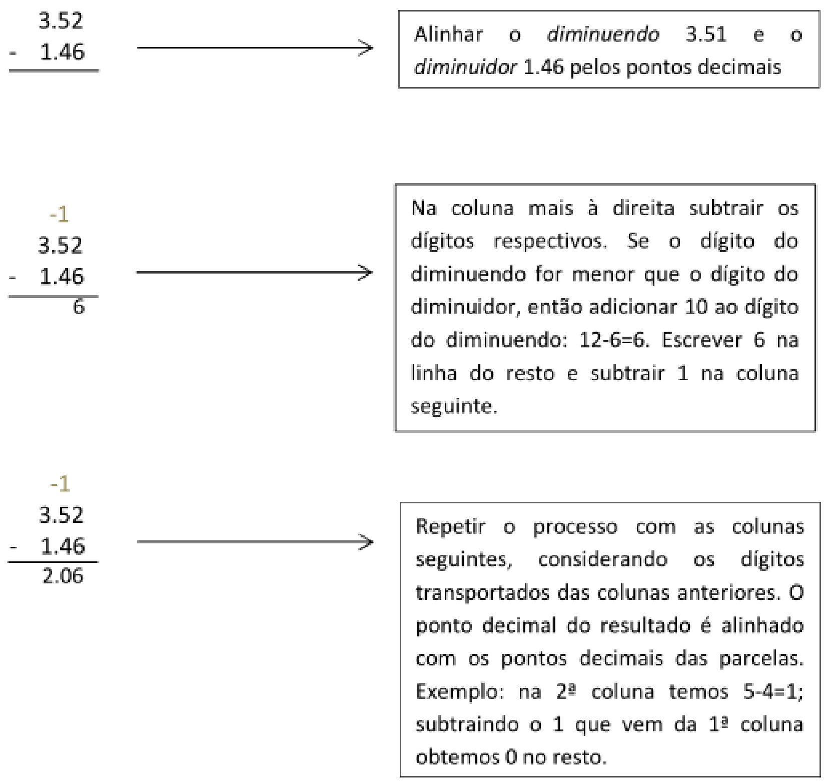

Figura 6: Subtracção de números na forma decimal.

Vídeos. *3, 4 (no anexo deste capítulo)*

1.2.2 Valor absoluto de um número real

O *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x, corresponde ao próprio número x, se este for positivo ou se for o número zero, ou corresponde ao seu simétrico $-x$, se o número x for negativo. O valor absoluto de um número x indica-se na forma $|x|$. O operador módulo é um operador *unário* já que actua sobre um só operando.

Exemplo 2. $|12| = 12 \qquad |-2.5| = -(-2.5) = 2.5 \qquad |0| = 0$

Exercício 2. Calcular o valor decimal das expressões numéricas.

$(a)\ 2.367 - 1.902 \qquad (b)\ -2.367 + 1.902$

$(c)\ 2 - (-3) + |3-4| \qquad (d)\ \big||3-6| - 4 + |3-4|\big|$

Solução (d). $\big||3-6| - 4 + |3-4|\big| = \big||-3| - 4 + |-1|\big| = |3-4+1| = |0| = 0$

1.2.3 Multiplicação e divisão

Multiplicação. Uma das vantagens da operação de multiplicação envolvendo números inteiros, é funcionar como um abreviador de somas. Como exemplo, é mais rápido efectuar a operação 7×5 $(= 35)$ do que efectuar a operação numericamente equivalente $7+7+7+7+7$.[4]

[4] Uma sequência de somas designa-se por *adição sucessiva*, *soma sucessiva* ou *somatório*.

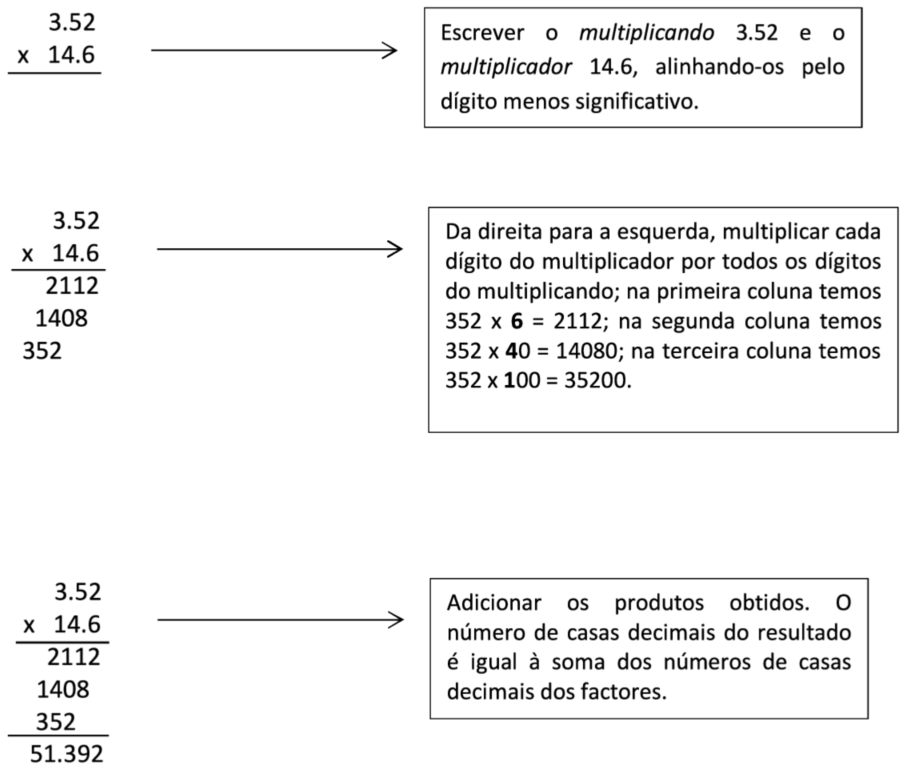

Figura 8: Multiplicação de números na forma decimal.

Para podermos tirar partido desta funcionalidade é necessário conhecer a *tabuada da multiplicação*[5].

A figura 7 seguinte nomeia os números envolvidos numa multiplicação.

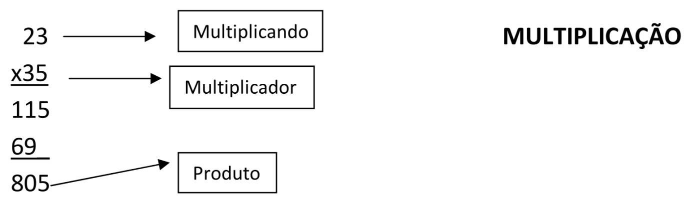

Figura 7: Os números 23 e 35 também se designam por *factores*.

A figura 8 exemplifica a multiplicação de números na forma decimal. A multiplicação decorre ignorando os pontos decimais, isto é, tratando os factores como números inteiros, e colocando o ponto decimal no resultado final obtido.

Vídeos. *5, 6 (no anexo deste capítulo)*

Propriedades da multiplicação [a, b e c são números reais]

- Comutativa: $a \times b = b \times a$

[5]Deves treinar-te para saber de cor os valores das expressões numéricas desde 1×1 a 9×9.

- Associativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Existência de elemento neutro (unidade): $a \times 1 = a$
- Existência de inverso multiplicativo: $a \times \frac{1}{a} = 1$
- Distributiva relativamente à adição: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemplo 3. Usar as propriedades da multiplicação para demonstrar as leis seguintes.

$$(a+b)c = ac + bc \qquad\qquad a \times b \times c \times d = a \times (b \times (c \times d))$$

As propriedades servem para simplificar e esclarecer o modo como se fazem cálculos. Consideremos, por exemplo, o duplo produto $2 \times 3 \times 4$. Querendo resolver estas operações, por que operador '$\times$' começamos? Começamos por 2×3, por 3×4, ou tanto faz? O que a propriedade *associativa* acima diz é que tanto faz, isto é, podemos calcular primeiro 2×3 e multiplicar em seguida o resultado por 4 – é o que significa $(a \times b) \times c$ - ou então podemos calcular primeiro 3×4, multiplicando depois o resultado obtido por 2 – é o que significa $a \times (b \times c)$. O resultado final é o mesmo.

Exercício 3. Calcular o valor decimal das expressões numéricas.

$$(a) 2.3 \times 1.9 \qquad (b)\ 23 \times 0.19 \qquad (c)\ 0.23 \times 0.19$$

Solução (b). $23 \times 0.19 \ = \ 23 \times 19 \times 10^{-2} \ = \ 437 \times 10^{-2} \ = \ 4.37$

Notação com potências de base 10. Potências de base 10 são números na forma 10^n, sendo n um número inteiro.

Exemplo 4. Representação de números usando potências de base 10.

$10^0 = 1$	uma unidade (um)
$10^1 = 10$	uma dezena (dez)
$10^2 = 100$	uma centena (cem)
$10^3 = 1000$	um milhar (mil)
$10^6 = 1000000$	um milhão (mil milhares)
10^{12}	um bilião (um milhão de milhões)
10^{18}	uma trilião (um milhão de biliões)
$10^{-1} = 0.1$	uma décima (um décimo)
$10^{-2} = 0.01$	uma centésima (um centésimo)
$10^{-3} = 0.001$	uma milésima (um milésimo)
$10^{-6} = 0.000001$	uma milionésima (um milionésimo)
10^{-12}	uma bilionésima (um bilionésimo)
10^{-18}	uma trilionésima (um trilionésimo)

Nota. Na terminologia brasileira *bilhão* refere o número 10^9 , *trilhão* o número 10^{12} , etc; na língua inglesa *billion* refere o número 10^9, *trillion* o número 10^{12}, etc. Na terminologia brasileira *bilionésima* refere o número 10^{-9}, *trilionésima* o número 10^{-12}, etc; na língua inglesa *billionth* refere o número 10^{-9}, *trillionth* o número 10^{-12}, etc. A terminologia portuguesa corresponde à chamada *long scale*, enquanto as terminologias brasileira e inglesa correspondem à chamada *short-scale*. É preciso cuidado com algumas traduções portuguesas de textos em inglês, ou em português do Brasil, que por vezes traduzem 'à letra' estas expressões, usando erradamente, por exemplo, 'um bilião' para traduzir 'one billion' ou 'um bilhão'.

O uso de potências de base 10 simplifica a representação de números muito pequenos ou muito grandes e as operações entre eles.

Exemplo 5. Representação e multiplicação de números usando potências de base 10.

$0.002 = 2 \times 0.001 = 2 \times 10^{-3}$

$3000000 = 3 \times 1000000 = 3 \times 10^6$

$10^3 \times 10^2 = 1000 \times 100 = 100000 = 10^5 = 10^{3+2}$.

$10^3 \times 10^{-2} = 1000 \times 0.01 = 10 = 10^1 = 10^{3-2}$.

A operação 0.002×3000000 efectua-se mais facilmente se for representada na forma $2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^6$. Fica

$$2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^6 = 2 \times 3 \times 10^{-3} \times 10^6 = 6 \times 10^3 = 6000$$

.

Divisão A figura 9 nomeia os operadores envolvidos numa divisão.

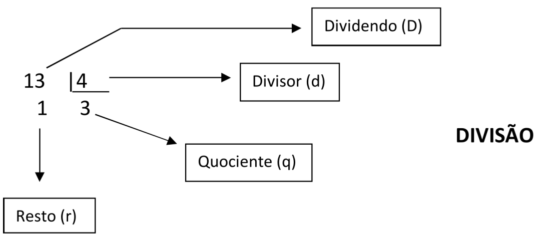

Figura 9: $D = d \times q + r \Leftrightarrow 13 = 4 \times 3 + 1$.

As figuras 10 e 11 exemplificam a divisão envolvendo apenas número inteiros, habitualmente designada por *divisão inteira*.

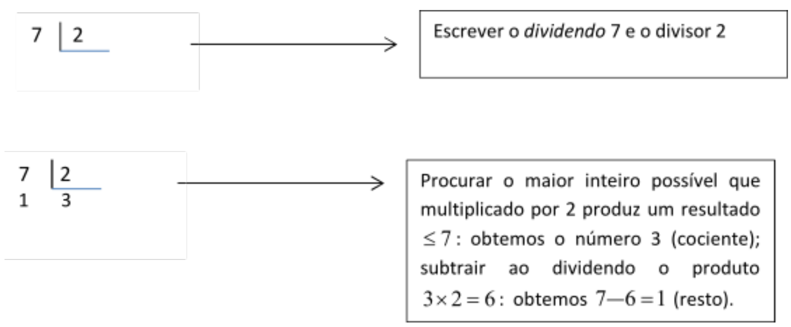

Figura 10: Divisão inteira.

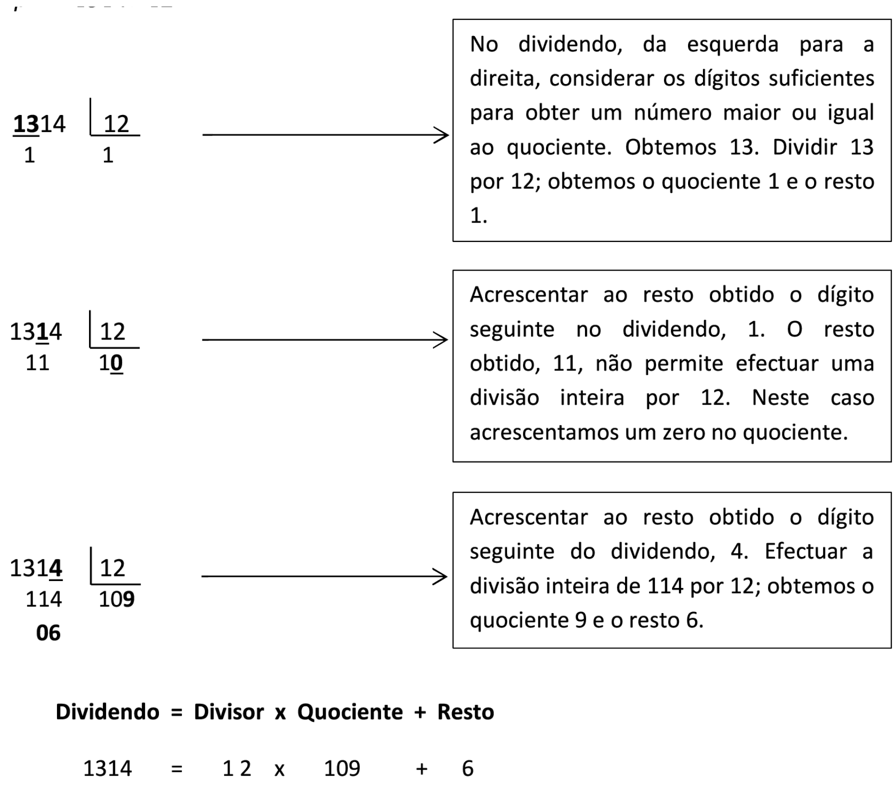

Figura 11: Divisão inteira.

Dados dois números inteiros a e b, diz-se que b *divide* a (ou que a é *divisível* por b), e escreve-se $b|a$, se a divisão inteira de a por b tem resto zero. Por exemplo, 30 é divisível por 6 dado que $30 \div 6 = 5$. O número 6 diz-se um *divisor* de 30.

Exercício 4. *Indicar todos os divisores do número* 30.

Vídeos . *7, 8, 9 (no anexo deste capítulo)*

A figura 12 exemplifica a divisão de números na forma decimal, por vezes designada por *divisão real*. A divisão decorre ignorando os pontos decimais, que são considerados apenas no final.

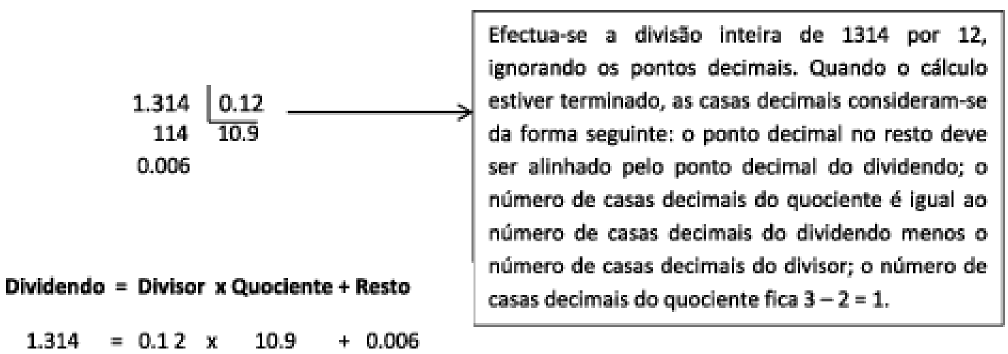

Figura 12: Divisão real.

A expressão $a \div b$ indica o valor exacto da divisão de a por b (i.e., o resto associado à operação é zero). Por exemplo $1 \div 3$ representa a dízima infinita $0.3333\cdots$. A operação não termina.

Usando a operação efectuada na figura 12 podemos escrever

$$1.314 \div 0.12 \approx 10.9.$$

Exemplo 6. A expressão $12 \div 3 = 4$ pode ter vários significados. Por exemplo (a) um conjunto de 12 objectos pode ser dividido em 3 grupos de 4 objectos; (b) se 3 unidades de um dado produto custam 12€, então cada unidade custa 4€.

Vídeos . *8 – 13 (no anexo deste capítulo)*

Exercício 5. *Sem usar calculadora, efectuar parcialmente cada uma das divisões até obter o resto r indicado, e representar a operação efectuada na forma $Dividendo = divisor \times quociente + resto$.*

(a) $3.24 \div 100,\ \ r = 0$ *(b)* $11 \div 12,\ \ r = 0.08$ *(c)* $1.1 \div 0.27,\ \ r = 0.00002$

(d) $35.5 \div 0.29,\ \ r = 0.004$ *(e)* $1.02 \div 234,\ \ r = 0.084$ *(f)* $142 \div 13,\ \ r = 0.3$

Solução (d). $35.5 = 0.29 \times 122.4 + 0.004$

Exercício 6. *Verificar que a operação de divisão não possui nem a propriedade comutativa, nem a propriedade associativa.*

1. *Mostrar com um contra-exemplo*[6] *que a divisão não goza da propriedade comutativa.*
2. *Utilizar a expressão* $12 \div 4 \div 2$ *para mostrar que a operação de divisão não goza da propriedade associativa, i.e., geralmente* $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$.

   Solução. $(12 \div 4) \div 2\ =\ 3 \div 2\ =\ 1.5\ \neq 12 \div (4 \div 2)\ =\ 12 \div 2\ =\ 6$
3. *Notar porém que, para alguns casos, a igualdade* $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ *é válida. Apresentar dois exemplos de números* a, b, c *que validam a igualdade.*

Exercício 7. *Indicar todas as divisões inteiras* $a \div b$ *sugeridas por cada uma das expressões.*

(a) $12 = 4 \times 3$ *(b)* $8 = 4 \times 2$ *(c)* $25 = 5 \times 5$

Solução (a). $12 \div 4\ =\ 3 \qquad 12 \div 3\ =\ 4$

Exercício 8. *Indicar as divisões e/ou multiplicações sugeridas pelas perguntas.*

1. *Dez gramas de um produto custam* 23*cts. Qual o preço de* **um** *grama do produto?*
2. *Dez gramas de um produto custam* 23*cts. Quantos gramas do produto se podem comprar com* **um** *cêntimo?*
3. *Um carro percorre* 120 *quilómetros em* $4.5h$*. Quantas horas leva a percorrer* **um** *quilómetro?*
4. *Um carro percorre* 120 *quilómetros em* $4.5h$*. Que distância percorre em* **uma** *hora?*

   Solução. Distância $=\ 120 \div 4.5\ \approx\ 26.7 km/h$
5. *Uma hora tem* 60 *minutos. Quantas horas correspondem a* 7200 *minutos?*

[6] Um *contra-exemplo* é um exemplo que refuta (=nega a validade de) uma dada afirmação. Assim, a afirmação 'a soma de quaisquer dois números inteiros é maior que 100' é refutada pelo contra-exemplo $2 + 5 = 7$, dado que 2 e 5 são dois números inteiros mas a sua soma não é maior que 100.

1.2.4 Números Primos. Mínimo Múltiplo Comum. Máximo Divisor Comum

Números Primos Um *número primo* é um número inteiro positivo, maior que 1, que só é divisível por si mesmo e pela unidade. Por exemplo, $2, 5, 7, 11$ são números primos. Já 22 não é um número primo, porque além de ser divísivel por 22 e por 1 é também divisível por 11.

O seguinte é um importante resultado da Teoria de Números.

Teorema 1. Todo o número inteiro maior que 1 pode ser representado por uma multiplicação de números primos que é única a menos da ordem dos factores.

Exemplo 7. $22 = 2 \times 11$.
2×11 é a factorização de 22 num produto de números primos (2 e 11). Não existe nenhum outro produto de números primos cujo resultado seja 22. O produto 11×2 representa o número 22. Deste produto para o anterior só muda a ordem dos factores. Os número primos envolvidos são os mesmos.

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$.
$2, 3$ e 5 são os números primos envolvidos na factorização em números primos de 60. A menos da ordem dos factores, não existe nenhuma outra factorização de 60 em números primos.

Mínimo Múltiplo Comum O número inteiro x diz-se *múltiplo* do número inteiro y, se e somente se y divide x. Também se diz que y é *submúltiplo* de x.

Exemplo 8. 36 é múltiplo de 12, e por isso 12 é submúltiplo de 36, porque $36 \div 12 = 3$. O número 36 é também múltiplo e submúltiplo de si mesmo. Porquê?

O *mínimo múltiplo comum* de dois números inteiros x, y é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de x e de y, e escreve-se $mmc(x, y)$.

Exemplo 9. $mmc(3, 4) = 12$ porque $3|12$, $4|12$ e 12 é o menor inteiro positivo que satisfaz estas duas condições. O numero 24 é um múltiplo comum de 3 e de 4, mas não é o menor dos múltiplos comuns.

Exercício 9. *Determinar* $mmc(12, 15)$.

Solução

1. *Factorizar* 12 *e* 15 *em números primos.*

$$12 = 2^2 \times 3 \qquad 15 = 3 \times 5$$

2. *O* $mmc(12, 15)$ *obtém-se escrevendo o produto que envolve todos os factores primos de* 12 *e* 15. *Cada factor comum aos dois números escreve-se com o maior expoente com que aparece em cada um dos números.*

$$mmc(12, 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60.$$

Exercício 10. *Determinar* $mmc(72, 44)$.

Solução

1. *Factorizar* 72 *e* 44 *em números primos.*

$$72 = 2^3 \times 3^2 \qquad 44 = 2^2 \times 11$$

2.

$$mmc(72, 44) = 2^3 \times 3^2 \times 11 = 792.$$

Máximo Divisor Comum O *máximo divisor comum* de dois números inteiros x, y é o maior inteiro positivo que divide simultaneamente de x e de y, e escreve-se $mdc(x, y)$.

Exemplo 10. $mdc(18, 24) = 6$ porque $6|18$, $6|24$ e 6 é o maior inteiro positivo que satisfaz estas duas condições. Os números $1, 2, 3$ são também divisores comuns de 18 e de 24, mas nenhum deles é o maior dos divisores comuns.

Exercício 11. *Determinar* $mdc(140, 210)$.

Solução

1. *Factorizar* 140 *e* 210 *em números primos.*

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7 \qquad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

2. *O* $mdc(140, 210)$ *obtém-se escrevendo o produto que envolve todos os factores primos comuns a* 140 *e* 210*,*

$$mdc(140, 210) = 2 \times 5 \times 7 = 210.$$

1.2.5 Prioridade das operações aritméticas

Uma expressão aritmética como, por exemplo, $3 \div (4 - 1/3)^2 \times 23$, tem o mesmo valor numérico independentemente de quem a resolva. Para que todos quanto resolvam uma dada expressão aritmética possam chegar ao mesmo valor, e para que uma expressão aritmética possa ser escrita sem ambiguidades quanto à ordem pela qual se escolhem os operadores a resolver, estipulou-se, para além das propriedades dos operadores, uma regra de prioridades entre os vários operadores aritméticos.

A lista seguinte indica a prioridade das operações numa expressão aritmética, da mais elevada (1) para a mais baixa (4).

1. Operações entre parênteses.

2. Potências (raízes).

3. Multiplicações e divisões.

4. Adições e subtracções.

Exemplo 11.

1. Resolver as expressões entre parênteses.
   Exemplo. Da expressão $(2+5)^2$, está certo dizer que tem o mesmo valor que 7^5; está errado dizer que tem o mesmo valor que $2^2 + 5^2$.

2. Resolver as potências (raízes).
   Exemplo. Da expressão 5×3^2, está certo dizer que tem o mesmo valor que 5×9; está errado dizer que tem o mesmo valor que $(5 \times 3)^2$.

3. Resolver multiplicações e divisões antes de somas e subtracções.
   Exemplo. Da expressão $5 \times 3 + 2$, está certo dizer que tem o mesmo valor que $15 + 2$; está errado dizer que tem o mesmo valor que 5×5.

4. A resolução da expressão $15 \div 3 \times 2$ dá o valor 10, se a divisão for efectuda primeiro e depois a multiplicação; dá o valor $15/6$, se a multiplicação for efectuda primeiro e depois a divisão. Existe uma regra para aplicar em casos como este, no qual temos que decidir entre operadores com igual prioridade, que diz que devemos começar a resolução pelo operador mais à esquerda. Assim sendo, começamos pela divisão e o valor final é 10. Mas esta regra não é consensual. Há quem leia a expressão a/bc como $a/(bc)$, o que não está de acordo com a regra enunciada. Na dúvida, quando escrevermos uma expressão devemos usar parênteses para evitar incertezas sobre as operação a realizar. Se escrevermos $(15 \div 3) \times 2$, obtemos uma expressão cuja resolução não levanta nenhum tipo de dúvidas.

1.3 Fracções

Uma *fracção* é qualquer expressão na forma $\frac{a}{b}$, sendo a, b números inteiros e $b \neq 0$. A figura 13 nomeia os termos envolvidos numa fracção.

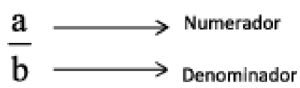

Figura 13: Designações dos termos de uma fracção.

A expressão $\frac{a}{b}$ representa o mesmo número que a expressão $a \div b$.

Exemplo 12.

1. $\frac{4}{2} = 4 \div 2 = 2$
2. $\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0.5$
3. $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.666\cdots$

Nota. Um número de *dízima infinita periódica* como $1.666\cdots$, também se pode representar na forma mais compacta $1.\overline{6}$. Outro exemplo: $23.567567567\cdots$ pode escrever-se $23.\overline{567}$. Veremos adiante que todos os números de dízima infinita periódica podem ser representados por fracções.

Vídeo. *14 (no anexo deste capítulo)*

O valor de uma fracção não se altera se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador pelo mesmo número, não nulo, isto é, dada a fracção

$$\frac{a}{b}$$

e um número $c \neq 0$, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a \div c}{b \div c}.$$

Exemplo 13.

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{8}{6} \qquad \frac{8}{6} = \frac{8 \div 2}{6 \div 2} = \frac{4}{3}.$$

Dizemos que uma fracção $\frac{a}{b}$, com a, b inteiros positivos, se encontra na *forma reduzida*, se não existe uma fracção equivalente com numerador menor que a e denominador menor que b.

Exemplo 14.

A forma reduzida da fracção	$\frac{9}{27}$	é	$\frac{1}{3}$
A forma reduzida da fracção	$\frac{49}{14}$	é	$\frac{7}{2}$
A forma reduzida da fracção	$-\frac{8}{18}$	é	$-\frac{4}{9}$

Exercício 12. *Escrever as fracções na forma reduzida.*

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{64}{16}$ (c) $\frac{18}{30}$

Operações com fracções. Qual o interesse em representar números por fracções? Que vantagens existem em escrever $\frac{1}{2}$ em vez de 0.5? A representação de números usando fracções facilita as operações aritméticas. Este ponto ficará claro depois de falarmos de operações com fracções.

Adição/Subtracção de fracções

Exemplo 15. Efectuar operação

$$\frac{1}{24} + \frac{3}{9}$$

Solução

1. *Para simplificar, coloca-se a segunda fracção na forma reduzida.*

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{3}$$

2. *Escrevem-se ambas as fracções com o denominador comum igual a* $mmc(24,3)$. [7]

$$\frac{1}{24_{(\times 1)}} + \frac{1}{3_{(\times 8)}} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24}$$

3. *Somam-se as fracções obtidas.*

$$\frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{1+8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Vídeo . *15 (no anexo deste capítulo)*

[7] Pode escolher-se como denominador comum qualquer múltiplo do $mmc(24,3)$. A vantagem de se usar o $mmc(24,3)$ é obtermos fracções envolvendo menores numeradores e denominadores.

Multiplicação/Divisão de fracções

Valem as seguintes regras operatórias para a multiplicação e divisão de fracções.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{1.1}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{1.2}$$

Exemplo 16. Efectuar a operação

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$$

Solução

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{21}{20}$$

Exemplo 17. Efectuar a operação

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4}$$

Solução

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Vídeo. *16 (no anexo deste capítulo)*

Vantagem da representação de números por fracções.

A representação de números por fracções é muito conveniente para a resolução de algumas operações aritméticas. Por exemplo, a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

é facilmente efectuada usando as notações decimais correspondentes às parcelas.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 0.5 + 0.2 = 0.7$$

Não há vantagem operacional em efectuar esta soma usando fracções, em vez de notação decimal. O mesmo não acontece com a operação

$$\frac{67}{99} + \frac{49}{99}$$

que é facilmente efectuada usando a soma de fracções

$$\frac{67}{99} + \frac{49}{99} = \frac{116}{99},$$

enquanto a mesma operação, usando a representação decimal das parcelas envolvidas, não pode ser efectuada da forma usual, pois estas têm um número de dígitos infinito,

$$\frac{67}{99} + \frac{49}{99} = 0.676767\cdots + 0.494949\cdots$$

Uma dificuldade análoga surge se quisermos multiplicar ou dividir estes números usando a sua representação decimal.

Vídeos. *17, 18 (no anexo deste capítulo)*

1.3.1 Percentagens

Suponhamos a seguinte situação. O senhor Lopes ganha 1500 euros por mês e gasta 25% (por extenso escreve-se 'vinte e cinco *por cento*') dessa quantia para pagar a renda da casa. Qual o valor desta renda?

A expressão 25% significa 25 partes em cada 100 ou $25/100 = 0.25$. Por cada 100 euros de salário o senhor Lopes gasta 25 euros no pagamento da renda. Como o salário é de $1500 = 15 \times 100$ euros, então a renda deve ser $25 \times 15 = 375$ euros. O valor da renda pode ser calculado da forma:

$$25 \times 15 \;=\; 25 \times \frac{1500}{100} \;=\; \frac{25}{100} \times 1500 \;=\; 25\% \times 1500 \;=\; 375.$$

Em resumo, podemos afirmar que, dado um número x, 'x%' representa o valor numérico da expressão $\frac{x}{100}$; dados dois números x e y, 'x% de y' corresponde ao valor numérico da expressão $\frac{x}{100} \times y$.

Vídeos . *19, 20 (no anexo deste capítulo)*

O uso de percentagens permite tornar mais expressiva a comparação entre duas grandezas.

- Numa afirmação do tipo 'x é igual 45% de y' (ver figura 14) estamos a considerar que x/y vale 0.45, i.e., x é um pouco menor que metade de y. Analogamente, se dizemos que 'z é igual a 85% de y', ficamos a saber que z/y vale 0.85, o que significa que z é um pouco menor do que y.

- Saber que o custo de uma viagem de combóio entre duas cidades A e B passou de 23 para 25.76 euros, e que o custo da viagem entre as cidades C e D, num combóio da mesma empresa, passou de 47 para 52.64 euros, fornece uma informação menos clara do que saber que a empresa resolveu aumentar os preços em 12%, que é a condição que leva à variação de preços indicada (verificar!).

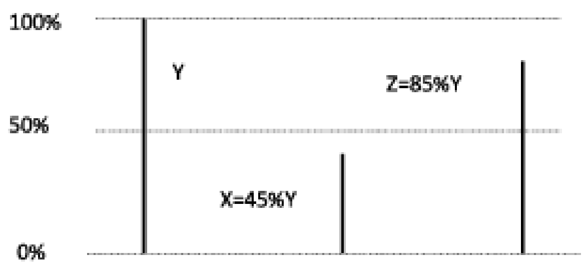

Figura 14: As percentagens permitem comparar facilmente duas grandezas.

Exercício 13. *Escrever o valor decimal correspondente às expressões.*

1. *(a)* 33% *(b)* 3.3% *(c)* 8.5% *(d)* 0.2% *(e)* 0.008%

   Solução (d). $0.2\% \;=\; \frac{0.2}{100} \;=\; 0.002$

   (a) $33\% \times 25$ *(b)* $12\% \times 3.43$ *(c)* $8.5\% \times 8.5\%$ *(d)* $0.2\% \times 23 + 11$
   Solução (d). $0.2\% \times 23 + 11 \;=\; \frac{0.2}{100} \times 23 + 11 \;=\; \frac{4.6}{100} + 11 \;=\; 11.046$

Exercício 14. *Escrever os valores em percentagem que são equivalentes às expressões.*

(a) 0.23 *(b)* 1.2 *(c)* 8.5 *(d)* 0.000034 *(e)* 1234

Solução (c). $8.5 = x\% \Rightarrow 8.5 = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 8.5 \times 100 = 850$
$\Rightarrow 8.5 = 850\%$

Exercício 15.

1. *(a)* 22*, que percentagem é de* 36*? (b)* 36*, que percentagem é de* 22*?*

   Solução (b). $\frac{36}{22} = \approx 1.64 = \frac{164}{100} = 164\%$.

2. *(a)* 2.52*, que percentagem é de* 36*? (b)* 36*, que percentagem é de* 2.52*?*

3. *Que valores correspondem a (a)* 10% *de* 5*; (b)* 100% *de* 5*; (c)* 1000% *de* 5*; (d)* 10000% *de* 5*?*

   Solução (c). $1000\% \times 5 = \frac{1000}{100} \times 5 = 50$

4. *Mostrar que* $x\%$ *de* y *é igual a* $y\%$ *de* x.

5. *Se* 25% *de* y *equivale a* $\frac{1}{3}y$*, qual o valor de* y*?*

1.4 Proporcionalidade directa e inversa

Consideremos o seguinte problema. Um trabalhador leva $1.5h$ a descarregar 26 sacos de um camião. Quanto tempo leva o mesmo trabalhador a descarregar 31 sacos?
Nada sendo dito em contrário, supõe-se que o trabalhador leva o mesmo tempo para descarregar cada um dos 26 sacos, e que mantém o ritmo de trabalho na descarga de 31 sacos. Podemos resolver este exercício da forma seguinte:

1. Calcula-se o tempo t_1 que o trabalhador gasta a descarregar um saco: $t_1 = 1.5\, horas \div 26\, sacos = \frac{1.5}{26}$ horas por saco;

2. Multiplica-se este tempo pelo número de sacos, 31, obtendo-se o tempo t pretendido: $t = \frac{1.5}{26}\, horas/saco \times 31\, sacos \approx 1.79$ horas (aproximadamente 107 minutos, ou 1 hora e 47 minutos).

Este cálculo é o mesmo que se realiza recorrendo a um esquema de *regra de três simples.*

1.5 horas	$---$	26 sacos
t horas	$---$	31 sacos

Obtemos para t o valor $t = \frac{1.5 \times 31}{26} = \frac{1.5}{26} \times 31$, no qual se pode reconhecer a multiplicação do tempo gasto na descarga de cada saco, $\frac{1.5}{26}$, pelo número de sacos, 31.

Designando por x o número de sacos descarregados, podemos escrever uma fórmula que relaciona o tempo t gasto na descarga de x sacos, qualquer que seja x.

1.5 horas	$---$	26 sacos
t horas	$---$	x sacos

Obtemos a relação $t = \frac{1.5}{26}x$. Esta igualdade é um exemplo de uma *função*: x representa um valor que conhecemos e t um valor que queremos conhecer. Neste caso, conhecendo o número de sacos x a descarregar, ficamos a saber o tempo total da descarga substituindo esse valor na equação e calculando t, sem necessidade de construir o esquema da regra de três simples de cada vez que queremos calcular um tempo de descarga.

A igualdade $t = \frac{1.5}{26}x$ é equivalente a $\frac{t}{x} = \frac{1.5}{26}$. O valor do cociente $\frac{t}{x}$ diz-se *taxa de variação* de t com x. Esta taxa é constante neste problema. Isto significa que se x duplicar, por exemplo, também t duplica; se x for reduzido a um terço, também t é reduzido a um terço (porquê?). Quando duas grandezas se relacionam desta forma, dizemos que são *directamente proporcionais*. O gráfico da função é uma recta que contém a origem do referencial.

Só é válido usar regras de três simples para resolver problemas que envolvem grandezas directamente proporcionais. Um caso em que não é válido fazê-lo acontece no exemplo acima, se considerarmos que o trabalhador vai ficando cansado à medida que a descarga avança, o que faz com que o tempo que leva a descarregar cada saco seja superior ao tempo de descarga do saco anterior. Suponhamos que o trabalhador leva 7 minutos a descarregar os dois primeiros sacos e 8 minutos para descarregar os 3^o e 4^o sacos. Neste caso já não podemos dizer 'se leva 7 minutos para descarregar dois sacos, então leva 14 minutos para descarregar 4 sacos'. De facto leva $7 + 8 = 15$ minutos a descarregar os 4 sacos.

Consideremos agora outro problema. Três trabalhadores levam $1.5h$ a descarregar um camião. Quanto tempo levam cinco trabalhadores para fazer o mesmo trabalho? Nada sendo dito em contrário, supõe-se que os trabalhadores trabalham todos ao mesmo ritmo entre si, não importando quantos estejam a trabalhar. Podemos ser tentados a resolver este exercício usando uma regra de três simples.

$$\begin{array}{ccc} 1.5 \text{ horas} & --- & 3 \text{ trabalhadores} \\ t \text{ horas} & --- & 5 \text{ trabalhadores} \end{array}$$

Obtemos para t o valor $t = \frac{1.5 \times 5}{3} = 2.5$ horas, que é um resultado absurdo, porque 5 trabalhadores devem descarregar o camião em menos tempo do que 3 trabalhadores. Por que é incorrecto tentar resolver este problema com esta regra de três simples? Porque as grandezas 'tempo' e 'número de trabalhadores' não são directamente proporcionais. Se o fossem, então quando aumenta uma delas deveria também aumentar a outra. Ora não é isto que esperamos. O que esperamos é que um aumento do número de trabalhadores corresponda a uma diminuição do tempo de descarga.

O modo de resolver este problema é o seguinte. Se 3 trabalhadores descarregam o camião em 1.5 horas, então cada trabalhador descarrega $1/3$ da carga do camião em 1.5 horas. Temos aqui uma proporcionalidade directa entre a quantidade de carga descarregada por cada trabalhador e o tempo que essa descarga leva a cumprir-se. Se forem 5 trabalhadores a fazer a descarga, trabalhando todos ao mesmo ritmo, cada um deles deve descarregar $1/5$ da carga do camião. Queremos calcular o tempo que um trbalhador leva a descarregar $1/5$ da carga. A regra de três simples correspondente é a seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 1.5 \text{ horas} & --- & 1/3 \text{ da carga} \\ t \text{ horas} & --- & 1/5 \text{ da carga} \end{array}$$

Obtemos para t o valor $t = \frac{1/5 \times 1.5}{1/3} = \frac{1.5 \times 3}{5} = \frac{1}{5} \times 4.5 = 0.9$ horas (54 minutos).

Podemos escrever a expressão de uma função que relaciona o tempo de descarga, t, com o número de trabalhadores, x: $t = \frac{4.5}{x}$. Esta igualdade pode ser escrita na forma $tx = 4.5$, cujo signigicado é o seguinte: o produto do tempo t de descarga do camião pelo número x de trabalhadores envolvidos é constante, para qualquer par de valores t, x que satisfaça a igualdade. Dizemos por isso que as grandezas t e x são *inversamente proporcionais* (se uma delas aumenta, então a outra diminui para manter o produto constante). Uma função da forma $t = \frac{4.5}{x}$ é representada graficamente por uma *hipérbole*, sendo que nenhuma das grandezas envolvidas se pode anular.

1.5 Conjuntos de números

Ao longo do nosso curso vamos usar vários conjuntos de números. O conjuntos designam-se geralmente por letras maiúsculas, podendo os seus elementos representar-se separando-os por vírgulas e colocando a sequência obtida entre chavetas. Por exemplo, a expressão $A = \{1, 2, 3\}$ define A como o conjunto cujos *elementos* são os números 1, 2 e 3. Há alguns conjuntos suficientemente importantes (por serem muito utilizados) para serem designados por símbolos próprios, que são usados para referir apenas esses conjuntos. Indicamos a seguir os mais comuns.

1. **Conjunto dos números naturais.** Representa-se pelo símbolo $\mathbb{N}$ e corresponde ao conjunto dos números inteiros positivos.

   $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

   Há certos autores que incluem o zero neste conjunto. Neste texto, o símbolo usado quando queremos considerar também o zero é $\mathbb{N}_0$, i.e., $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

2. **Conjunto dos números inteiros.** Representa-se pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e corresponde ao conjunto constituido pelos números inteiros positivos, pelos números inteiros negativos e pelo zero (o zero não tem sinal).

   $$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

   Para referir apenas os inteiros negativos (positivos) usa-se o símbolo $\mathbb{Z}^-$ ($\mathbb{Z}^+$). Para referir os inteiros negativos (positivos) juntamente com o zero, usa-se o símbolo $\mathbb{Z}_0^-$ ($\mathbb{Z}_0^+$), etc. Como é fácil verificar, o conjunto dos números naturais *está contido* no conjunto dos números inteiros. Matematicamente escreve-se esta relação da forma $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, que se lê $\mathbb{N}$ *está contido em* $\mathbb{Z}$. Também se pode escrever $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, que se lê $\mathbb{Z}$ *contém* $\mathbb{N}$.

3. **Conjunto dos números racionais.** Representa-se pelo símbolo $\mathbb{Q}$ e corresponde ao conjunto dos números que se podem representar na forma de fracções, como por exemplo $\frac{2}{3}$ e $-\frac{4}{3}$ (o termo *racional* vem de *razão*, que na terminologia da matemática significa *divisão*).

   $$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \tag{1.3}$$

   É imediato verificar que todos os números inteiros são também números racionais. Exemplos: (i) o número 4 pode representar-se pela fracção $\frac{4}{1}$, pela fracção $\frac{8}{2}$, etc; (ii) o número -16 pode representar-se pelas fracções $\frac{-16}{1}$, $\frac{32}{-2}$, etc; (iii) o número 0 pode representar-se pelas fracções $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{-3}$, etc.

   Podemos escrever $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Por ser também $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Usa-se o símbolo $\mathbb{Q}^-$ ($\mathbb{Q}^+$) para referir apenas os números racionais negativos (positivos);

usa-se também o símbolo $\mathbb{Q}_0^-$ ($\mathbb{Q}_0^+$) para referir os números racionais negativos (positivos), juntamente com o zero.

4. **Conjunto dos números reais.** Representa-se pelo símbolo $\mathbb{R}$ e corresponde à união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos *números irracionais. Número irracional* é todo o número que não pode ser representado como uma fracção, i.e., é um número que não pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$.[8] Exemplos deste números são $\sqrt{2}$, o número e (≈ 2.72), o número π (≈ 3.14), etc. Como se sabe que estes números não são representáveis por uma fracção? Existem demonstrações matemáticas desses factos. Existem números dos quais não se sabe se são racionais ou irracionais, como por exemplo $(\pi - e)$ e $(\pi + e)$. O conjunto dos números irracionais não tem um símbolo para o designar. Escreve-se

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Irracionais,$$

sendo '$\cup$´ o operador de reunião de conjuntos. É válida a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5. **Conjunto dos números complexos.** Representa-se pelo símbolo $\mathbb{C}$ e é o conjunto de todos os números da forma $z = a + ib$, sendo a, b números reais quaisquer e i, a *unidade imaginária*, é tal que $i^2 = -1$. O conjunto $\mathbb{R}$ está contido no conjunto $\mathbb{C}$, porque fazendo $b = 0$ obtemos o número complexo $z = a$, que pode tomar qualquer valor real. É válida a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.6 Potências

1.6.1 Potências de expoente inteiro

Uma potência de expoente inteiro positivo, como por exemplo 4^3 (ver figura 15), é uma abreviatura para a expressão $4 \times 4 \times 4$.

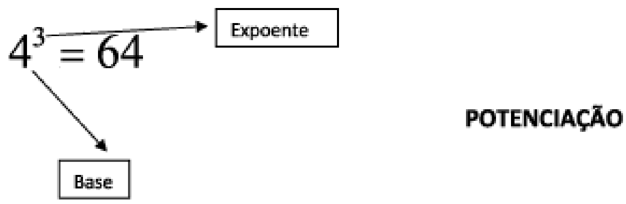

Figura 15: Designações dos termos de uma potência.

De um modo geral temos

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{'a' aparece 'b' vezes}}$$

se b for um número inteiro positivo. Quando se escreve a^b está-se a *indicar* uma operação de potenciação. Quando se calcula o valor de a^b na forma decimal, está-se a *efectuar* uma operação de potenciação.

[8] A palavra irracional, devido ao prefixo de negação *ir-*, significa literalmente *que não é racional*, isto é, que não é representável por uma divisão de inteiros.

1.6.2 Operações com potências

A representação de números reais usando potências é útil porque algumas operações são resolvidas de modo mais eficiente se os números estiverem nesta forma. Apresentamos de seguida as propriedades de algumas operações com potências. Todas estas propriedades são também válidas para potências de expoentes não inteiros, desde que as bases sejam não-negativas (i.e., pertençam a $\mathbb{R}_0^+$).

Multiplicação e divisão de potências. Estas são algumas regras operatórias relevantes na multiplicação e divisão de potências.

1. $a^b \times c^b = (ac)^b$
2. $a^b \times a^c = a^{b+c}$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$
4. $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

Exemplo 18. Multiplicação de potências com o mesmo expoente.

$$\mathbf{4^3} \times \mathbf{2^3} = (4 \times 4 \times 4) \times (2 \times 2 \times 2) = (4 \times 2) \times (4 \times 2) \times (4 \times 2) = (\mathbf{4} \times \mathbf{2})^{\mathbf{3}}$$

De um modo geral temos $a^b \times c^b = (ac)^b$.

Exemplo 19. Multiplicação de potências com a mesma base.

$$\mathbf{7^3} \times \mathbf{7^2} = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7) = (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) = \mathbf{7^5}$$

De um modo geral temos $a^b \times a^c = a^{b+c}$.

Exemplo 20.

$$\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{3}} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{5^3}}$$

De um modo geral temos $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$.

Exemplo 21.

$$\frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{2^3}} = \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}} = 2^3$$

De um modo geral temos $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$.

Exemplo 22. Divisão de potências com a mesma base.

$$\mathbf{7^5 \div 7^3} = \frac{7^5}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = \frac{7\times7\times\cancel{7\times7\times7}}{\cancel{7\times7\times7}} = \mathbf{7^{5-3}} = \mathbf{7^2}$$

De um modo geral temos $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

As duas regras operatórias seguintes são consequência das regras para a multiplicação e divisão de potências, atrás apresentadas.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b},\ \ a \neq 0 \tag{1.4}$$

$$a^0 = 1,\ \ a \neq 0 \tag{1.5}$$

Exemplo 23. Potências com expoentes negativos.

$$\mathbf{7^3 \div 7^5} = \frac{7^3}{7^5} = \mathbf{7^{3-5}} = \mathbf{7^{-2}} = \frac{1}{7^2}$$

De um modo geral temos $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$.

Exemplo 24. Potências com expoente nulo.

$$\mathbf{1} = \mathbf{7^3 \div 7^3} = \frac{7^3}{7^3} = \mathbf{7^{3-3}} = \mathbf{7^0}$$

De um modo geral temos $a^0 = 1$, com $a \neq 0$.

Vídeo . *21 (no anexo deste capítulo)*

1.7 Radicais

Um *radical* (ou *raiz*) é uma expressão da forma $\sqrt[n]{a}$, sendo n um inteiro positivo. A expressão $\sqrt[n]{a}$ lê-se *raiz índice n de a* (figura 16) e é tal que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

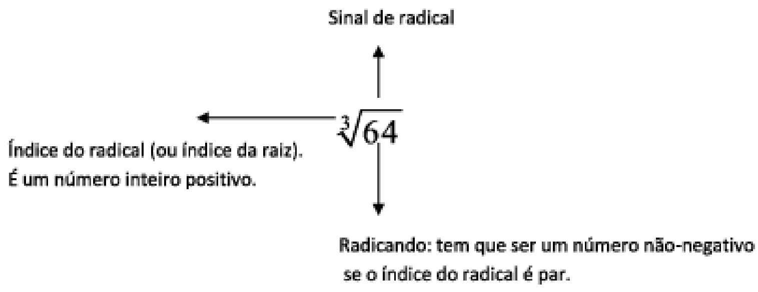

Figura 16: Designações dos termos de um radical.

Exemplo 25. Raiz de índice n de um número.

$\sqrt[n]{a} = b$	$\Rightarrow$	$b^n = a$
$\sqrt[3]{8} = 2$	$\Rightarrow$	$2^3 = 8$
$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\Rightarrow$	$(-2)^5 = -32$
$\sqrt{49} = 7$	$\Rightarrow$	$7^2 = 49$

Exemplo 26. Designações de algumas raízes de números.

$\sqrt[n]{a} = b$	lê-se	*b é raiz índice n de a*
$\sqrt[3]{8} = 2$	lê-se	2 *é raiz cúbica de* 8
$\sqrt[5]{-32} = -2$	lê-se	-2 *é raiz quinta de* -32
$\sqrt{49} = 7$	lê-se	7 *é raiz quadrada de* 49

Observações.

1. Normalmente omite-se o índice da raiz quando este é igual 2.
2. A expressão $\sqrt[n]{a}$, com *n par*, representa um número real apenas quando o radicando a não é negativo. Por consequência, não são números reais as expressões $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-6}$, $\sqrt[12]{-1}$.
3. Vimos acima que $\sqrt[2]{49} = 7 \Rightarrow 7^2 = 49$. Mas também se verifica $(-7)^2 = 49$. Por isso se diz que 7 e -7 são as duas raízes quadradas de 49. A notação $\sqrt{49}$ reserva-se para a raiz quadrada *positiva* do número 49, i.e. $\sqrt{49} = 7$.
4. Por definição de raiz n-ésima de um número, podemos considerar que $\sqrt[1]{a} = a$. Porquê?

O cálculo da raiz de índice n (ou *raiz enésima*) de um número, também se designa por *extracção* da raiz de índice n do número. A designação geral para a operação de extracção de raízes é *radiciação*.

1.7.1 Propriedades da radiciação

Estas são algumas regras operatórias relevantes com radicais.

1. $\sqrt[n]{b \times c} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Exemplo 27.

1.
$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8 \times 8} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} = 2 \times 2 = 4$$
De um modo geral temos
$$\sqrt[n]{b \times c} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}.$$

2.
$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$
De um modo geral temos
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3. Atendendo a que $64 = 4^3$, temos

$$\sqrt{64} = \sqrt{\mathbf{4^3}} = (\sqrt{\mathbf{4}})^{\mathbf{3}} = 2^3 = 8$$

De um modo geral temos

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

4. Atendendo a que $8 = \sqrt{64}$, temos

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\times 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

De um modo geral temos

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

1.7.2 Radicais escritos sob a forma de potências

Vamos mostrar que se $a \geq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, as expressões $\sqrt[n]{a^m}$ e $a^{\frac{m}{n}}$ representam o mesmo número.

Exemplo 28.

Consideremos a expressão $\sqrt[3]{5^2}$. Sabemos que o cubo desta expressão é igual a 5^2, i.e.

$$\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3 = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{5^2} = 5^2. \tag{1.6}$$

Se na expressão anterior substituirmos $\sqrt[3]{5^2}$ por $5^{\frac{2}{3}}$ e usarmos a regra do produto de potências com a mesma base (ver exemplo 19, pg. 23), temos

$$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2. \tag{1.7}$$

Na expressão (1.7) usou-se, com expoentes não inteiros, a regra operatória de potências indicada na fórmula (1.4), pg. 24, somando os expoentes na expressão $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$. Atendendo às expressões (1.6) e (1.7), verificamos que $\sqrt[3]{5^2}$ e $5^{\frac{2}{3}}$ se comportam como sendo o mesmo número, uma vez que o seu cubo é o mesmo.

Vídeos. *22, 23 (no anexo deste capítulo)*

1.8 Logaritmação

O *logaritmo na base b* de um número $a > 0$, com $b > 0$, $b \neq 1$, é um número denotado por $\log_b a$ que representa o expoente a que se deve elevar a base b para obter a (figura 17) [9]. A operação de cálculo de um logaritmo designa-se por *logaritmação*:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a, \qquad a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1.$$

[9] As condições $a > 0$ e $b > 0$ são necessárias quando se quer trabalhar com logaritmos que tomam apenas valores reais.

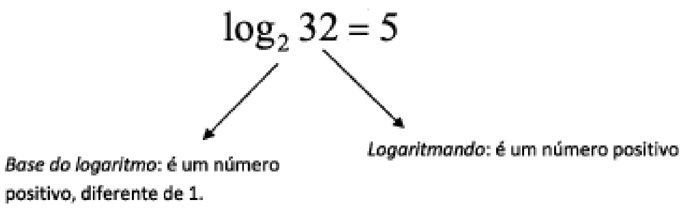

Figura 17: Designações dos termos de um logaritmo.

O logaritmo na figura 17 lê-se 'logaritmo de 32 na base 2´, e é igual a 5.

Exemplo 29. Cálculo de alguns logaritmos.

$\log_{10} 100 = 2$	significa	$10^2 = 100$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	significa	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
$\log_2 \frac{1}{2} = -1$	significa	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$\log_{0.1} 0.01 = 2$	significa	$0.1^2 = 0.01$

Exercício 16.

1. *Determinar os valores dos logaritmos.*

   $(a)\ \log_{10} 10^3$ $\quad (b)\ \log_5 5^3$ $\quad (c)\ \log_4 4^5$ $\quad (d)\ \log_2 \sqrt{2}$

   $(e)\ \log_{0.1} 100$ $\quad (f)\ \log_5 \frac{1}{5}$ $\quad (g)\ \log_{2.5} 6.25$ $\quad (h)\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

   Solução (f). $\log_5 \frac{1}{5} = c$ *significa* $5^c = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, *e por isso* $c = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

2. *Determinar os argumentos x dos logaritmos.*

   $(a)\ \log_3 x = 2$ $\quad (b)\ \log_5 x = 1.5$ $\quad (c)\ \log_5 x = 1$ $\quad (d)\ \log_2 x = \frac{1}{4}$

   Solução (b). $\log_5 x = 1.5$ *significa* $x = 5^{1.5}$

3. *Determinar as bases b dos logaritmos.*

   $(a)\ \log_b 16 = 2$ $\quad (b)\ \log_b 125 = 5$ $\quad (c)\ \log_b 10 = 0.1$ $\quad (d)\ \log_b e^2 = 2$

   Solução (d). $\log_b e^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = e^2 \Leftrightarrow b = e$

O cálculo do logaritmo $\log_b a$ corresponde à resolução da equação na incógnita x, $\log_b a = x$, que é equivalente à equação $b^x = a$. Podemos usar esta última equação para obter valores aproximados de logaritmos.

Exemplo 30. Determinar os intervalos $[k, k+1]$, com k inteiro, que contêm os valores dos logaritmos.

$(a)\ \log_{10} 8$ $\quad (b)\ \log_{10} 55$ $\quad (c)\ \log_{10} 300$ $\quad (d)\ \log_2 34.5$

$(e)\ \log_{0.1} 2$ $\quad (f)\ \log_5 12.3$ $\quad (g)\ \log_{2.5} 7$ $\quad (h)\ \log_e 12$

Solução (b). $\log_{10} 55 = x$. *Sabemos que* $\log_{10} 55 = x \Leftrightarrow 10^x = 55$. *Usando o facto da função* 10^x *ser crescente (falaremos desta função adiante no nosso curso), substituimos sucessivos valores inteiros na variável x de modo a enquadramos o valor* 55.

$$x = 1 \Rightarrow 10^x = 10^1 = 10 < 55$$

$$x = 2 \Rightarrow 10^x = 10^2 = 100 > 55$$

Como $10 < 55 < 100$, *então* $\log_{10} 10 < \log_{10} 55 < \log_{10} 100 \Leftrightarrow 1 < \log_{10} 55 < 2$.

1.8.1 Propriedades dos logaritmos

Estas são algumas regras operatórias com logaritmos.

$$\log_b(a \times c) = \log_b a + \log_b c \tag{1.8}$$

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c \tag{1.9}$$

$$\log_b a^c = c \times \log_b a \tag{1.10}$$

$$b^{\log_b a} = a \tag{1.11}$$

Exemplo 31.

1. Logaritmo de um produto.

   $\log_2(8 \times 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$
   De um modo geral temos
   $\log_b(a \times c) = \log_b a + \log_b c.$
   Por causa desta propriedade, costuma dizer-se que o logaritmo transforma produtos, $a\times$ c, em somas, $\log_b a + \log_b c$.

2. Logaritmo de um quociente.

   $\log_2 \frac{8}{4} = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$
   De um modo geral temos
   $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c.$
   Por causa desta propriedade, costuma dizer-se que o logaritmo transforma divisões, $\frac{a}{c}$, em subtracções, $\log_b a - \log_b c$.

3. Logaritmo de uma potência.

   $\log_2 4^3 = 3 \times \log_2 4 = 3 \times 2 = 6$
   De um modo geral temos
   $\log_b a^c = c \times \log_b a.$
   Por causa desta propriedade, costuma dizer-se que o logaritmo transforma potências, a^c, em multiplicações, $c \times \log_b a$.

4. Vale também a igualdade

   $$b^{\log_b a} = a$$

   Por exemplo,
   $3^{\log_3 9} = 3^2 = 9.$

A *natureza simplificadora* do operador logaritmo, revelada por estas regras, faz com que este operador apareça 'por toda a parte' na matemática. Vamos demonstrar a propriedade referida no ponto 2 do exemplo 31.

Prova. (da propriedade $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$)
Seja $\log_b a = x$ e $\log_b c = y$. Usando a definição de logaritmo podemos escrever

$$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x \qquad \log_b c = y \Rightarrow c = b^y.$$

e por isso

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b \frac{b^x}{b^y}.$$

Usando a regra da divisão de potências com a mesma base, podemos escrever

$$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y},$$

obtemos

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b \frac{b^x}{b^y} = \log_b b^{x-y} = x - y = \log_b a - \log_b c.$$

□

Exercício 17. *Sejam b, c dois números positivos, com $b \neq 1$. Mostrar que* $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Vídeo . *24 (no anexo deste capítulo)*

2 Equações e inequações

Equações. Uma *equação numérica* é uma igualdade em que ambos os membros são expressões numéricas contendo um ou mais termos, geralmente letras, que representam valores desconhecidos (*incógnitas*).

Exemplo 32. *Exemplos de equações.*

$$\begin{aligned} &2x + 3 = 5 && \textit{equação na variável } x && (1.12)\\ &2x + 3y = -3x && \textit{equação nas variáveis } x \textit{ e } y \end{aligned}$$

Uma equação transforma-se numa igualdade numérica verdadeira sempre que as incógnitas são substituidas por valores que tornam iguais os dois membros da equação. Tais valores das incógnitas designam-se por *soluções* ou *raízes* da equação.

Exemplo 33. $x = 1$ *é uma solução (neste caso a única solução) da equação (1.12), porque substituindo x por* 1 *na equação obtemos a igualdade verdadeira* $2 \times 1 + 3 = 5$.

Uma equação cuja igualdade é verificada para qualquer valor da incógnita, designa-se por *identidade.*

Exemplo 34. *A igualdade* $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ *é uma identidade (porquê?). Por vezes representam-se as identidades usando o símbolo '$\equiv$' em vez de '$=$', para salientar que as igualdades em causa são identidades. Assim, a igualdade anterior pode escrever-se* $(x+1)^2 \equiv x^2+2x+1$. *A igualdade* $x+1 = 3$ *não é uma identidade porque não é verdadeira para todos os valores de x.*

Uma equação pode ter uma solução, nenhuma solução ou várias soluções. Uma equação que tem uma ou mais soluções, diz-se *possível* ou *resolúvel.* Uma equação que não tem soluções, diz-se *impossível* ou *irresolúvel.* Uma equação diz-se *possível e determinada* se tem uma só solução; diz-se *possível e indeterminada* se possui mais de uma solução. O conjunto de todas as soluções de uma equação designa-se por *conjunto solução* da equação.

Exercício 18. Nas três equações seguintes há uma que tem uma só solução, outra que não tem soluções e ainda outra que tem infinitas soluções. Identificar estes três casos.

$(a)\ x+3=-3 \qquad (b)\ x+1=x+1 \qquad (c)\ x+1=x+2$

Solução (b). A equação $x+1=x+1$ tem por soluções todos os números reais (é uma identidade). Tem, por isso, infinitas soluções.

Resolver uma equação é determinar todas as suas soluções. Existem equações de vários tipos, cada um deles requerendo estratégias próprias de resolução. Há, no entanto, um conjunto de *princípios* (técnicas de resolução) e de conceitos que se usam, seja qual for o tipo de equação considerado.

Um desses conceitos é o de *equivalência* de equações. Duas equações dizem-se *equivalentes* se têm as mesmas soluções. Por exemplo, as equações $x^2=1$ e $(x-1)(x+1)=0$ são equivalentes, sendo o conjunto solução de ambas $\{-1,1\}$.

Exercício 19. Mostrar que as equações $(x^2+1)(x-1)=0$ e $x-1=0$ são equivalentes no conjunto dos números reais.[10]

Para resolver uma equação, esta é sucessivamente transformada em outras equações equivalentes, até se obter uma equação que permita fazer uma leitura fácil das soluções.

Exemplo 35. *Resolver a equação* $\frac{5(2+2x)}{3}=2x-6$.

$$\frac{5(2+2x)}{3}=2x-6 \Leftrightarrow 5(2+2x)=3(2x-6) \tag{1.13}$$

$$\Leftrightarrow 10+10x=6x-18 \tag{1.14}$$

$$\Leftrightarrow 10x-6x=-10-18 \tag{1.15}$$

$$\Leftrightarrow 4x=-28 \tag{1.16}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-28}{4} \tag{1.17}$$

$$\Leftrightarrow x=-7 \tag{1.18}$$

No exemplo acima partimos da equação $\frac{5(2+2x)}{3}=2x-6$, cuja forma não torna imediato saber quais são as raízes da equação. Podiamos procurar as raízes por tentativa e erro, mas seria um trabalho bastante demorado. O que se fez foi usar sucessivas transformações de equivalência, até obter a equação $x=-7$, que deixa claro que a equação tem como única raiz -7. Uma *transformação de equivalência* é uma transformação de um, ou ambos, os membros de uma equação, que não muda o conjunto solução desta. As transformações de equivalência são essencialmente de 3 tipos e resultam dos três *princípios de equivalência* seguintes.

1º Princípio de equivalência: *Multiplicando ambos os membros de uma equação por uma mesma expressão (não nula), obtém-se uma equação equivalente à primeira.* Na solução da equação acima, a aplicação deste princípio ocorreu, por exemplo, na obtenção da equação (1.13) – multiplicou-se ambos os membros da equação inicial por 3.

[10] Se considerarmos o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, que é mais amplo que o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, as equações deixam de ser equivalentes porque $(x^2+1)(x-1)=0$ admite em $\mathbb{C}$, para além da raíz real $x=1$, as raízes $-\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-1}$, que não são números reais.

2º Princípio de equivalência: *Substituindo numa equação uma expressão qualquer por outra expressão equivalente, obtém-se uma equação equivalente à primeira.* Na solução da equação acima, a aplicação deste princípio ocorreu, por exemplo, na obtenção da equação(1.14) – relativamente à equação (1.13), o primeiro membro $5(2+2x)$ foi substituido pela expressão equivalente $10+10x$ e o segundo membro $3(2x-6)$ foi substituido pela expressão equivalente $6x-18$.

3º Princípio de equivalência: *Se um membro de uma equação é a soma de duas ou mais expressões, obtém-se uma equação equivalente à primeira passando para o outro membro uma qualquer dessas expressões com o sinal trocado.* Na solução da equação acima, a aplicação deste princípio ocorreu, por exemplo, na obtenção da equação(1.15) – relativamente à equação (1.14), a parcela 10 passou do primeiro membro para o segundo com o sinal trocado; a parcela $10x$ passou do segundo membro para o primeiro com o sinal trocado.

Exercício 20. No exemplo 35, indicar quais dos três princípios foram usados para obter as equações (1.16), (1.17), (1.18).

Solução para a expressão (1.17). Aplicou-se a (1.16) o 1º princípio de equivalência, multiplicando-se ambos os membros pela expressão $1/4$.

Vídeos. *25, 26, 27, 28 (no anexo deste capítulo)*

Inequações. Uma *inequação numérica* é uma desigualdade em que ambos os membros são expressões numéricas contendo um ou mais termos, geralmente letras, que representam valores desconhecidos (*incógnitas*). Os sinais que relacionam os dois membros de uma inequação podem ser

$>$ (maior que),

$\geq$ (maior ou igual a),

$<$ (menor que),

$\leq$ (menor ou igual a).

Notar que, por exemplo, $a \leq b$ é uma expressão verdadeira quando a é menor que b, ou quando a é igual a b. É falsa quando a é maior que b. Analogamente para $a \geq b$, trocando 'menor' por 'maior'.

Exemplo 36. *Exemplos de uso dos operadores relacionais* $>, \geq, <, \leq$.

$2<3$	é uma expressão verdadeira;	$2<-2$	é uma expressão falsa
$3>2$	é uma expressão verdadeira;	$2>3$	é uma expressão falsa
$3\geq 3$	é uma expressão verdadeira;	$3>3$	é uma expressão falsa
$3\leq 3$	é uma expressão verdadeira;	$3<3$	é uma expressão falsa
$2\leq 3$	é uma expressão verdadeira;	$3\leq 2$	é uma expressão falsa
$4\geq 3$	é uma expressão verdadeira;	$3\geq 4$	é uma expressão falsa

Exemplo 37. *Exemplos de inequações.*

$$2x+3>5 \qquad \textit{inequação na variável } x \qquad (1.19)$$
$$x^2-2x+1-y \le 2x+2y \qquad \textit{inequação nas variáveis } x \textit{ e } y$$

Uma inequação transforma-se numa expressão verdadeira sempre que as incógnitas são substituidas por valores que tornam verdadeira a relação numérica resultante. Tais valores das incógnitas designam-se por *soluções* da inequação.

Exemplo 38. $x=2$ *e* $x=3$ *são duas das soluções da inequação (1.19), porque substituindo* x *por* 2 *obtemos a desigualdade verdadeira* $7>5$ *e substituindo* x *por* 3 *obtemos a desigualdade verdadeira* $9>5$*;* $x=0$ *não é uma solução da inequação (1.19), porque substituindo* x *por* 0 *obtemos a relação falsa* $3>5$.

Tal como para as equações, uma inequação pode ter uma solução, nenhuma solução ou várias soluções, valendo também para as inequações os qualificativos *possível, impossível, possível e determinada, possível e indeterminada* definidos para as equações.

Exercício 21. *Identificar, nas três inequações seguintes, qual a que tem uma só solução, qual a que não tem soluções e ainda qual a que tem infinitas soluções.*

$(a)\ x+3>-3 \qquad (b)\ 2\le 2+|x| \qquad (c)\ x+1>x+2$

Solução (c). A inequação $x+1>x+2$ *é impossível, porque não existe nenhum valor de* x*, tal que a soma desse valor com* 1 *seja igual à soma desse valor com* 2.

A resolução de inequações faz-se de uma forma análoga à usada na resolução de equações. Obtemos uma sequência de inequações equivalentes, até se ter uma inequação numa forma suficientemente simples para que as soluções possam dela ser lidas. Aplicam-se os mesmos princípios de equivalência que se usam na resolução de equações, com uma ressalva. Na aplicação do primeiro princípio de equivalência, se a expressão pela qual se multiplicam ambos os membros da inequação for negativa, a orientação do operador relacional muda. Como exemplo, se multilicarmos ambos os membros da desigualdade verdadeira $4\le 5$ por -2, obtemos a relação falsa $-8\le -10$. Para continuarmos a ter uma relação verdadeira depois deste passo, devemos escrever $-8\ge -10$.

Deve notar-se que a resolução de uma inequação, ou de uma equação, procede pela obtenção de expressões que só são verdadeiras quando as incógnitas são substituidas por soluções. Não queremos obter uma inequação verdadeira, para um dado valor de x, e passar para uma inequação falsa, para o mesmo valor de x, no passo de resolução seguinte.

Exercício 22. *Resolver a inequação* $4x+2>x-1$.

Solução

$$\begin{aligned} 4x+2>x-1 &\Leftrightarrow 4x-x>-1-2 \\ &\Leftrightarrow 3x>-3 \\ &\Leftrightarrow x>-1 \\ &\text{Conjunto solução}:\ ]-1,+\infty[\end{aligned}$$

Igualdades e desigualdades múltiplas. Expressões como $a = b = c$ ou $a > b \geq c < d$ são verdadeiras somente quando é verdadeira a relação definida por cada operador relacional e pelos operandos imediatamente à sua esquerda e à sua direita. Por exemplo, $3 = 2+1 = 4$ é falsa porque, ainda que $3 = 2+1$ seja uma relação verdadeira, $2+1 = 4$ não o é. Já a desigualdade dupla $3 < -4 \leq -5$ é falsa, dado que tanto $3 < -4$ como $-4 \leq -5$ são falsas.

Exercício 23. *Escrever uma igualdade dupla verdadeira.*

Vídeos. *29, 30, 31 (no anexo deste capítulo)*

3 Equação da recta

3.1 Declive de uma Recta

Na figura 18 representa-se um segmento da recta r. Consideremos os pontos AB da recta, sendo (x_A, y_A) as coordenadas de A e $(x_A + \Delta, y_A + \Delta y)$. O cociente

$$m = \frac{Deltay}{\Delta x}$$

da variação de y pela variação de x entre os dois pontos designa-se por *declive da recta.* Este cociente dá-nos a quantidade de y por unidade de x, e o seu valor é independente dos pontos sobre a recta escolhidos para o calcular. Se escolhermos os pontos CE, o cociente da diferença de ordenadas pela diferença de abcissas é

$$\frac{2\Delta y}{2\Delta x} = \frac{Deltay}{\Delta x} = m$$

, como se pode concluir pela semelhança dos triângulos na figura. Esta é uma propriedade distintiva da recta, i.e., a recta é a única curva[11] no plano com a propriedade de o quociente das variações em y pelas correspondentes variações em x, referentes a quaisquer dois seus pontos distintos, ser constante.

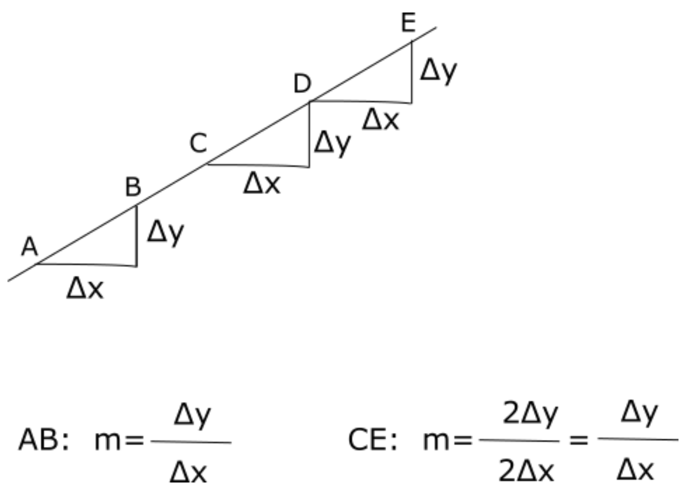

Figura 18: m é a taxa de variação de y com x. É uma constante designada por *declive* da recta.

[11] Na Geometria a expressão *curva* designa qualquer linha. Por exemplo, as circunferências, as elipses, as parábolas, as hipérboles e as rectas, são exemplos de curvas no plano.

3.2 Equação da Recta

Vamos obter a equação da recta na forma *reduzida*, $y = mx + b$.[12] Esta igualdade é verdadeira apenas quando x e y são substituidas por coordenadas de pontos que se encontram sobre a recta, sendo falsa para pontos que não pertencem à recta. Consideremos dois pontos quaisquer da recta (x, y) e (x_0, y_0), sendo o primeiro um ponto genérico e o último um ponto conhecido.

1. O declive da recta escreve-se $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

2. Podemos escrever sucessivamente

$$\begin{aligned} m = \frac{y-y_0}{x-x_0} &\Leftrightarrow m(x-x_0) = y - y_0 \\ &\Leftrightarrow y = mx - mx_0 + y_0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{mx} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

sendo $b = -mx_0 + y_0$.

Exercício 24. *Escrever a equação da recta que contém os pontos* $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ *e* $(x_2, y_2) = (3, 1)$.

Solução
A equação da recta, na forma reduzida, é $y = mx + b$. *Para obter esta equação temos que determinar o declive* m *e a ordenada na origem* b.
Cálculo de m.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{3-(-1)} = -\frac{1}{4}$$

A equação da recta é (a menos de b)

$$y = -\frac{1}{4}x + b. \tag{1.20}$$

Cálculo de b.
A equação da recta é uma proposição verdadeira (a igualdade é verificada) quando x *e* y *são substituidas pelas coordenadas de qualquer ponto da recta. Substituindo na equação (1.21) as coordenadas do ponto* $(-1, 2)$ *(por exemplo), determinamos* b.

$$2 = -\frac{1}{4}(-1) + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

A equação da recta é

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}. \tag{1.21}$$

Nas figuras 19 e 20 estão representadas algumas rectas. Salienta-se o seguinte.

- Rectas paralelas têm o mesmo declive m (porquê?);

- O parâmetro b na equação $y = mx + b$, corresponde ao ponto de intersecção da recta com o eixo dos yy (porquê?).

[12] A *forma geral* da equação da recta no plano é $ax + by = c$ que, resolvida em ordem a y toma a forma reduzida.

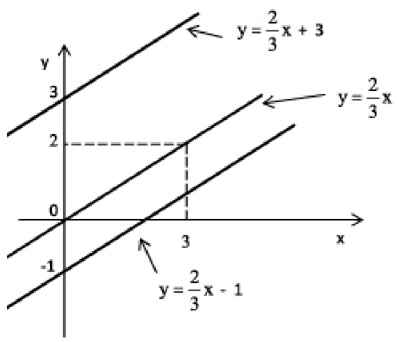

Figura 19: Rectas paralelas com declive $m > 0$.

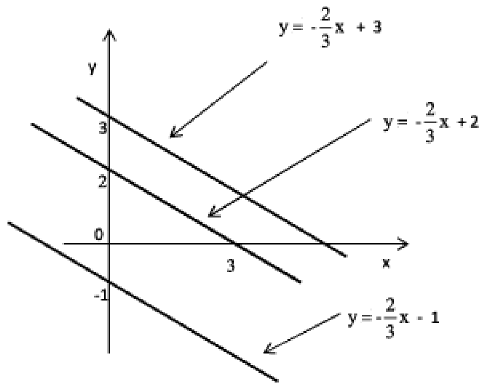

Figura 20: Rectas paralelas com declive $m < 0$.

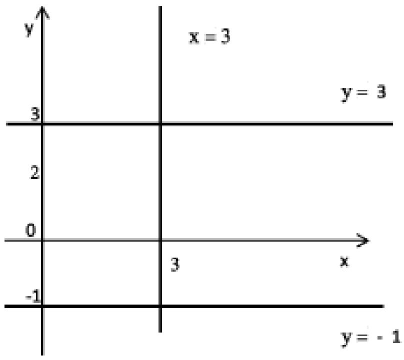

Figura 21: Rectas horizontais, $y = b$, e verticais, $x = a$.

Na figura 21 estão representadas rectas horizontais (paralelas ao eixo dos xx) e verticais (paralelas ao eixo dos yy). Salienta-se o seguinte:

- As rectas 'verticais' são da forma $x = a$, sendo a a abcissa do ponto de intersecção da recta com o eixo dos xx;
- As rectas 'horizontais' são da forma $y = b$, sendo b a ordenada do ponto de intersecção da recta com o eixo dos yy.

Vídeos . *32 a 39 (no anexo deste capítulo)*

Exercício 25. Quais as rectas a que pertence o ponto $(x, y) = (1, 2)$.

(a) $x = 1$ (b) $y = 2$ (c) $y = 3x - 1$ (d) $y = 2x + 2$

Solução (c). O ponto $(x, y) = (1, 2)$ *pertence à recta, porque substituindo na equação a variável* x *por* 1 *e a variável* y *por* 2*, obtém-se uma igualdade verdadeira:* $2 = 3 \times 1 - 1 \Leftrightarrow 2 = 2$.

4 Trigonometria

4.1 Soma dos ângulos internos de um triângulo no plano.

Na figura 22 as rectas paralelas r e s são intersectadas pela recta q. Os ângulos definidos pelas intersecções de r e s com o segmento de q situado entre estas, dizem-se *ângulos internos.* Os ângulos de medida θ, por estarem situados em lados diferentes da recta q, dizem-se *ângulos alternos internos*. Ângulos alternos internos têm a mesma medida.[13]

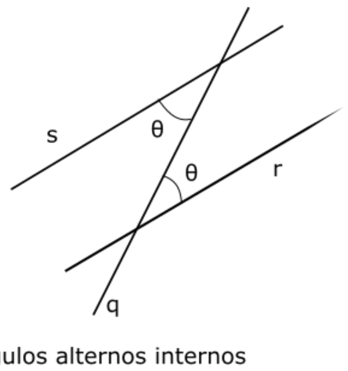

Figura 22

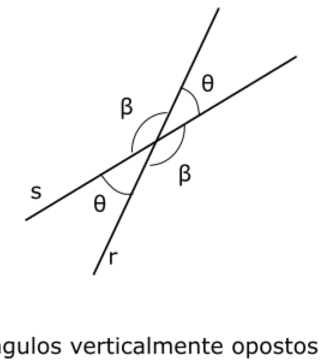

Figura 23

Na figura 23 estão representadas duas *rectas concorrentes* (rectas que se intersectam num único ponto) r e s. Os pares de ângulos *congruentes*[14] formados dizem-se *ângulos verticalmente opostos*. Assim os dois ângulos de medida θ são verticalmente opostos; os dois ângulos de medida β são também verticalmente opostos.

Na figura 24 é sugerida uma prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é de 180^o. O lado OA do triângulo OAB é paralelo à recta auxiliar r. Os ângulos internos alternos de medida θ resultam da intersecção de AB com OA e de AB com r. Também a recta r forma com OB o ângulo δ, congruente com o ângulo definido por OA e OB.

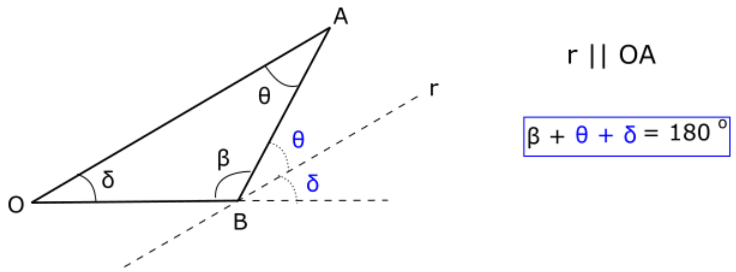

Figura 24

4.2 Triângulos semelhantes

Dois triângulos dizem-se *semelhantes* se os ângulos de um e outro formam pares de ângulos congruentes.

[13] *Ângulo* é a região 'em forma de *V*' definida por duas semirectas concorrentes no plano. A *medida* de um ângulo é um número que representa o afastamento das semirectas em relação à posição de coincidência (caso em que a medida é zero).
[14] Dois ângulos dizem-se *congruentes* se têm a mesma medida.

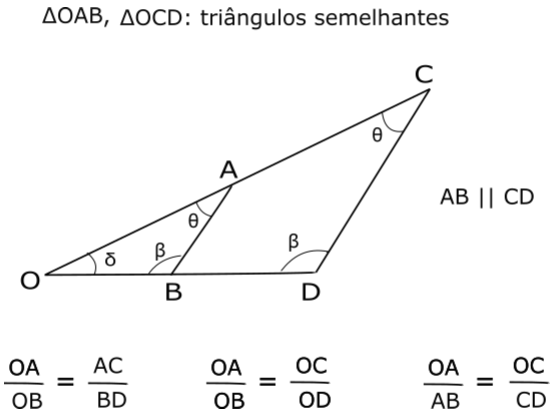

Figura 25

Na figura 25 os triângulos ΔOAB e ΔOCD são semelhantes.

4.3 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras[15] relaciona as medidas dos lados de um triângulo rectângulo (figura 26). Uma demonstração deste teorema recorre à figura 27.

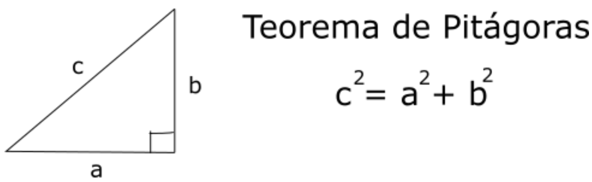

Figura 26: Teorema de Pitágoras

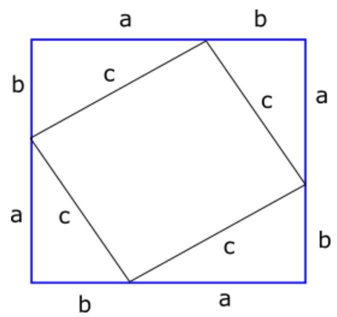

Figura 27

Os triângulos nos cantos do quadrado exterior são triângulos rectângulos *congruentes* (lados e ângulos iguais). A área do quadrado exterior é $Q_e = (a+b)^2$. Os ângulos internos do quadrilátero interior são rectos (porquê?). A área deste quadrado é $Qi = c^2$. A soma das áreas dos quatro triângulos é $T = 4ab/2 = 2ab$. Escrevendo Q_e como a soma de q_i e de T, obtemos

$$\begin{aligned} Q_e = Q_i + T \Leftrightarrow (a+b)^2 &= c^2 + 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Esta é uma das muitas provas existentes (mais de trezentas!) do famoso teorema. Observa bem a natureza da prova: partimos de uma igualdade verdadeira e vamos produzindo, em cada passo da demonstração, outras igualdades verdadeiras até obtermos a que queremos provar. Uma *demonstração* matemática é uma sequência de proposições[16] verdadeiras, cada uma delas deduzida das anteriores e de, eventualmente, outras proposições verdeiras conhecidas.

[15] Filósofo grego. Nasceu na ilha de Samos, por volta de 570 a.C.

[16] Na linguagem da matemática, *proposição* é uma expressão que tem valor lógico verdadeiro ou falso. Por exemplo, $(5 = 4)$ é uma proposição falsa; já $(3 + x \geq 2 + x)$ é uma proposição verdadeira.

4.4 Ângulos complementares. Razões trigonométricas em triângulos rectângulos

Dois ângulos α e β dizem-se *ângulos complementares* se $\alpha + \beta = 90^o$. *Razões trigonométricas* num triângulo rectângulo são cocientes entre medidas de dois lados do triângulo.[17] Estas razões originam as *funções trigonométricas*.

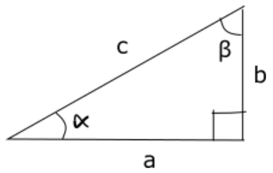

Figura 28

Usando o triângulo rectângulo da figura 28, podemos obter os seguintes cocientes entre as medidas dos lados.

$$\frac{a}{c} = sen(\beta) = cos(\alpha) \qquad \text{co-seno de } \alpha$$
$$\frac{b}{c} = cos(\beta) = sen(\alpha) \qquad \text{seno de } \alpha$$
$$\frac{a}{b} = tan(\beta) = cot(\alpha) \qquad \text{co-tangente de } \alpha$$
$$\frac{b}{a} = cot(\beta) = tan(\alpha) \qquad \text{tangente de } \alpha$$
$$\frac{c}{b} = sec(\beta) = csc(\alpha) \qquad \text{co-secante de } \alpha$$
$$\frac{c}{a} = csc(\beta) = sec(\alpha) \qquad \text{secante de } \alpha$$

O uso da partícula 'co' nestas designações tem o significado seguinte (adaptado a cada uma das razões).

co-seno de β = seno do ângulo **co**mplementar de β = seno de α.

As razões trigonométricas são as mesmas para quaisquer dois triângulos rectângulos semelhantes. Não dependem do 'tamanho' do triângulo, mas sim do valor do ângulo (α, ou β, na figura). São uma espécie de cartão de identificação do ângulo.

Exercício 26. Justificar as igualdades seguintes.

$$cos(0^o) = 1 \qquad cos(90^o) = 0$$
$$sen(0^o) = 0 \qquad sen(90^o) = 1$$
$$cos(90^o - \alpha) = sen(\alpha) \qquad sen(90^o - \alpha) = cos(\alpha)$$

Das razões obtidas para o seno e para o co-seno de um ângulo, deduz-se o chamado *teorema fundamental da trigonometria*, que afirma

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1,$$

[17]Na linguagem matemática a palavra *razão* significa *divisão*.

para qualquer ângulo α. Uma demonstração deste teorema é a seguinte.

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Vídeo. *40 (no anexo deste capítulo)*

4.5 Funções trigonométricas inversas

Se conhecemos o valor de um ângulo α e queremos calcular o valor do co-seno do ângulo, usamos a *função* co-seno calculando o valor $cos(\alpha)$. Se conhecemos o valor x do co-seno de um ângulo e queremos calcular o ângulo α correspondente, usamos a *função inversa* $cos^{-1}(x)$, sendo $arccos(x)$ uma notação equivalente. A expressão

$$\alpha = cos^{-1}(x)$$

lê-se 'α é o ângulo cujo co-seno é x'.

Exemplo 39.

$$sen(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 60^o = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 45^o = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$tan(45^o) = 1 \qquad 45^o = tan^{-1}(1) = arctan(1)$$

4.6 Lei dos senos

Na figura 29 está escrita a *lei dos senos*[18]. Esta lei afirma que, para qualquer triângulo, o cociente da medida de um lado pelo seno do ângulo oposto é o mesmo para os três lados do triângulo.

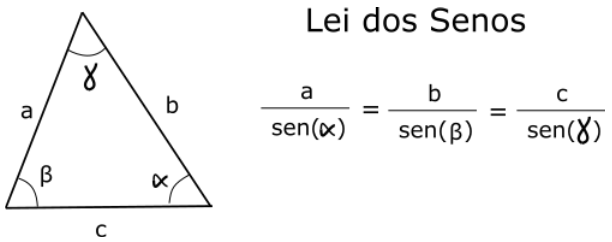

Figura 29

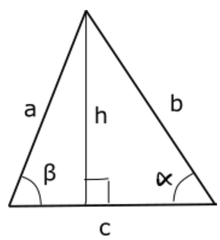

Figura 30

O começo de uma demonstração desta lei está na figura 30. Observando a figura é imediato concluir que

$$h = a\,sen(\beta) = b\,sen(\alpha).$$

Da igualdade $a\,sen(\beta) = b\,sen(\alpha)$ deduz-se

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}.$$

[18] O termo *lei* significa aqui o mesmo que *teorema*. Um *teorema* é uma afirmação verdadeira por existir uma demonstração matemática da mesma.

Exercício 27. Deduzir a segunda igualdade da lei dos senos (figura 29).

Vídeo . *41 (no anexo deste capítulo)*

4.7 Lei dos co-senos

Na figura 31 está escrita a *lei dos co-senos*. Esta lei é uma generalização do teorema de Pitágoras e permite-nos conhecer a medida de um lado de um triângulo qualquer, conhecendo as medidas dos outros dois lados e ângulo por eles definido.

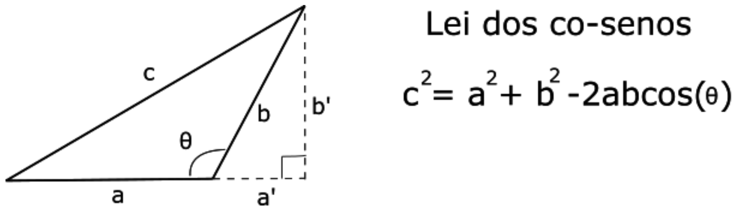

Figura 31: Lei dos co-senos.

Exercício 28. Mostrar que a lei dos co-senos se reduz ao teorema de Pitágoras se $\theta = 90^o$.

Uma demonstração desta lei procede pelos passos a seguir indicados. Da figura 31 resulta

$$\begin{aligned} a' &= b\,cos(180^o - \theta) = -b\,cos(\theta) \\ b' &= b\,sen(180^o - \theta) = b\,sen(\theta). \end{aligned}$$

Notar que o co-seno de um ângulo θ, com $90^o < \theta < 180^o$, é negativo, sendo o seno do ângulo positivo. Usando estas duas igualdades e aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo da figura, obtemos uma dedução da fórmula da lei dos co-senos.

$$\begin{aligned} (a+a')^2 + (b')^2 = c^2 &\Leftrightarrow (a - bcos(\theta))^2 + (bsen(\theta))^2 = c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2abcos(\theta) + b^2cos^2(\theta) + b^2sen^2(\theta) = c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2abcos(\theta) = c^2 \end{aligned}$$

Notar que $b^2cos^2(\theta) + b^2sen^2(\theta) = b^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = b^2$.

Vídeo . *42 (no anexo deste capítulo)*

4.8 Medidas de ângulos. Radiano

A medida de um ângulo exprime-se em unidades de vários tipos, como *grau* (geométrico), *grado* e *radiano*. Um ângulo recto corresponde, respectivamente, a 90 graus, 100 grados e $\pi/2$ radianos. Vamos esclarecer o que é um radiano e enunciar as vantagens no uso desta unidade.

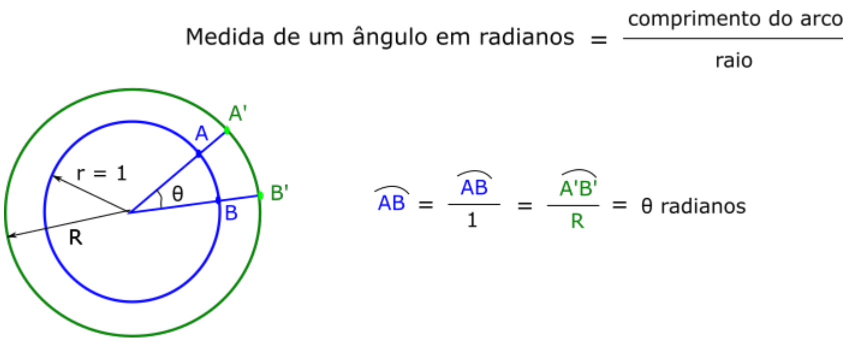

Figura 32

Na figura 32 estão representadas duas circunferências concêntricas (isto é, com o centro geométrico no mesmo ponto do plano), uma delas com raio igual a 1 e a outra com raio igual a R. No caso da figura temos $R > 1$, mas a descrição que se segue aplica-se também quando $R < 1$. Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ relacionam-se da forma $\widehat{A'B'} = R\,\widehat{AB}$ (porquê?).

Define-se *medida em radianos* do ângulo θ *subtendido* pelos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$, como o cociente entre cada arco e o raio da circunferência correspondente.

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{1} = \frac{\widehat{A'B'}}{R}$$

Este cociente é numericamente igual à medida de $\widehat{AB}$. Isto significa que conhecer o valor de um ângulo em radianos é conhecer a medida do arco que o subtende na circunferência de raio igual à unidade; equivalentemente, podemos obter o valor do ângulo em radianos, dividindo a medida do arco que o subtende pelo raio da circunferência correspondente, se for $R \neq 1$.

Sendo $\theta = \widehat{A'B'}/R$, o valor do ângulo é de 1 radiano quando a medida de $\widehat{A'B'}$ é igual ao raio da circunferência (o termo *radiano* deriva da palavra *raio*).

Deve notar-se que a medida de um ângulo é uma grandeza *adimensional*, por ser o cociente de dois comprimentos.

O uso do radiano como unidade de medida de ângulos é vantajoso por várias razões. Por um lado permite obter uma relação matemática simples entre o comprimento de um arco de circunferência e o ângulo subtendido correspondente; por outro lado permite obter expressões mais simples para as derivadas e integrais das funções trigonométricas, como veremos adiante no nosso curso.

Vídeo . *43 (no anexo deste capítulo)*

4.9 Círculo Unitário

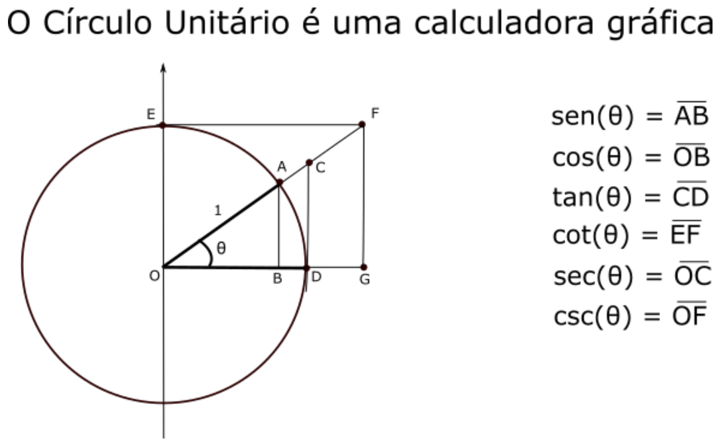

Figura 33

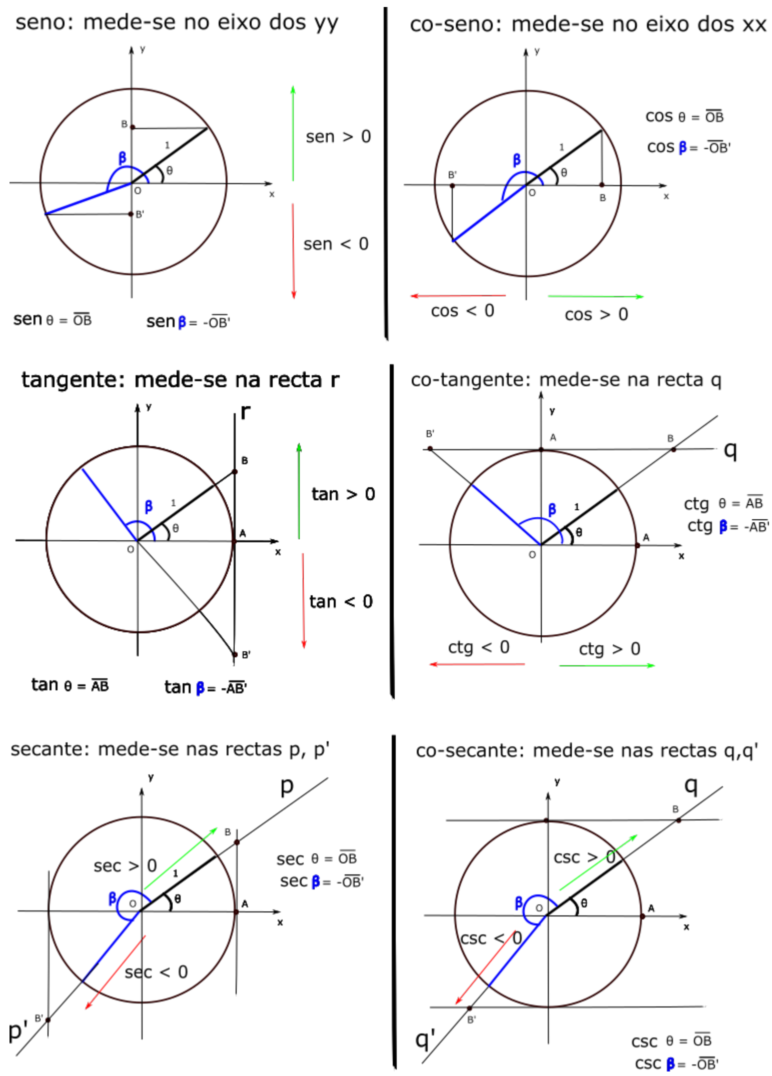

Figura 34

Vídeo . *44 (no anexo deste capítulo)*

5 Anexo: Vídeos

Adição, Subtracção, Multiplicação, Divisão

1	2	3	4	5
Adição de Números Inteiros [02:59]	Adição de Números com Dízima Finita [01:00]	Subtracção de Números Inteiros [03:50]	Subtracção de Números com Dízima Finita [01:37]	Multiplicação de Números Inteiros [07:28]
6	7	8	9	10
Multiplicação de Números com Dízima Finita [01:23]	Divisão Inteira 1 [05:46]	Divisão Inteira 2 [04:14]	Divisão Inteira 3 [02:30]	Divisão Real 1 [02:30]
11	12	13		
Divisão Real 2 [03:55]	Divisão Real 3 [06:25]	Algoritmo da divisão: justificação [07:28]		

Fracções. Números Irracionais. Percentagens. Potências. Radicais. Logaritmos

14	15	16	17	18
Fracções [04:14]	Soma e subtracção de fracções [03:27]	Multiplicação e divisão de fracções [04:45]	Vantagem da representação de números por fracções [07:02]	Números irracionais [06:58]

19	20	21	22
Percentagens [08:30]	Percentagens: tolerância no valor de componentes na engenharia [04:53]	Potências [08:39]	Radicais [10:00]

23	24
Valor aproximado de uma raiz [03:58]	Valor aproximado de um logaritmo [06:13]

Equações. Inequações

25	26	27	28
Papel das Equações na engenharia [03:26]	Equações Lineares de Uma Incógnita [09:43]	Exercício 1 [04:11]	Exercício 2 [04:16]

29	30	31
Inequações Lineares de Uma Incógnita [06:17]	Operadores Relacionais [02:15]	Exercício [04:11]

Equação da Recta

32	33	34	35	36
Equação da recta contendo a origem [08:14]	Equação da recta: significado do sinal do declive. [04:24]	Equação da recta na forma reduzida [10:53]	Gráfico de uma recta a partir da equação. [02:45]	Equação de uma recta a partir das coordenadas de dois dos seus pontos [05:14].

37	38	39		
Ponto de intersecção de duas rectas concorrentes [02:35]	Análise Dimensional de uma Relação Linear 1 [05:43]	Análise Dimensional de uma Relação Linear 2 [04:17]		

Trigonometria

40	41	42	43
Razões trigonométricas [05:36]	Lei dos senos [08:35]	Lei dos cosenos[05:56]	Graus, grados, radianos [08:56]

44
Círculo unitário [10:41]