

se descreve. Sejam x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois valores do domínio da função $f(x)$, monótona e derivável num intervalo contendo x_0 e $x_0 + \Delta x$. Seja $f'(x_0)$ a derivada da função para $x = x_0$, isto é:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (7)$$

Se calcularmos o cociente $\Delta f / \Delta x$ para um intervalo Δx pequeno, não nulo, temos

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Delta x \quad (8)$$

em que $\alpha \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Por consequência podemos escrever

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Delta x \Leftrightarrow \Delta f = f'(x_0) \Delta x + \alpha (\Delta x)^2 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha (\Delta x)^2. \quad (10)$$

Se Δx é muito pequeno, podemos desprezar $(\Delta x)^2$ e obtemos

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (11)$$

Exemplo

Aproximação do valor de uma função num ponto

Vamos usar o diferencial da função $f(x) = \sqrt{x}$ para calcular um valor aproximado de $\sqrt{4.01}$. A função $y = \sqrt{x}$ é crescente em todo o seu domínio. Seja $x_0 = 4$ e $\Delta x = 0.01$. Vamos calcular os termos da expressão

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \Leftrightarrow \sqrt{4 + 0.01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4} \times 0.01. \quad (12)$$

Sabemos que $f(4) = \sqrt{4} = 2$ e que $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$. Substituindo estes valores na última aproximação da expressão anterior, obtemos

$$\sqrt{4.01} \approx 2 + 0.01/4 = 2.0025. \quad (13)$$

Este valor tem um erro inferior a uma décima de milésima, dado que os primeiros seis dígitos do valor fornecido por uma calculadora são $\sqrt{4.01} \approx 2.00249$.

Algumas Aplicações das Derivadas.

A operação de derivação é usada quando é necessária informação sobre a taxa de variação de uma grandeza com outra.

Regra de L'Hôpital

A *regra de L'Hôpital*⁵ permite resolver alguns casos de indeterminações dos tipos $0/0$ e ∞/∞ que ocorrem no cálculo de limites de cocientes.

Teorema (regra de l'Hôpital). *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I , excepto, eventualmente, num ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \neq a$ no intervalo I . Valem os seguintes resultados.*

1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (podendo ser $L \in \mathbb{R}$, ou $L = \pm\infty$, e $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$), então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (podendo ser $L \in \mathbb{R}$, ou $L = \pm\infty$, e $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$), então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

A intenção desta proposição é trocar o cálculo do limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pelo cálculo do limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, esperando que o segundo cálculo seja mais simples que o primeiro.

Exemplos

Exemplo 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \quad (14)$$

À esquerda, na figura 8, estão representados os gráficos das duas funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x - 1$. Os gráficos contêm ambos o ponto $(x, y) = (1, 0)$. À direita na figura está representada uma ampliação destes dois gráficos, numa vizinhança do ponto $(1, 0)$. Os gráficos aparecem-nos quase lineares. Ambas as

⁵Guillaume François Antoine - França -(1661 - 1704), marquês de L'Hôpital.

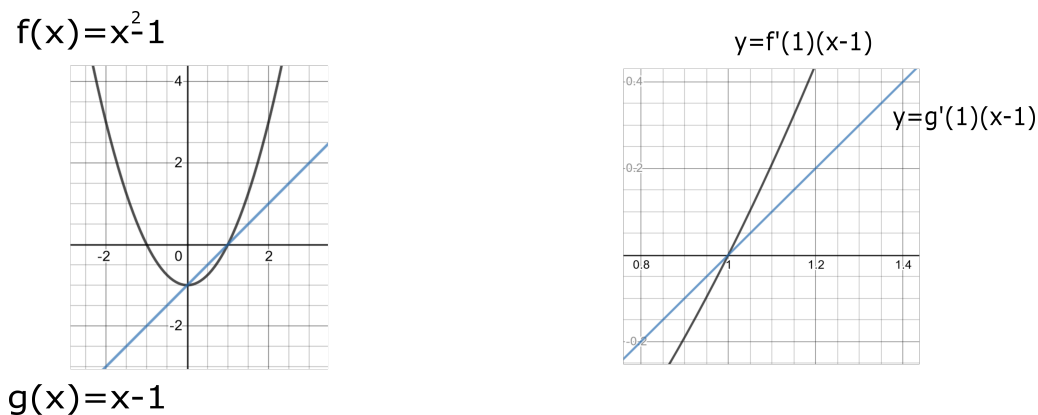


Figura 8: Duas funções e suas rectas tangentes para $x = 1$.

funções têm derivada no ponto $x = 1$, admitindo por isso uma recta tangente no correspondente ponto do gráfico. Quanto menor for a vizinhança considerada, mais ‘parecidos’ ficam os gráficos das funções com os das respectivas rectas tangentes. Se usarmos as equações das rectas para calcular o limite anterior, obtemos uma justificação intuitiva da regra de L’Hôpital para este tipo de caso. Sabendo que $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$ e $g'(x) = 1 \Rightarrow g'(1) = 1$, podemos escrever (recordar a definição de *diferencial*)

$$f(x) - f(1) \approx f'(1)(x - 1)$$

$$g(x) - g(1) \approx g'(1)(x - 1).$$

Como $f(1) = g(1) = 0$, temos $f(x) \approx f'(1)(x - 1)$ e $g(x) \approx g'(1)(x - 1)$ e podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(1)(x - 1)}{g'(1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Note-se que neste exemplo, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$. Tanto $f(x)$ como $g(x)$ têm derivadas contínuas no ponto $x = 1$. No entanto, a regra de L’Hôpital não exige que as funções tenham derivada no ponto de limite, mas sim que o limite do cociente das derivadas exista. Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln(x)}{\ln(x)}$ é igual a 1, valor que se obtém aplicando a regra de L’Hôpital. Nenhuma das funções, no numerador e no denominador, tem derivada no ponto zero.

Outra forma de calcular o limite do exemplo 1 é

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \quad (15)$$

Exemplo 2. A regra de L'Hôpital pode ser usada repetidas vezes.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{-e^{x-2} + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((x-2)^2)'}{(-e^{x-2} + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{-e^{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2(x-2))'}{(-e^{x-2} + 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{-e^{x-2}} = \frac{2}{-1} = -2.\end{aligned}$$

O primeiro limite na expressão anterior representa um caso do tipo $0/0$. A primeira igualdade corresponde à aplicação da regra de L'Hôpital. O terceiro membro volta a ser um caso de $0/0$. A terceira igualdade corresponde a uma nova aplicação da regra de L'Hôpital, que permite obter o valor do limite.

Exemplo 3 A regra de L'Hôpital afirma que se existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então este é igual a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, mas não podemos tirar nenhuma conclusão se o primeiro limite não existir. Assim, apesar de existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \operatorname{sen}(x)} = 1 \text{ (porquê?)},$$

se aplicarmos a regra de L'Hôpital (podemos fazê-lo porque se trata de um caso do tipo ∞/∞), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(x + \operatorname{sen}(x))'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

O último limite não existe (porquê?). Podes ver um vídeo sobre este tema produzido pelo MIT (código QR em anexo).

Exemplo 4 O limite seguinte, do tipo ∞/∞ , representa um caso que regra de L'Hôpital não resolve.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (\dots).\end{aligned}$$

Consegues mostrar que o valor do limite é 1?

Derivação da Função Implícita

Uma função diz-se representada na forma *implícita* se a equação que lhe corresponde não está resolvida em ordem à variável dependente y . A função diz-se representada na forma *explícita* se a equação que lhe corresponde está resolvida em ordem à variável dependente y .

Exemplos

$y = 3x + 2$	forma explícita da equação de uma recta
$y - 3x = 2$	uma forma implícita da equação da mesma recta
$y - 3x - 2 = 0$	outra forma implícita da equação da mesma recta
$y = x^2 - 3x + 2$	forma explícita de uma função quadrática
$2 - y = 3x - x^2$	uma forma implícita da função anterior

O aspecto caracterizador de uma função $y = f(x)$ é haver uma correspondência *unívoca* entre cada valor de x e o correspondente valor de y . Por outras palavras, a cada valor de x corresponde um e um só valor de y . A equação $y^2 = x$ não representa uma função $y = f(x)$, porque a cada valor de x correspondem dois valores, $\pm\sqrt{x}$, da variável y (figura 9). Podemos considerar que a equação implícita $y^2 = x$ representa duas funções,

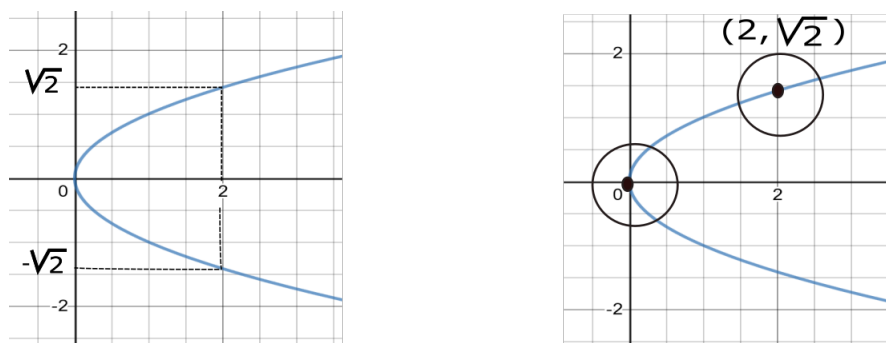


Figura 9: Gráfico da equação $y^2 = x$.

respectivamente, $y = \sqrt{x}$ se considerarmos apenas valores de y não negativos, e $y = -\sqrt{x}$ se considerarmos apenas valores de y não positivos. O *Teorema da Função Implícita*⁶ permite, sob certas condições, saber se, numa vizinhança suficientemente pequena de um ponto (x, y) do gráfico duma equação implícita, esta equação define uma função. No gráfico da direita, na figura 9, podemos ver que a equação define uma função numa vizinhança do ponto $(x, y) = (2, \sqrt{2})$, mas não numa vizinhança do ponto $(x, y) = (0, 0)$ (porquê?).

Existem funções definidas por equações implícitas que não podem ser escritas explicitamente. Um exemplo é dado pela equação implícita $y^5 + 4y - 32x = 0$, que se pode mostrar não poder ser resolvida em ordem a y , mas que representa uma função $y = f(x)$ (a cada $x \in \mathbb{R}$ a equação faz corresponder um só valor de $y \in \mathbb{R}$), como vamos ver num exemplo em baixo. Ainda que uma função esteja representada na forma implícita, podemos em alguns casos obter uma forma explícita $y' = g(x, y)$ para a sua derivada.

⁶Ver Wikipedia.

Exemplos

Exemplo 1. Calcular a derivada da função definida pela equação implícita $y - 3x^2 = 3$.

Derivando ambos os membros em ordem a x , temos

$$(y - 3x^2)' = (3)' \Leftrightarrow y' - 6x = 0 \Leftrightarrow y' = 6x.$$

Exemplo 2. Verificar que a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $y^5 + 4y + 32x = 0$ é decrescente no seu domínio de definição. Mostrar que o domínio de definição da função é $\mathbb{R}$.

- Verifica-se que $y^5 + 4y \rightarrow +\infty$ quando $y \rightarrow +\infty$, e que $y^5 + 4y \rightarrow -\infty$ quando $y \rightarrow -\infty$.
- Por outro lado, $y^5 + 4y$ é uma função contínua na variável y . A expressão $y^5 + 4y$ pode pois assumir qualquer valor real. É também uma expressão estritamente crescente com y (notar que $(y^5 + 4y)' = 5y^4 + 4 \geq 0$).
- Por isso, qualquer que seja o valor da expressão $32x$, existe um só valor de y tal que $y^5 + 4y = -32x$, verificando a equação implícita. Esta argumentação mostra que a equação implícita define uma só função y de x , e que o domínio desta função é $\mathbb{R}$.

Vamos agora verificar, calculando a derivada y' , que esta função é estritamente decrescente no seu domínio.

$$(y^5 + 4y + 32x)' = (0)' \Leftrightarrow 5y^4 y' + 4y' + 32 = 0 \Leftrightarrow y'(5y^4 + 4) = -32 \Leftrightarrow y' = \frac{-32}{5y^4 + 4}.$$

O último membro é negativo para qualquer valor de y , pelo que a derivada é negativa no domínio de definição da função. Como exemplo de utilização da fórmula de y' , consideremos o ponto $(x, y) = (-5/32, 1)$ do gráfico da equação implícita. A derivada da função implícita no ponto $x = -5/32$ é $y' = -32/(5 \times 1 + 4) = -32/9$.

Exemplo 3. Determinar as equações das rectas tangentes ao gráfico da *lemniscata* representada pela equação implícita $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

O gráfico da esquerda, na figura 10, representa a lemniscata considerada neste problema (existem lemniscatas - curvas em forma de oito - representadas por outras equações). Podemos antever que a curva admite duas tangentes na origem. A derivada em ordem a x de ambos os membros da equação implícita,

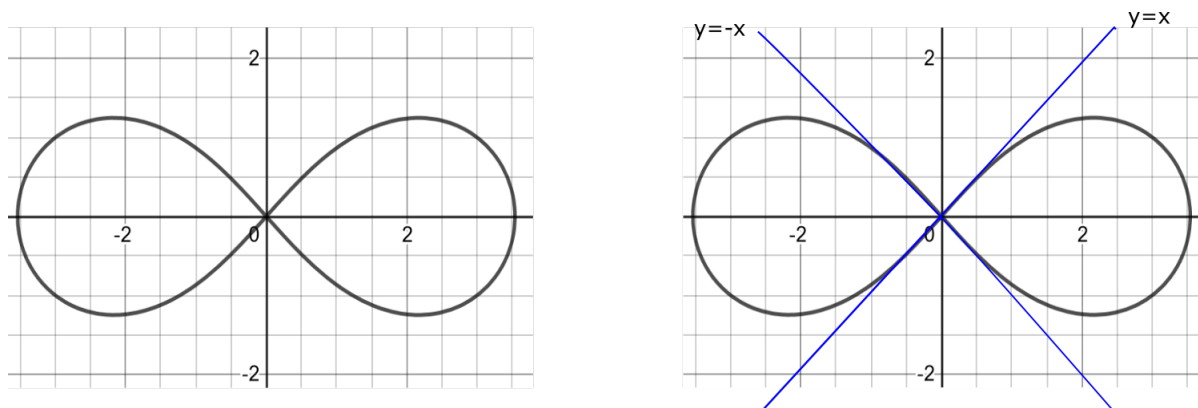


Figura 10: Gráfico de uma lemniscata e das suas rectas tangentes para $x = 0$.

calculada no ponto $(x, y) = (0, 0)$, vai fornecer-nos os valores dos declives das rectas correspondentes.

$$\begin{aligned} (2(x^2 + y^2)^2)' &= (25(x^2 - y^2))' \Leftrightarrow 4(y^2 + x^2)(y^2 + x^2)' = 25(2x - 2yy') \\ \Leftrightarrow 4(y^2 + x^2)(2yy' + 2x)' &= 25(2x - 2yy') \Leftrightarrow y' = \frac{25x - 4x(x^2 + y^2)}{4(x^2 + y^2)y + 25y}. \end{aligned}$$

Se substituirmos, no segundo membro da fórmula de y' , x e y por zero, obtemos a expressão $0/0$, que não é um número. No entanto, sabemos que para valores de x muito próximos de zero a igualdade $y = y'x$ é uma boa aproximação para y , no caso de uma função $y = f(x)$, tal que $f(0) = 0$ e $f'(0)$ existe. A justificação é a seguinte: seja $y = f(x)$; por ser $f(x) - f(0) \approx f'(0)(x - 0)$ e $f(0) = 0$, temos $f(x) \approx f'(0)x$, ou, usando y em vez de $f(x)$, $y \approx f'(0)x$ (recorda a noção de *diferencial*). Substituindo y por $y'x$ no denominador do segundo membro da fórmula da derivada, obtemos

$$y' = \frac{25x - 4x(x^2 + y^2)}{4(x^2 + y^2)y'x + 25y'x} \Leftrightarrow (y')^2 = \frac{25 - 4(x^2 + y^2)}{4(x^2 + y^2) + 25}.$$

Substituindo agora x e y por zero no segundo membro da última igualdade, temos

$$(y')^2 = \frac{25}{25} \Leftrightarrow (y')^2 = 1 \Leftrightarrow y' = \pm 1.$$

Encontramos os declives $m_1 = 1$ e $m_2 = -1$ das duas rectas tangentes, pelo que as equações destas rectas são, respectivamente, $y = x$ e $y = -x$. O gráfico à direita na figura 10, representa a lemniscata e as suas rectas tangentes no ponto $(0, 0)$.

Otimização de Funções de Uma Variável

Optimizar uma função $f(x)$ pode ser *maximizar* a função, ou seja, calcular o valor máximo que a função toma no seu domínio de definição, ou num subconjunto do domínio; também pode ser *minimizar* a função, ou

seja, calcular o valor mínimo que a função toma no seu domínio de definição, ou num subconjunto do domínio.

Exemplo **Minimização de uma função num intervalo de valores de x**

Minimizar a função $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4$ no intervalo $[-1, 1/2]$.

A solução deste problema pode ser obtida de forma aproximada, inspeccionando uma representação do gráfico da função no intervalo mencionado e identificando os pontos do intervalo $[-1, 1/2]$ para os quais a função toma o valor mínimo, e verificando qual é esse valor mínimo. A resolução que vamos apresentar é analítica (recorre a cálculos e não ao gráfico). Começamos por determinar a derivada da função $f(x)$.

$$f'(x) = (x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4)' = x^2 + x - 2.$$

De seguida calculamos os *pontos críticos* da função $f(x)$, que são os pontos do domínio onde a derivada é nula, os pontos do domínio onde a derivada não existe, e os pontos de acumulação do domínio, que não lhe pertencem ⁷ Como $f'(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, os únicos pontos críticos são aqueles em que a derivada é nula.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -2).$$

Sabemos que, dados dois pontos críticos $x = a$ e $x = b$ consecutivos de uma função $f(x)$, se $f'(x)$ está definida no intervalo (a, b) , então $f'(x) = 0$ em todos os pontos do intervalo, ou $f'(x) > 0$ em todos os pontos do intervalo, ou $f'(x) < 0$ em todos os pontos do intervalo. Para resolvermos o problema de otimização em questão, resta-nos determinar o sinal, ou a nulidade, de $f'(x)$ em cada um dos subintervalos definidos no seu domínio pelo par de pontos críticos calculados. Para determinar o sinal de $f'(x)$ nestes subintervalos podem

Table 1:

	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
sinal de $f'(x)$		+	-	+
variação de $f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

usar-se várias estratégias. Uma delas é calcular o sinal de $f'(x)$ num ponto qualquer de um subintervalo, ficando a conhecer-se o sinal da derivada em todos os pontos do subintervalo. No caso deste exemplo, por $f'(x) = x^2 + x - 2$ ser uma função quadrática com o coeficiente de x^2 positivo e com dois zeros distintos,

⁷Um ponto p diz-se ponto de acumulação de um conjunto C , se todo o intervalo aberto centrado em p contém algum elemento de C diferente de p . Por exemplo, o ponto $x = 0$ é um ponto de acumulação do domínio da função $f(x) = 1/x$, que não lhe pertence. Todos os outros números reais são também pontos de acumulação do domínio.

sabemos que é negativa entre os seus dois zeros ⁸ e positiva, respectivamente, à esquerda do menor zero e à direita do maior zero. A tabela 1 resume esta informação. Conclui-se o seguinte sobre a variação da função $f(x)$: a função é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(1, +\infty)$ e é decrescente no intervalo $(-2, 1)$. Para minimizar a função no intervalo $[-1, 1/2]$, basta observar que ela decresce neste intervalo. O ponto do intervalo $[-1, 1/2]$ no qual a função assume o valor mínimo é $x = 1/2$. A resposta ao problema é a indicação desse valor mínimo: $f(1/2) = 19/6$.

Exercício

De todos os triângulos rectângulos cuja medida da hipotenusa é igual a 8, quais os que têm maior área?

Resolução

Na figura 11 estão representados triângulos rectângulos cuja hipotenusa tem medida 8. Podemos suspeitar que não têm áreas iguais. Queremos encontrar aqueles que têm área máxima. A área de um triângulo de base b e altura h é dada por (figura 12)

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Encontrar os triângulos rectângulos de área máxima, consiste em determinar os valores de b, h para os quais A é máxima.



Figura 11:

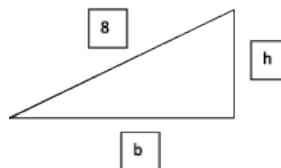


Figura 12:

Para tal podemos escrever A em função apenas de uma das variáveis b, h usando a relação $b^2 + h^2 = 8^2$ (teorema de Pitágoras). Por ser

$$b = \sqrt{8^2 - h^2},$$

temos

$$A = \frac{bh}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{8^2 - h^2}h}{2}.$$

⁸Um zero de uma função $f(x)$ é um valor de x que anula a função.

Para calcular os máximos de A derivamos a função em ordem a h .

$$\begin{aligned} A' &= \left(\frac{\sqrt{8^2 - h^2}h}{2} \right)' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{8^2 - h^2}h \right)' = \frac{1}{2} \left((\sqrt{8^2 - h^2})'h + \sqrt{8^2 - h^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2h}{2\sqrt{8^2 - h^2}}h + \sqrt{8^2 - h^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{\sqrt{8^2 - h^2}} + \sqrt{8^2 - h^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos agora determinar os pontos críticos, i.e., os valores de h no domínio de A para os quais $A'(h)$ é nula ou não é definida.

$$\begin{aligned} A' = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{\sqrt{8^2 - h^2}} + \sqrt{8^2 - h^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{h^2}{\sqrt{8^2 - h^2}} + \sqrt{8^2 - h^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{h^2}{\sqrt{8^2 - h^2}} = \sqrt{8^2 - h^2} \Leftrightarrow h^2 = 8^2 - h^2 \\ &\Leftrightarrow h^2 = 32 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{32} \end{aligned}$$

Como h representa um comprimento, tomamos o ponto crítico $h = \sqrt{32}$. Verificamos também que a derivada $A'(h)$ não existe se $h = \pm 8$ (não interessa considerar $A(h)$ para valores de h menores que 0 ou maiores que 8 (porquê?). Sabemos agora que a variação de $A(h)$ é do mesmo tipo nos pontos do intervalo $] - 8, \sqrt{32}[$ e nos pontos do intervalo $]\sqrt{32}, 8[$. Como $0 \in] - 8, \sqrt{32}[$ e $A'(0) > 0$, e também $6 \in]\sqrt{32}, 8[$ e $A'(6) < 0$, sabemos que a função cresce no intervalo à esquerda de $h = \sqrt{32}$ e decresce no intervalo à direita de $h = \sqrt{32}$, o que faz deste ponto um ponto de máximo absoluto da função $A(h)$. Podemos concluir que a área dos triângulos rectângulos cuja hipotenusa tem medida 8 é máxima quando a sua altura h é igual a $\sqrt{32}$ e a sua base b é igual a $\sqrt{8^2 - (\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$.

Um problema do tipo do que acabámos de resolver designa-se por *problema de otimização*. Os problemas de otimização costumam ter os seguintes dados: (i) uma função que se quer otimizar (i.e., minimizar ou maximizar), dita *função objectivo* do problema – no problema acima, a função objectivo é a função área A ; (ii) um conjunto de relações auxiliares que envolvem as variáveis da função objectivo, ditas *restrições* do problema – o problema acima tem uma só restrição, que é $8^2 = b^2 + h^2$. No problema acima a otimização consistiu em maximizar a função objectivo (calcular valores máximos). No problema seguinte, a otimização consiste em minimizar a função objectivo (calcular valores mínimos).

Exercício

O produto xy de dois números inteiros positivos é igual a 60. Determinar x e y de modo que a sua soma $S = x + y$ seja mínima.

Resolução

Pretendemos minimizar a função $S = x + y$. Esta é a função objectivo do problema. É fácil verificarmos que a soma de dois números inteiros positivos cujo produto é 60 depende dos números escolhidos. Por exemplo,

$$\text{para } x = 1, y = 60 \quad \text{temos } S = 1 + 60 = 61;$$

$$\text{para } x = 2, y = 30 \quad \text{temos } S = 2 + 30 = 32;$$

$$\text{para } x = 15, y = 4 \quad \text{temos } S = 15 + 4 = 19.$$

A restrição é a relação $xy = 60$ que envolve as variáveis x e y da função objectivo. Podemos escrever $x = \frac{60}{y}$, ficando a função objectivo na forma $S = y + \frac{60}{y}$ (ver figura 13). Vamos minimizar S . Para tal começamos por determinar S' .

$$S' = \left(y + \frac{60}{y} \right)' = 1 - \frac{60}{y^2}.$$

De seguida determinamos os pontos críticos de S . Verificamos que

$$S' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{60}{y^2} = 0 \Leftrightarrow y^2 = 60 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}.$$

Como y é positivo, temos $y = \sqrt{60}$. Verificamos também que S' não é definida se $y = 0$. Com esta informação, podemos afirmar que o sinal de S' é o mesmo em todos os pontos do intervalo $]0, \sqrt{60}[$ e nos pontos do intervalo $]\sqrt{60}, 60[$ da variável y , sendo S' negativa no primeiro intervalo e positiva no segundo. O ponto $y = \sqrt{60}$ é pois um ponto de mínimo local (mínimo absoluto, se considerarmos apenas valores positivos de y – ver figura 13). Em conclusão, podemos afirmar que o par de números positivos x, y , cujo produto é igual a 60 e a soma é mínima, é dado por $y = \sqrt{60}$ e $x = 60/y = 60/\sqrt{60} = \sqrt{60}$.

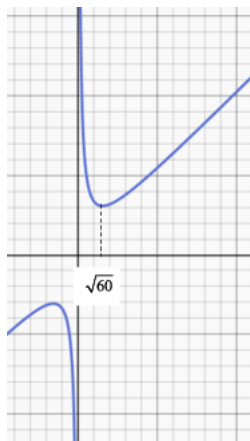


Figura 13: $S = y + \frac{60}{y}$

A natureza dos problemas enunciados nos exercícios anteriores não é alterada se trocarmos as letras b

e h , no primeiro e as letras x e y , no segundo. É esta simetria relativamente às variáveis envolvidas que justifica que seja $b = h$, na solução do primeiro problema e $x = y$, na solução do segundo problema.

Observação 1.

Um ponto $x = c$ em que a derivada de uma função se anula, dito *ponto estacionário da função*, pode ser um ponto de *máximo local*, um ponto de *mínimo local*, ou um ponto que não é de máximo nem de mínimo local. Podemos averiguar qual destes casos se verifica, estudando o sinal da derivada $f'(x)$ à esquerda e à direita de $x = c$. Outra forma de o fazer é usar o sinal da derivada de segunda ordem no ponto, $f''(c)$, quando ela existe e não é nula, conforme o enunciado seguinte.

Teorema.. *Seja f uma função derivável no intervalo (a, b) e c um ponto deste intervalo tal que $f'(c) = 0$. Se f admite derivada de segunda ordem f'' em (a, b) , então:*

- se $f''(c) > 0$, c é ponto de *mínimo relativo* (ou *mínimo local*) de f ;
- se $f''(c) < 0$, c é ponto de *máximo relativo* (ou *máximo local*) de f ;
- se $f''(c) = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza extremal de c .

No exemplo anterior temos $f''(x) = 2x + 1$. Podemos verificar que $x = -2$ é um ponto de máximo local, dado que $f''(-2) = -3 < 0$; o ponto $x = 1$ é um ponto de mínimo local porque $f''(1) = 3 > 0$. Estas conclusões são conferidas pelo gráfico da função na figura 14.

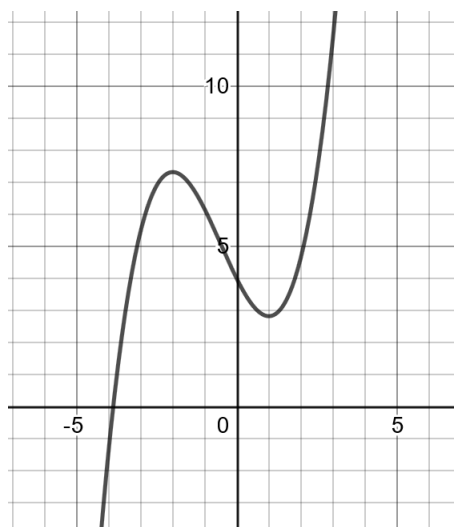


Figura 14: Gráfico da cúbica $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 4$.

Exercício.

1. Dada a função $f(x) = x^4$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de mínimo local.

2. Dada a função $f(x) = -x^4$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de máximo local.
3. Dada a função $f(x) = x^3$, verificar que $f''(0) = 0$, sendo $x = 0$ um ponto de sela (nem de máximo, nem de mínimo).

Observação 2.

A derivada segunda, $f''(x)$, representa-se alternativamente por $\frac{d^2f}{dx^2}$ (notação de Leibniz). A seguir discutimos o significado desta notação e as unidades que lhe estão associadas, conhecendo as unidades de $f(x)$ e de x .

A derivada de primeira ordem de $f(x)$, num ponto genérico x , define-se como o limite de um cociente de diferenças.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (16)$$

A notação de Leibniz, $\frac{df(x)}{dx}$, remete de forma mais expressiva para o limite de um cociente de diferenças do que $f'(x)$, e informa-nos sobre as unidades em que se exprime uma derivada: $(\text{unidades de } f)/(\text{unidades de } x)$. A derivada de segunda ordem, ou derivada de ordem dois, ou ainda derivada segunda, $f''(x)$, é a derivada de $f'(x)$, e define-se da forma

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \quad (17)$$

Substituindo nesta expressão as derivadas de primeira ordem pelos limites correspondentes, obtemos

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x + \Delta x_1) - f(x + \Delta x)}{\Delta x_1} - \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x_2}}{\Delta x}. \quad (18)$$

Quando a segunda derivada existe, esta expressão pode ser escrita na forma (um só limite e um só diferencial Δx)

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x + \Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

ou ainda

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^2}. \quad (19)$$

Salienta-se que *nenhuma* destas igualdades representa uma definição da derivada de segunda ordem (ao passo que a igualdade (16) é a definição da derivada de primeira ordem), cada uma delas verificando-se só se a

derivada de segunda ordem $f''(x)$ existir. Isto quer dizer que o segundo membro de (19) pode ter um dado valor real, mas o primeiro membro $f''(x)$ pode não existir (verificar que, se $f(x) = |x|$, então o segundo membro de (19) tem o valor 0 no ponto $x = 0$, apesar de esta função não ter aí derivada de nenhuma ordem igual ou superior à primeira⁹). Se observarmos o cociente na expressão (19), vemos no numerador uma *diferença de diferenças*, o que justifica a notação $d^2 f$ usada em $d^2 f/dx^2$. No denominador está o *quadrado da diferença* Δx , o que justifica a notação dx^2 usada em $d^2 f/dx^2$. Resumindo: $d^2 f$ remete para uma diferença de diferenças; dx^2 remete para o quadrado de uma diferença. As unidades em que se exprime a derivada de ordem dois, $d^2 f/dx^2$, são *(unidades de f)/(unidades de x)²*.

ANEXO***Código QR do vídeo sobre a regra de L'Hôpital***



⁹Para facilitar a escrita de certas fórmulas, considera-se, por vezes, que a derivada de ordem zero de uma função $f(x)$ é igual à própria função $f(x)$.