Resumos das Aulas – 2020/21
Cálculo II – Engenharia Mecânica – ESTG/IPB
Mário Abrantes (http://www.ipb.pt/~mar)

Lição 7. Funções de várias variáveis. Derivada direccional

- Curvas de nível
- Derivadas parciais
- Derivadas parciais de 2ª ordem
- Derivada da função composta (regra da cadeia)
- Derivada direccional. Vector gradiente

Nos referenciais com três eixos que surjem nas figuras colocadas ao longo do texto, o eixo-z tem cor azul, o eixo-y tem cor verde e o eixo-x tem cor vermelha.

Curvas de nível.

As *curvas de nível* de uma superfície $z = f(x, y)$, são um meio de representar no plano informação respeitante ao gráfico da superfície. Vejamos como se determinam. Na figura 1 está representado o parabolóide circular de equação $z = 4 - x^2 - y^2$.

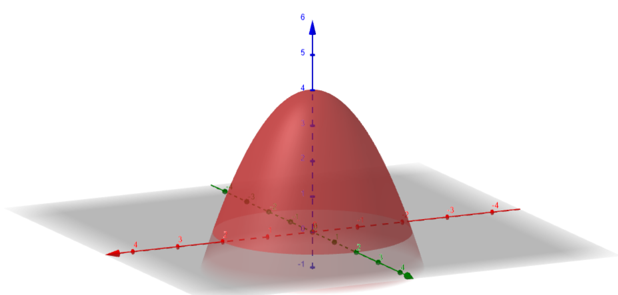


Figura 1: Parabolóide circular $z = 4 - x^2 - y^2$.

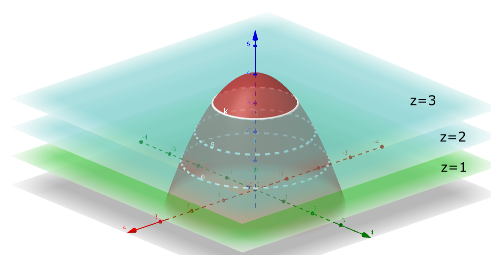


Figura 2: Parabolóide circular intersectado por planos do tipo $z = k$.

Na figura 2 podemos observar as curvas que resultam da intersecção do parabolóide circular com planos do tipo $z = k$, $k \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que estas curvas são circunferências. Começamos por notar que os pontos (x, y, z) pertencentes às curva de intersecção, devem satisfazer o sistema de equações

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = k \end{cases} \tag{1}$$

Substituindo z por k na primeira equação, obtém-se

$$k \;=\; 4 - x^2 - y^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 4 - k,$$

que é a equação da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{4-k}$. Esta circunferência representa a projecção no plano xy da circunferência (1) (ver exemplo para $k = 2$ na figura 3) e diz-se uma *curva de nível* do parabolóide circular. Pode observar-se na figura 4 um conjunto de curvas de nível do parabolóide.

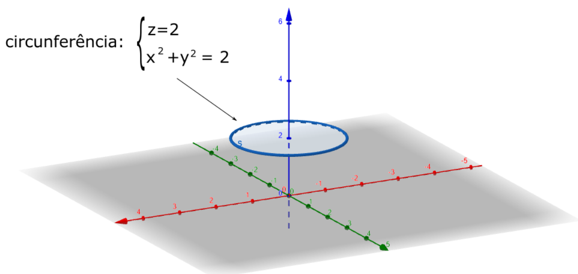


Figura 3:

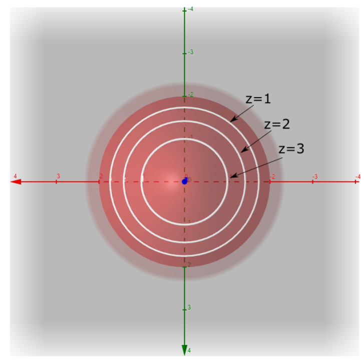


Figura 4: Curvas de nível do parabolóide circular.

Em resumo, uma *curva de nível* da superfície $z = f(x, y)$, com constante k, é uma curva no plano xy cujos pontos (x, y) são as projecções dos pontos de $z = f(x, y)$ que se encontram no nível k, isto é, pontos da superfície com coordenadas (x, y, k).

Exercício ***Curvas de nível de um plano***

Determinar a equação que representa a família das curvas de nível do plano $2x + 3y + z = 6$.

Substituindo z por k na equação do plano e resolvendo em ordem a y a equação resultante, temos

$$2x + 3y + k \;=\; 6 \Leftrightarrow y \;=\; -\frac{2}{3}x + \frac{6-k}{3}, k \in \mathbb{R}.$$

As curvas de nível do plano são rectas paralelas de declive $m = -2/3$. Obtém-se uma recta distinta para cada valor do parâmetro real k. Na figura 5 pode ver-se o plano $2x + 3y + z = 6$ e a sua intersecção com o plano $z = 1$. Na figura 6, estão representadas duas rectas da família de curvas de nível do plano.

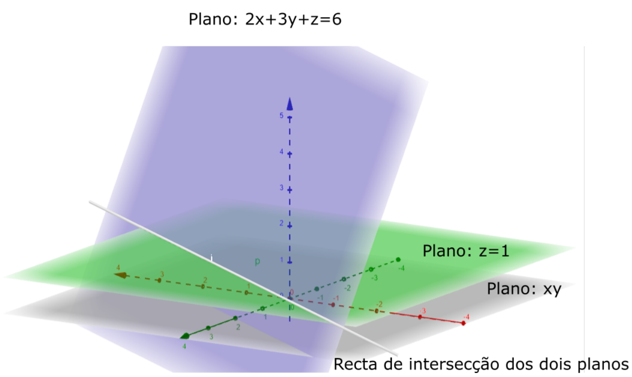


Figura 5: Intersecção do plano $2x + 3y + z = 6$ com planos do tipo $z = k$.

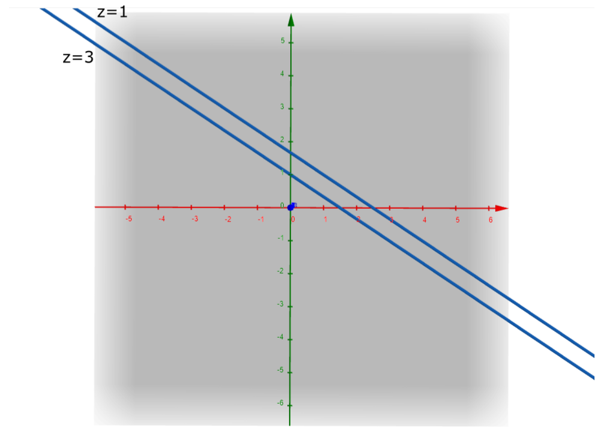


Figura 6: Curvas de nível do plano $2x + 3y + z = 6$.

Exercício ***Curvas de nível de um parabolóide hiperbólico***

Escrever a equação das curvas de nível do parabolóide hiperbólico $10z = y^2 - x^2$ e fazer a sua representação gráfica.

O *parabolóide hiperbólico* é a superfície em forma de sela representada parcialmente nas figuras 7 e 8.

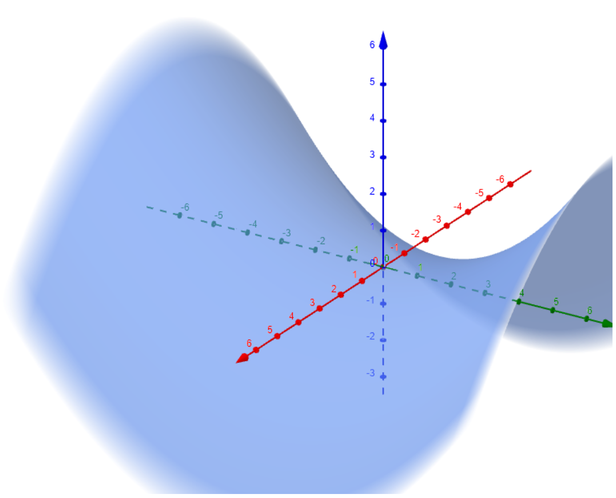


Figura 7: Vista do parabolóide hiperbólico.

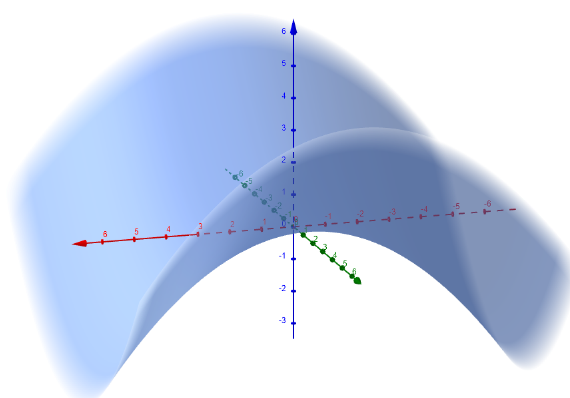


Figura 8: Vista do parabolóide hiperbólico.

Para determinar as expressões das curvas de nível da superfície, substitui-se z por k na equação $10z = y^2 - x^2$.

$$10k \;=\; y^2 - x^2$$

As curvas de nível resultantes são de três tipos.

1. Se $k = 0$, obtemos $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$. As curvas de nível são as duas rectas $y = x$ e $y = -x$.

2. Se $k < 0$, obtemos $y^2 - x^2 = 10k$, ou $x^2 - y^2 = 10|k|$. As curvas de nível são hipérboles (figura 10).

3. Se $k > 0$, obtemos $y^2 - x^2 = 10k$. As curvas de nível são hipérboles (figura 11).

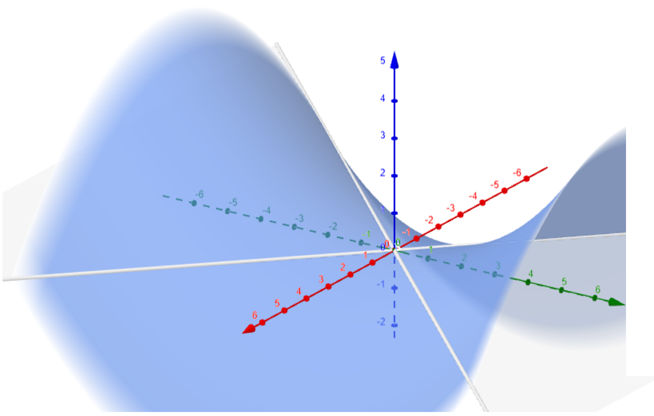


Figura 9: Curvas de nível ($k = 0$).

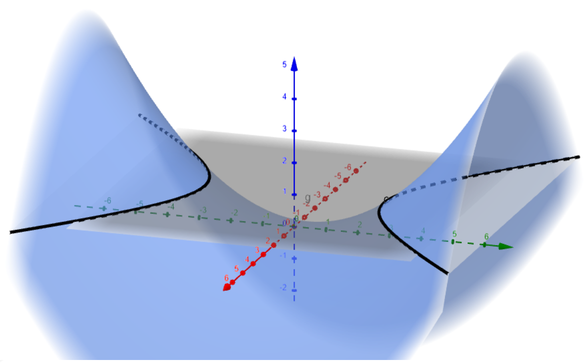


Figura 10: Curvas de nível ($k < 0$).

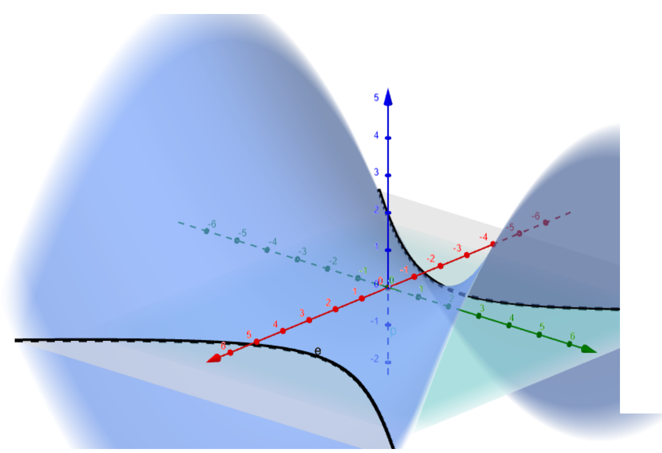


Figura 11: Curvas de nível ($k > 0$).

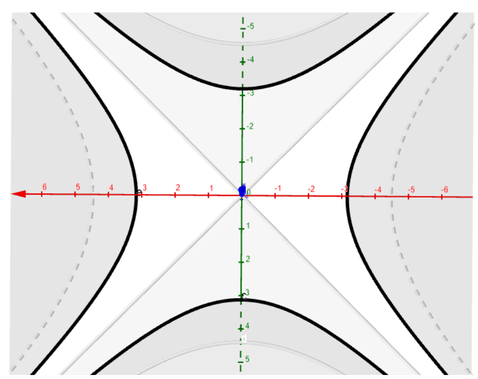


Figura 12: Curvas de nível do parabolóide hiperbólico.

Na figura 12 representam-se os três tipos de curvas de nível do parabolóide hiperbólico.

Exercício ***Superfície a partir uma curva de nível***

Escrever as equações de duas superfícies distintas que tenham a curva de nível $y = x^2 - 1$.

O gráfico da curva está representado na figura 13. Se escrevermos a equação da curva na forma $y - x^2 + 1 = 0$, podemos considerá-la como uma curva de nível da função $z = y - x^2 + 1$ (figura 14) (porquê?).

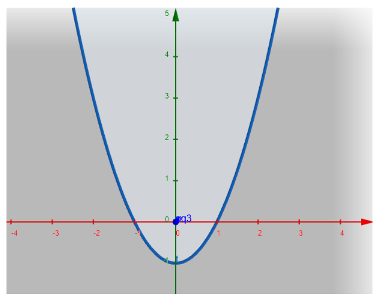


Figura 13: Gráfico da curva $y = x^2 - 1$.

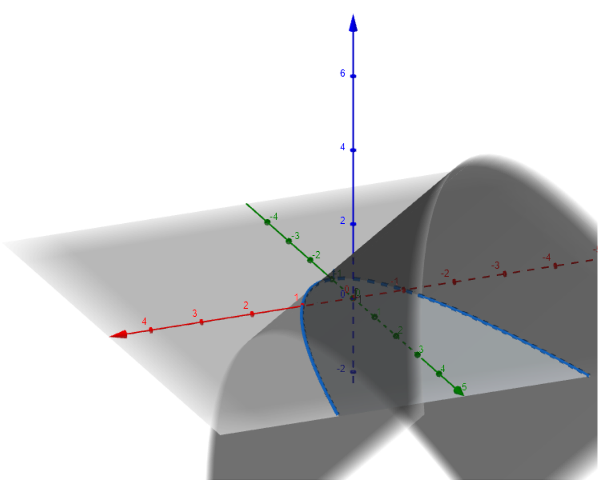


Figura 14: Superfície $z = y - x^2 + 1$.

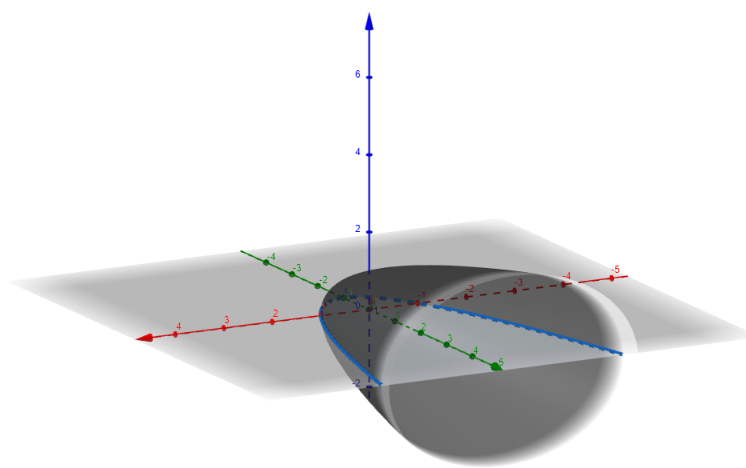


Figura 15: Superfície $z^2 = y - x^2 + 1$.

Podemos também considerá-la como uma curva de nível da função $z^2 = y - x^2 + 1$ (figura 15) (porquê?). Quantas superfícies admitem esta curva como curva de nível? A superfície $\ln(z + 1) = y - x^2 + 1$ está entre elas? E a superfície $z^2 + 1 = y - x^2 + 1$?

Derivadas parciais

Dada a superfície $z = 4 - x^2 - y^2$ (a) Determinar z'_y no ponto $(1,1)$ do seu domínio; (b) Escrever a equação vectorial da recta tangente à curva

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

no ponto $(1,1,2)$.

Recordemos que a derivada parcial $z'_y(1,1)$ de uma função $z = f(x,y)$, corresponde à taxa de variação de z com y, considerando x fixo $(x = 1)$ (figura 16).

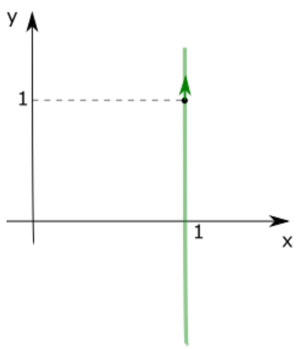


Figura 16: z'_y.

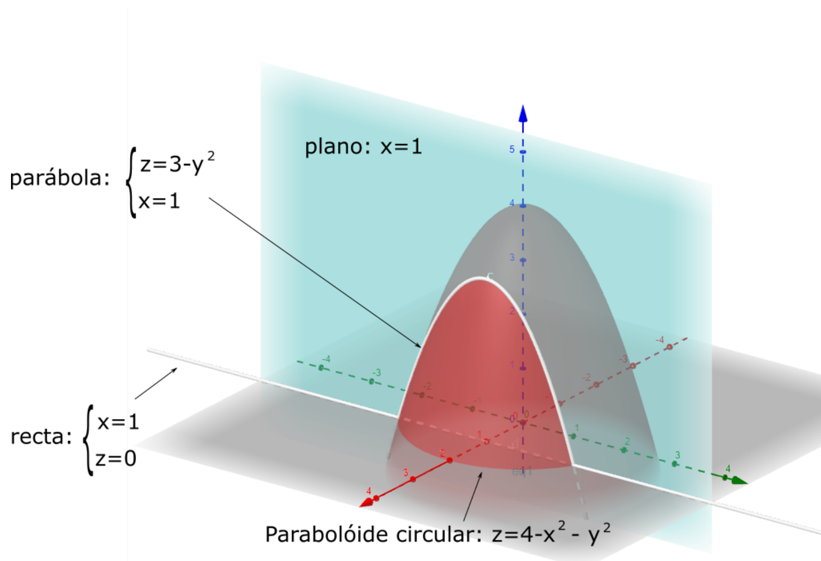


Figura 17: Intersecção das superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 1$.

Calculemos $z'_y(1,1)$.

$$z'_y = (4 - x^2 - y^2)'_y = -2y$$

$$z'_y(1,1) = -2$$

A resposta à alínea (a) deste exercício é $z'_y(1,1) = -2$. Na figura 17 podemos observar a parábola que resulta da intersecção do parabolóide circular $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 1$. A equação desta parábola é

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - y^2 \\ x = 1 \end{cases},$$

sendo $z = 3 - y^2$ a equação da projecção da parábola no plano zy.

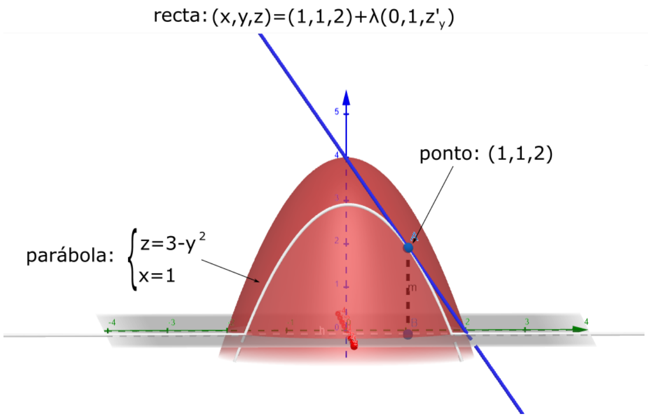


Figura 18:

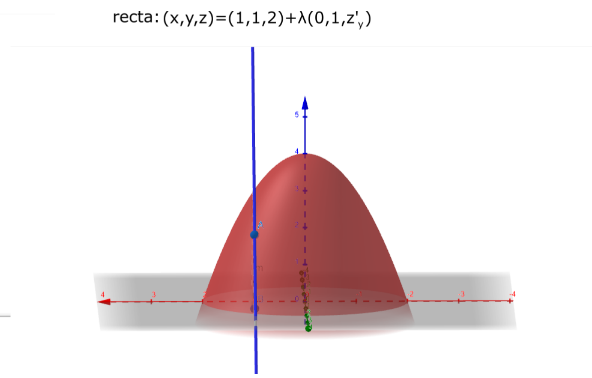


Figura 19:

O valor da derivada $z'_y(1,1) = -2$ representa o declive da projecção no plano zy da recta tangente à parábola no ponto $(1,1,2)$ (figura 18). A equação vectorial da recta é

$$(x, y, z) \ = \ (1, 1, 2) + \lambda(0, 1, -2).$$

Esta equação é a resposta à alínea (b) do exercício. A recta está contida no plano $x = 1$ (vista de perfil na figura 19). O *vector director* da recta, $(0, 1, -2)$, tem a coordenada $x = 0$, uma vez que a origem e a extremidade do vector estão ambas sobre o plano $x = 1$. Os valores das coordenadas y e z do vector, exprimem a relação $\Delta z/\Delta y = -2$ correspondente ao valor de $z'y(1, 1)$.

Derivadas parciais de segunda ordem.

As derivadas parciais de segunda ordem de uma função $z = f(x, y)$, representam-se como a seguir se indica.

z_{xx} ou $\partial^2 z/\partial x^2$	derivada parcial de segunda ordem, em ordem à variável x
z_{yy} ou $\partial^2 z/\partial y^2$	derivada parcial de segunda ordem, em ordem à variável y
z_{xy} ou $\partial^2 z/\partial y\partial x$	
e	
z_{yx} ou $\partial^2 z/\partial x\partial y$	derivadas de segunda ordem cruzadas (ou mistas)

Na notação para as derivadas parciais cruzadas, a letra, x ou y, mais próxima da letra da função, z, indica a variável em ordem à qual é efectuada a primeira derivação. Por exemplo, z''_{xy} significa $(z'_x)'_y$ e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

significa

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Exemplo

Calcular as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem da função $z = 2xy^2 - 3x^2y$.

Derivadas de 1ª ordem

$$z_x = \left(2xy^2 - 3x^2y\right)'_x = 2y^2 - 6xy$$

$$z_y = \left(2xy^2 - 3x^2y\right)'_y = 4xy - 3x^2$$

Derivadas de 2ª ordem

$$z_{xx} = \left(z_x\right)'_x = \left(2y^2 - 6xy\right)'_x = -6y$$

$$z_{yy} = \left(z_y\right)'_y = \left(4xy - 3x^2\right)'_y = 4x$$

$$z_{xy} = (z_x)'_y = (2y^2 - 6xy)'_y = 4y - 6x$$

$$z_{yx} = (z_y)'_x = (4xy - 3x^2)'_x = 4y - 6x$$

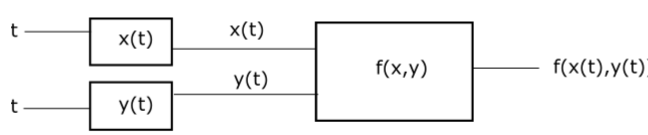
Verifica-se uma igualdade entre as derivadas cruzadas de segunda ordem. Estas derivadas não são sempre iguais. A este respeito, é válido o seguinte resultado.

Teorema(de Schwarz) *Dada uma função $f(x,y)$, se f_{xy} e f_{yx} são contínuas numa região aberta*[1] *do plano, então $f_{xy} = f_{yx}$ em todos os pontos dessa região.* □

O teorema de Schwarz também é conhecido por teorema de Clairaut, ou teorema de Clairaut-Schwarz[2]. No exercício acima, as derivadas parciais de segunda ordem cruzadas são polinómios de primeira ordem nas variáveis x e y. Qualquer polinómio representa uma função contínua em todos os pontos do plano, pelo que são válidas as condições enunciadas no teorema de Schwarz, justificando-se assim a igualdade das derivadas cruzadas.

Derivada da função composta (regra da cadeia)

O esquema na figura 20 representa a composição da função genérica $f(x,y)$ com as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$. A função composta, representada por $f(x(t), y(t))$ depende apenas da variável t. Podemos por isso calcular a derivada total df/dt



$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Figura 20:

Como exemplo, dadas as funções

$$\begin{cases} f(x,y) = 2x + 3y \\ x = 5t \\ y = 4t^2 + 1 \end{cases},$$

[1] Todo o ponto de uma região G do plano, pertencente a um círculo contido nessa região, se diz *ponto interior* de G. *Região aberta do plano*, é uma porção do plano tal que todos os seus pontos são pontos interiores – por exemplo, um círculo ao qual é retirada a circunferência, que é a sua *fronteira*.

[2] Alexis Clairaut (1713-1765), França; Karl Schwarz (1843-1921), Alemanha.

obtemos[3] $f(t) = 12t^2 + 10t + 3$, cuja derivada é $f'(t) = 24t + 10$. Este resultado pode ser obtido usando a *regra da cadeia* (fórmula na figura 20). Os termos que surgem na fórmula são

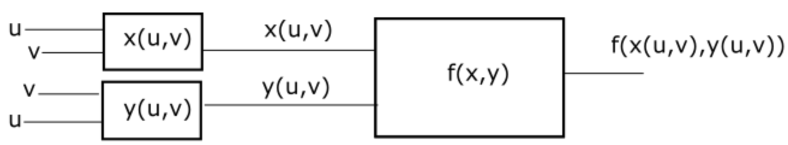
$$\frac{dx}{dt} = 5 \qquad \frac{dy}{dt} = 8t \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3.$$

Substituindo estas expressões na fórmula da regra da cadeia, obtemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \;\Leftrightarrow\; \frac{df}{dt} = 2 \times 5 + 3 \times 8t = 24t + 10.$$

O esquema que se apresenta na figura 20 é um auxiliar para obter a fórmula da regra da cadeia. Encarando o esquema como um circuito, verificamos que o input t é ligado ao output por dois caminhos. Um deles tem os blocos $x(t)$ e $f(x, y)$ ligados em série (encadeados). Multiplicando as derivadas das duas funções envolvidas, obtemos $dx/dt \times \partial f/\partial x$. Esta é a primeira parcela da fórmula na figura 20. O outro caminho envolve o encadeamento dos blocos $y(t)$ e $f(x, y)$. Multiplicando as derivadas envolvidas, obtemos $dx/dt \times \partial f/\partial x$, que é a segunda parcela da fórmula na figura 20.

Na figura 21 temos as fórmulas para a regra da cadeia no caso em que x e y são funções de duas variáveis, u e v. O esquema pode ser usado para obter as duas fórmulas, como no caso anerior.



$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Figura 21:

Como exemplo, dadas as funções

$$\begin{cases} f = \ln(xy) \\ x = 2u - 3v \\ y = uv \end{cases},$$

[3]Ao escrevermos $f(t)$ estamos a cometer um abuso de linguagem, dado que a função $f(x, y)$ tem dois argumentos, x e y. O uso da letra f para designar uma função, deveria vir com dois argumentos. Por simplicidade, mantemos a designação f para a função $f(t)$.

obtemos[4] $f(u,v) = \ln\left((2u-3v)uv\right)$. Derivando parcialmente f em ordem a u e em ordem a v, obtemos

$$
\begin{aligned}
f'_u &= \frac{\left((2u-3v)uv\right)'_u}{(2u-3v)uv} = \frac{4uv-3v^2}{(2u-3v)uv} = \frac{4u-3v}{(2u-3v)u} \\
f'_v &= \frac{\left((2u-3v)uv\right)'_v}{(2u-3v)uv} = \frac{2u^2-6uv}{(2u-3v)uv} = \frac{2u-6v}{(2u-3v)u}
\end{aligned}
$$

Este resultado pode ser obtido usando a *regra da cadeia* (fórmulas na figura 21). Os termos que surgem nas fórmulas são

$$
\begin{aligned}
&\partial x/\partial u = 2 \qquad \partial x/\partial v = -3 \qquad \partial y/\partial u = v \qquad \partial y/\partial v = u \\
&\partial f/\partial x = \frac{1}{x} \qquad \partial f/\partial y = \frac{1}{y}.
\end{aligned}
$$

Substituindo estas expressões nas fórmulas da regra da cadeia, obtemos as derivadas parciais anteriormente calculadas.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2}{x} + \frac{v}{y} = \frac{2}{2u-3v} + \frac{v}{uv} = \frac{2}{2u-3v} + \frac{1}{u} = \frac{4u-3v}{(2u-3v)u} \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-3}{x} + \frac{u}{y} = \frac{-3}{2u-3v} + \frac{u}{uv} = \frac{-3}{2u-3v} + \frac{1}{v} = \frac{2u-6v}{(2u-3v)u}
\end{aligned}
$$

Derivada direccional. Vector gradiente

Dado um ponto (x_0, y_0) do domínio de $f(x,y)$, a derivada parcial $f'_x(x_0,y_0)$ representa a taxa de variação da função no ponto (x_0,y_0), na direcção e sentido do vector unitário[5] $\hat{\mathbf{\imath}} = (1,0)$, enquanto a derivada parcial $f'_y(x_0,y_0)$ representa a taxa de variação da função no ponto (x_0,y_0), na direcção e sentido do vector unitário $\hat{\mathbf{\jmath}} = (0,1)$ (figura 22). Podemos ter interesse em determinar a taxa de variação de f na direcção e sentido de um vector unitário arbitrário $\vec{u}$. Essa taxa de variação diz-se *derivada direccional* da função f segundo o vector $\vec{u}$. Vamos ver como obter uma expressão para a derivada direccional de uma função num ponto, segundo um dado vector unitário.

---

[4] Comete-se aqui um abuso de linguagem com a designação 'f'.

[5] Um vector $\vec{u}$ diz-se unitário, se o seu módulo é igual a 1.

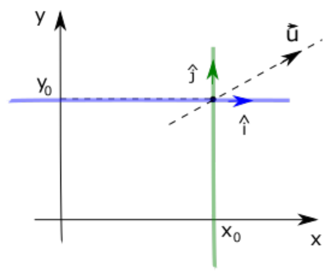


Figura 22:

Na figura 23 está representado, a traço grosso, um paralelogramo[6] inscrito no plano $z = ax + by + c$ (a imagem na direita da figura, representa uma vista na perpendicular do paralelogramo).

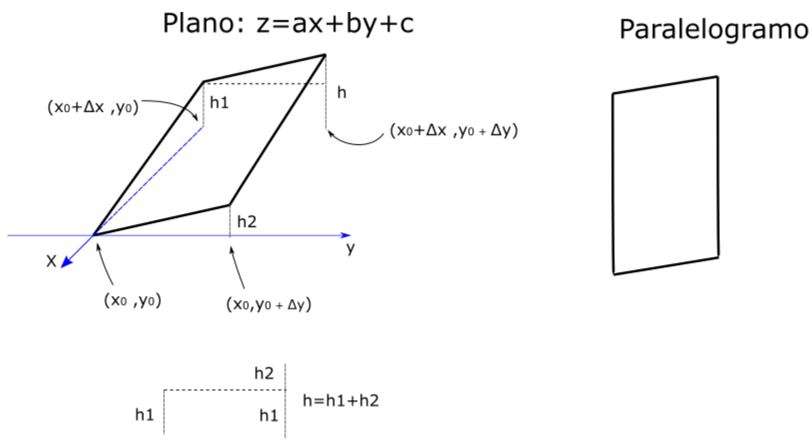


Figura 23:

Observação

Coloca um livro de capa dura sobre uma folha em branco. Usa um dos cantos do livro para traçares dois segmentos de recta perpendiculares (eixos x, y). Roda o livro mantendo um dos lados do canto apoiado sobre o seu segmento de recta na folha (como se fosse uma dobradiça). Agora roda o livro sobre o outro lado do canto, como se fosse uma dobradiça (figura 23). Se olhares agora o livro na perpendicular da mesa, verificas que este último lado está alinhado com o segmento de recta no papel, mas o outro lado não está alinhado com o segmento de recta correspondente. Daí o polígono a traço grosso ser um paralelogramo (imagem à direita, figura 23), e não um rectângulo.

[6]Polígono de 4 lados, cujos lados opostos são paralelos.

As derivadas parciais $z'_x(x_0, y_0)$ e $z'_y(x_0, y_0)$, representam os declives dos lados do paralelogramo alinhados com os eixos.

$$\begin{aligned} z'_x &= a = \frac{h_1}{\Delta x} \\ z'_y &= b = \frac{h_2}{\Delta y} \end{aligned}$$

A diferença Δz entre as coordenadas z dos pontos do plano $z = ax + by + c$, cujas projecções no plano xy são (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, escreve-se

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0).$$

Usando a equação do plano $z = ax + by + c$, obtemos a sequência de expressões seguinte.

$$\begin{aligned} \Delta z &= a(x_0 + \Delta x) + b(y_0 + \Delta y) + c - (ax_0 + by_0 + c) \\ \Delta z &= a\Delta x + b\Delta y \\ \Delta z &= z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \end{aligned} \tag{2}$$

Esta igualdade é válida no caso em que a função $z = f(x, y)$ representa um plano, que é o que estamos a analisar. No caso geral das funções de duas variáveis, $z = f(x, y)$, o segundo membro fornece, quando muito, uma aproximação para a variação da função, devendo escrever-se

$$\Delta z \approx z'_x \Delta x + z'_y \Delta y, \tag{3}$$

Esta fórmula é a correspondente, para o caso de duas variáveis, à fórmula de aproximação da variação Δy de uma função de uma variável, $y = f(x)$, em torno do ponto x_0, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ (ver os apontamentos da Lição 2). A fórmula $dy = f'(x)dx$ significa que o erro da aproximação $\Delta y \approx f(x)\Delta x$ é tanto menor quanto menor for Δx (para Δx suficientemente pequeno). Mas enquanto esta aproximação da variação Δy é válida sempre que existe a derivada $f'(x)$, para a fórmula (3) ser válida não basta que as derivadas parciais existam no ponto (x_0, y_0), relativamente ao qual se calculam $\Delta x, \Delta y$. Quer-se dizer, pode ser que $z'_x(x_0, y_0)$ e $z'_y(x_0, y_0)$ existam e, ainda assim, não seja válida a aproximação $\Delta z \approx z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_x(x_0, y_0)\Delta y$, por muito pequenas que sejam as variações $\Delta x, \Delta y$ em torno do ponto (x_0, y_0). Quando a aproximação é válida para quaisquer Δx, Δy suficientemente pequenos, escreve-se

$$dz = z'_x \, dx + z'_y \, dy. \tag{4}$$

Neste caso, dz diz-se *diferencial total* de z no ponto (x_0, y_0), e a função $z = f(x, y)$ diz-se *diferenciável* no ponto (x_0, y_0). A seguinte é uma condição suficiente para que uma função de duas variáveis seja diferenciável num ponto.

Teorema. *Se as derivadas parciais de primeira ordem de $z = f(x, y)$ existirem e forem contínuas num ponto, então a função é diferenciável nesse ponto.* $\square$

No caso do plano $z = ax + by + c$, as derivadas parciais são contínuas em todos os pontos (porquê?) e, por serem constantes, a aproximação (3) converte-se na igualdade (2).

O segundo membro de (3) pode escrever-se como um produto escalar.

$$\Delta z \;=\; (z'_x, z'_y) \cdot (\Delta x, \Delta y) \tag{5}$$

O primeiro vector designa-se por *vector gradiente* de z (no ponto (x_0, y_0)), e escreve-se

$$\vec{\nabla} z \;=\; (z'_x, z'_y)$$

Exercício ***Vector gradiente***

Determinar o vector gradiente da função $z = x/(2 + y)$ no ponto $(2, -1)$.

Queremos determinar o vector $\vec{\nabla} z(2, -1) = \big(z'_x(2, -1), z'_y(2, -1)\big)$.

$$z'_x \;=\; \frac{1}{2+y} \;\Rightarrow\; z'_x(-2, 1) \;=\; 1$$

$$z'_y \;=\; \frac{-x}{(2+y)^2} \;\Rightarrow\; z'_y(2, -1) \;=\; -2$$

O vector gradiente pretendido é $\vec{\nabla} z(2, -1) = (1, -2)$.

O vector $\vec{u} = (\Delta x, \Delta y)$ no segundo mebro de (5), tem a direcção e sentido determinados pelos pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Designamo-lo por *vector deslocamento* (figura 24). Se $\|\vec{u}\| \;=\; 1$, dz (fórmula (4)) diz-se *derivada direccional* de z segundo $\vec{u}$, no ponto (x_0, y_0), e representa-se por

$$D_{\vec{u}} z(x_0, y_0)$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

Definição. *Se $f(x, y)$ for diferenciável no ponto (x_0, y_0) e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ for um vector unitário, então a derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ existe e é dada por*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \;=\; \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2) \;=\; f'_x(x_0, y_0) u_1 + f'_y(x_0, y_0) u_2. \tag{6}$$

□

Notar que esta definição de derivada direccional é consistente com as definições de derivadas parciais de primeira ordem.

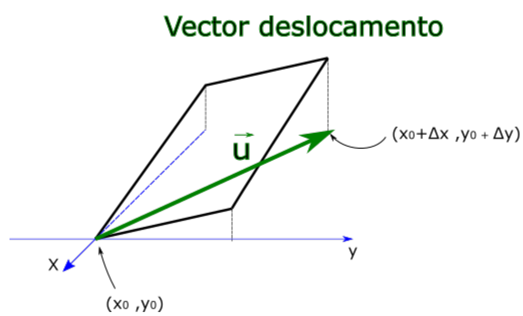


Figura 24:

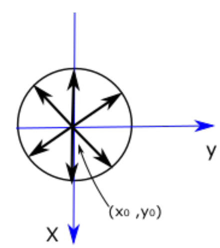


Figura 25:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} \;&=\; \frac{\partial z}{\partial \hat{\mathbf{\imath}}} \;=\; \vec{\nabla} z \cdot \hat{\mathbf{\imath}} \;=\; (z'_x, z'_y) \cdot (1, 0) \;=\; z'_x \\
\frac{\partial z}{\partial y} \;&=\; \frac{\partial z}{\partial \hat{\mathbf{\jmath}}} \;=\; \vec{\nabla} z \cdot \hat{\mathbf{\jmath}} \;=\; (z'_x, z'_y) \cdot (0, 1) \;=\; z'_y
\end{aligned}$$

Uma pergunta interessante é a seguinte: dado um ponto (x_0, y_0) do domínio de uma função $z = f(x, y)$, qual a direcção e sentido do deslocamento unitário $\vec{u}$ correspondente à derivada direccional mais elevada (figura 25)? A fórmula (6) revela que a derivada direccional é máxima quando o deslocamento $\vec{u}$ tem a direcção e sentido do vector gradiente calculado no ponto, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$, por assim se maximizar o produto escalar. Esta é uma informação muito relevante dada pelo vector gradiente.

Teorema. *Dada a função $f(x,y)$, se $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) \neq 0$, então a derivada direccional de f no ponto (x_0,y_0), segundo o vector unitário $\vec{u}$, é máxima se $\vec{u}$ tem a direcção e sentido de $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$. O valor desta derivada é*

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) \;=\; \|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\|.$$

□

Vamos estabelecer outra relação relevante entre as curvas de nível de uma superfície e o vector gradiente: o vector gradiente de uma função $z = f(x,y)$, no ponto (x_0,y_0), é perpendicular à curva de nível da função que contém esse ponto. Começamos por verificar este resultado para o caso em que a superfície é um plano.

1. Consideremos o plano $Ax + By + Cz + D = 0$ e dois pontos quaisquer distintos que lhe pertençam.

$$P_1 \;=\; \left(x_1, y_1, \frac{-Ax_1 - By_1 - D}{C}\right)$$
$$P_2 \;=\; \left(x_2, y_2, \frac{-Ax_2 - By_2 - D}{C}\right)$$

2. Seja $\vec{v} = P_1 - P_2$ um vector definido por estes dois pontos.

$$P_1 - P_2 \;=\; \left(x_1 - x_2, y_1 - y_2, \frac{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1)}{C}\right)$$

3. É imediato verificar que o produto escalar $(A,B,C)\cdot\vec{v}$ é nulo, o que mostra que os vectores (A,B,C) e $\vec{v}$ são perpendiculares.

$$(A,B,C)\cdot(P_1 - P_2) \;=\; A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) \;=\; 0$$

   Como P_1, P_2 são pontos arbitrários do plano, concluimos que o vector (A,B,C) é perpendicular a qualquer direcção definida sobre o plano, ou seja, (A,B,C) é perpendicular ao plano.

4. As curvas de nível do plano são as rectas $k = Ax + By + C$, com $k \in \mathbb{R}$. Usando um argumento semelhante ao exibido nos itens anteriores, podemos mostrar que o vector (A,B) é perpendicular a quqlquer recta $k = Ax + By + C$. Mas $(A,B) = (z'_x, z'_y) = \vec{\nabla} z$. Concluimos que o vector gradiente é perpendicular às curvas de nível do plano.

Na próxima lição estabecemos um argumento que estende este resultado a qualquer superfície $z = f(x,y)$.

Exercício ***Vector perpendicular a uma recta***

Mostrar que o vector (A, B) é perpendicular à recta $Ax + By + C = 0$.

Bibliografia

1. *Cálculo Diferencial e Integral*, vol I, N. Piskounov.

2. *Calculus*, Howard Anton.