Exercício **1.**
(a) Determinar o domínio da função $f(x)$.
[Ver pg 6 da Sebenta Teórica, cap2; Exercício 2.4, Sebenta Prática cap2; TPCs 6, 7, 8, 10]
(b) Determinar o valor máximo da função no intervalo $[3, 5]$.
[Ver apontamentos Exercícios de Otimização, Semana 9; exercíco análogo resolvido nas aulas]

$$f(x) = 2 - \frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$

(a) $$f(x) = 2 - \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

Análise dos termos da função

2 : não restringe o domínio

$\frac{x}{(x+1)(x-1)}$: restringe o domínio nos valores de x para os quais a divisão não pode ser efetuada, que são os que anulam o denominador, uma vez que o numerador, x, não restringe o domínio.

Vamos determiná-los.

$$(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+1=0) \vee (x-1=0)$$
$$\Leftrightarrow (x=-1) \vee (x=1)$$

Resposta: Domínio de $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(b) Para determinar o valor máximo de f, caso exista, no intervalo $[3, 5]$, podemos estudar como varia f neste intervalo. Para isso temos que conhecer os sinais de f' nos intervalos de monotonia de f.

Calcular f'

$$f' = \left(2 - \frac{x}{(x+1)(x-1)}\right)' = (2)' - \left(\frac{x}{x^2-1}\right)'$$

$$= - \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = - \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

C.A.

$(x)' = 1$

$(x^2-1)' = (x^2)' - (1)'$

$= 2x$

$$= - \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Os pontos onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não está definida, determinam sobre o domínio de f os seus intervalos de monotonia, que são intervalos em que f' é positiva, negativa ou nula em todos os seus pontos. Vamos determiná-los.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2+1=0) \wedge \left((x^2-1)^2 \neq 0\right)$$

Mas $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Não existem pontos onde $f'(x) = 0$

- $f'(x)$ não está definida nos pontos $x = \pm 1$.

Estes dois pontos definem três intervalos de monotonia na reta real

$$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$$

Como o nosso intervalo de interesse, $[3,5]$, está contido no intervalo de monotonia $]1,+\infty[$, vamos determinar o sinal de f' neste último. Podemos usar qualquer ponto do intervalo:

$$2 \in \,]1,+\infty[$$

$$f'(2) = \frac{2^2+1}{(2^2-1)^2} > 0$$

A função f <u>é crescente</u> no intervalo $]1,+\infty[$, e por consequência também cresce no intervalo $[3,5]$.

O valor máximo pretendido é atingido no ponto $x=5$ do domínio de f.

$$f(5) = 2 - \frac{5}{(5-1)(5+1)} = 2 - \frac{5}{24}$$

$$= \frac{43}{24}$$

<u>Resposta</u>: o valor máximo de $f(x)$ no intervalo $[3,5]$ é $43/24$

Exercício **2.** Esboçar o gráfico de uma função que satisfaça as condições seguintes no intervalo $[0, 10]$ do seu domínio.

(a) Seja crescente e negativa no intervalo $[0, 3]$;

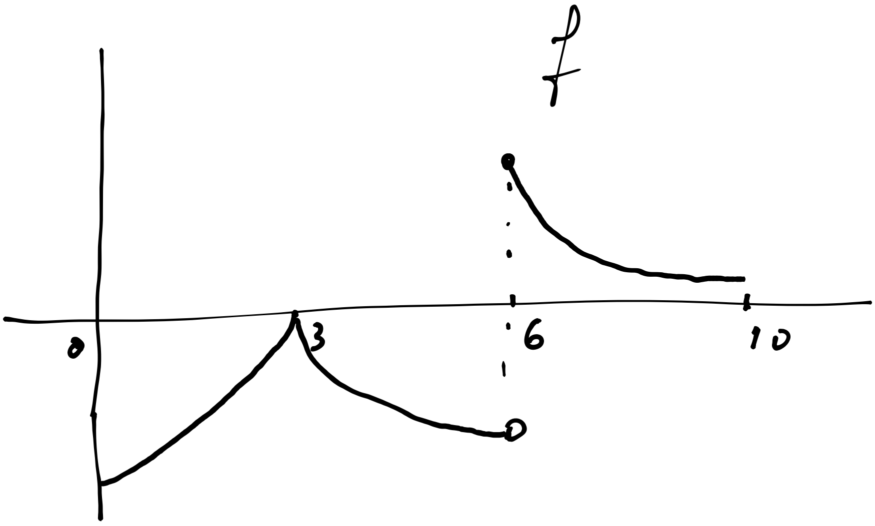
(b) Tenha derivada negativa no intervalo $]3, 6[$;

(c) Não tenha derivada definida no ponto $x = 6$;

(d) Tenha derivada negativa crescente no intervalo $]6, 10[$

[Ver na pg 7 da Sebenta Teórica, cap2; exercícios 2.35, 2.36 da Sebenta Prática, cap2; TPCs 7, 8, 9; exercício resolvido nas aulas]

Por exemplo



Características a ter em consideração

Função crescente: o gráfico 'sobe'

Função negativa: o gráfico está abaixo do eixo dos xx

Derivada negativa: o gráfico 'desce'

Derivada não definida num ponto: o gráfico apresenta uma descontinuidade, ou um ângulo ou uma cúspide.

Derivada negativa crescente: o gráfico 'desce' de forma cada vez menos abrupta.

Exercício **3.** Determinar a reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $x = 0$. A função é, neste ponto, crescente, decrescente, ou nem crescente nem decrescente?

$$f(x) = xcos(2x) - e^{3x+1}$$

[Ver pgs 31, 40, 41, 44 da Sebenta Teórica, cap2; Exercício 2.35, Sebenta Prática cap2; TPCS 8, 11; exercício resolvido nas aulas]

$$y = mx + b$$

$$m = f'(0)$$

b : determinado por um ponto da reta, por exemplo $(0, f(0))$

<u>Cálculo de m</u>

$$f'(x) = \left(x\cos(2x) - e^{3x+1}\right)' = \left(x\cos(2x)\right)' - \left(e^{3x+1}\right)'$$

$$= (x)'\cos(2x) + x\left(\cos(2x)\right)' - \left(e^{3x+1}\right)'$$

<u>C.A.</u>

$$(x)' = 1$$

$$\left(\cos(2x)\right)' = -\sin(2x)\cdot(2x)'$$

$$= -2\sin(2x)$$

$$\left(e^{3x+1}\right)' = (3x+1)'e^{3x+1}$$

$$= 3e^{3x+1}$$

$$f'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x) - 3e^{3x+1}$$

$$m = f'(0) = \cos(2\cdot 0) - 2(0)\sin(2\cdot 0) - 3e^{3(0)+1}$$

$$= \cos(0) - 3e^1 = 1 - 3e$$

$$\therefore \quad y = (1-3e)x + b$$

Cálculo de b

$$f(0) = 0\cdot\cos(2\cdot 0) - e^{3(0)+1} = -e$$

Ponto da reta : $(0, f(0)) = (0, -e)$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta

$$-e = (1-3e)\cdot 0 + b \Rightarrow b = -e$$

Resposta: A equação da reta é

$$y = (1-3e)x - e$$

Exercício **4.** Em não mais de 3 linhas de texto escrever uma definição rigorosa de **máximo relativo** de uma função $f(x)$ no ponto $x = p$.

[Definido nas aulas; Exercício 2.49, Sebenta Prática cap2; TPC 7]

- $f(x)$ tem um <u>máximo relativo</u> no ponto $x = p$ se existe um intervalo I contendo p tal que $x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(p)$.

ou

$f(x)$ tem um <u>máximo relativo</u> no ponto $x = p$ se existe um intervalo I contendo p tal que em nenhum ponto do intervalo a funçao assume um valor superior a $f(p)$.