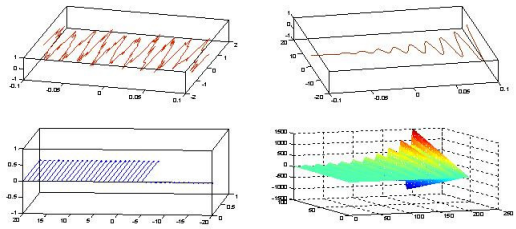
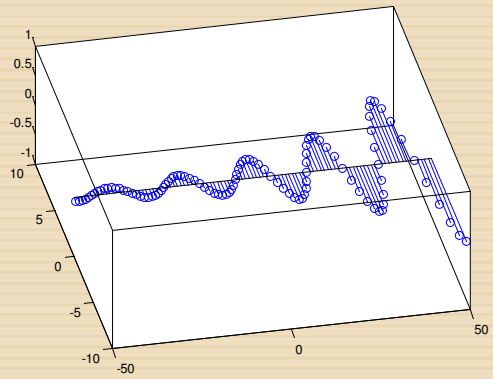
Engenharia Electrotécnica

SINAIS E SISTEMAS



João Paulo Teixeira - JPT



2 CAPÍTULO 1 - SINAIS

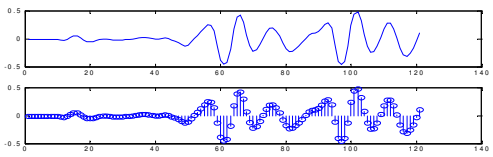
Sinais

- Distinguir sinais contínuos de sinais discretos.
- Operações sobre sinais:
  - Escalonamento na amplitude;
  - Escalonamento no tempo;
  - Reflexão;
  - Deslocamento;
  - Adição e subtracção de sinais;
- Propriedades de sinais:
  - Pares
  - Ímpares
  - Periodicidade
- Exemplos de Alguns Sinais:
  - Sinusoidal
  - Revisão de números complexos e funções complexas
  - Exponencial complexo
  - Degrau unitário
  - Impulso unitário

Sinais

- Sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação acerca do comportamento e características de determinados fenómenos físicos. São representados matematicamente como função de uma ou mais variáveis independentes.

- Contínuo/Discreto



  - x(t)=A*sin(2*pi*f*t+fase) - contínuo – O domínio é um subconjunto dos números reais;
  - x[n]=A*sin(2*pi*f*n/Fa+fase) - discreto – O domínio é um subconjunto dos números inteiros;

- Em ambos os casos o contradomínio pode ser contínuo ou discreto.

Sinais Discretos por Amostragem de Sinais Contínuos

•Sinal discreto por amostragem de um sinal contínuo:

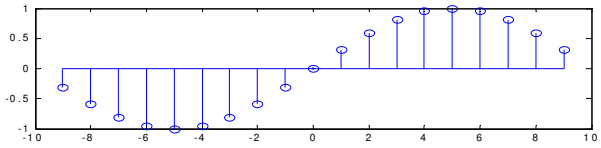
$x[n]=x_a(nT_a)$,

- T_a – período de amostragem
- $F_a=1/T_a$ – Frequência de amostragem

•Representação gráfica de um sinal discreto:

x[n]=sin(2*pi*5*n/100);

$$-\infty < n < \infty$$



Operações Sobre Sinais

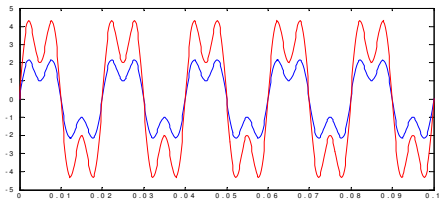
- Escalonamento da amplitude

  Operação sobre a variável dependente.

  Ex: y(t)=a.x(t)

  y[n]=a.x[n]

y(t)=2x(t)



Operações Sobre Sinais

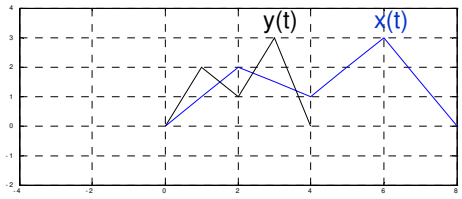
- Escalonamento no tempo

  Operação sobre a variável independente.

  Ex: y(t)=x(a.t) - a real positivo

  y[n]=x[a.n] - a inteiro positivo

  y(t)=x(2t)

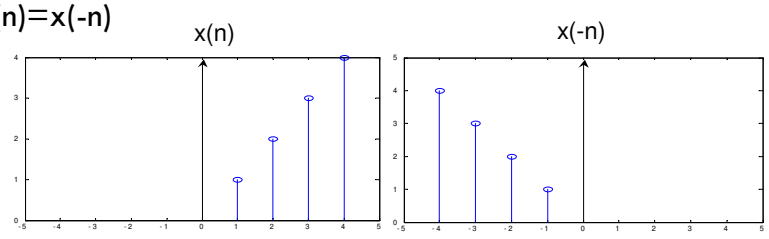


Operações Sobre Sinais

- Reflexão (caso particular de escalonamento no tempo com a=-1)

  y(t)=x(-t)

  y(n)=x(-n)



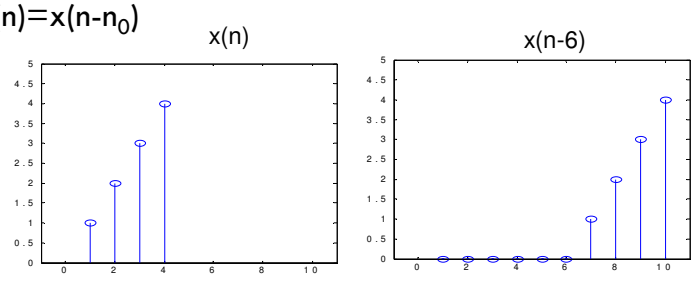
Espelho

Operações Sobre Sinais

- Deslocamento

  $y(t)=x(t-t_0)$

  $y(n)=x(n-n_0)$



Operações Sobre Sinais

- Regra de Precedência para deslocamento e escalonamento no tempo
  - Consideremos a relação: $y(t)=x(at-b)$
  - Que satisfaz as seguintes condições: $y(0)=x(-b)$; e $y(b/a)=x(0)$.
  - Para se obter correctamente y(t) a partir de x(t), as operações de deslocamento e escalonamento devem ser realizadas na ordem correcta:

Operações Sobre Sinais

1. operação de deslocamento no tempo, substituindo *t* por *t-b*:
   - v(t)=x(t-b)
2. escalonamento no tempo (executada em v(t)), substituindo *t* por *at*:
   - y(t)=v(at)
   - Resultando y(t)=x(at-b)

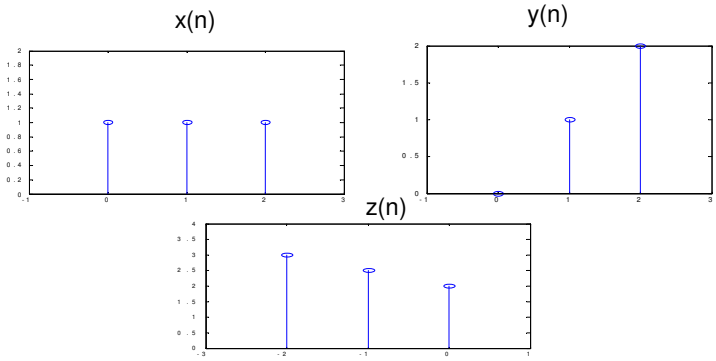
- Note-se que *a* pode ser *-1* denotando uma reflexão.

Operações Sobre Sinais

- Adição e subtracção de sinais

  Exemplo:

  z(n)=2.x(n+2)+0,5.y(-n)



Propriedades dos Sinais

- Sinal Par

  O sinal é par se

  x(t)=x(-t)

  x(n)=x(-n)

- Sinal Ímpar

  O sinal é ímpar se

  x(t)=-x(-t)

  x(n)=-x(-n)

Decomposição de um sinal nas componentes Par e Ímpar

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

- Componente Par

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad x_p(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

- Componente Ímpar

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad x_i(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

Propriedades dos Sinais

- Periodicidade

  Um sinal é periódico se existe um T>0 (ou N>0) tal que

  x(t)=x(t+T) T: período

  x(n)=x(n+N) N: período

  No tempo contínuo um sinal sinusoidal ou um exponencial complexo são periódicos com período $T=2\pi/w_0$.

Periodicidade Para Sinais Discretos

Para o caso sinusoidal:

x(n) x(n+N)

$$A\cos(w_0 n+\theta) = A\cos(w_0 n + w_0 N + \theta)$$

Requer que

$$w_0 N = 2\pi k \qquad \text{com k inteiro}$$

Para o caso exponencial complexo:

$$e^{jw_0(n+N)} = e^{jw_0 n}$$

Requer que

$$w_0 N = 2\pi k \qquad \text{com k inteiro}$$

Assim, as sequencias exponencial complexa e sinusoidal não são necessariamente periódicas com período $2\pi/w_0$, e dependendo do valor de w_0, podem até nunca ser periódicas.

Sinais Básicos

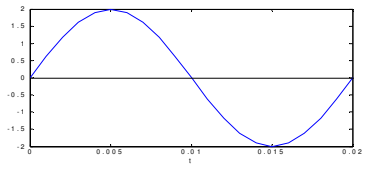
- Sinusoidal $x(t)=A\sin(2\pi ft+\phi)$

t – variável independente (tempo)

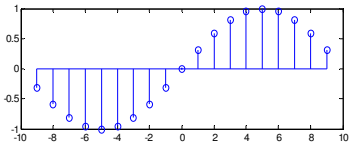
f – frequência

ϕ - desfasamento

A – Amplitude



$x(n)=A\sin(2\pi fn/F_a+\phi)$



F_a – frequência de amostragem

Revisão de Números Complexos

- Qual o resultado de: $X^2 + 1 = 0$
  - $X^2 = -1 \therefore X = \sqrt{-1}$
- Número imaginário(i ou j)
  - $I^2 = -1 \therefore i = \sqrt{-1}$
  - Solução: X = i
- Potências de i:

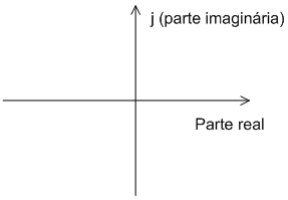
$$i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$$
$$i^1 = i \qquad i^5 = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$$
$$i^3 = -i \qquad i^7 = -i$$

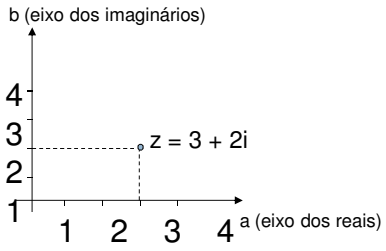
Revisão de Números Complexos

19

- Corpo dos números Complexos: a+bj (a – parte real, b – parte imaginária).
- Ex: z=3+2i

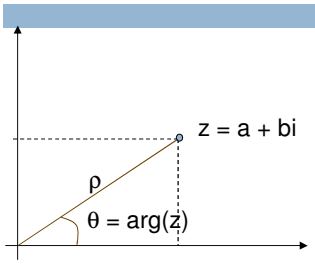
Plano de Argand-Gauss

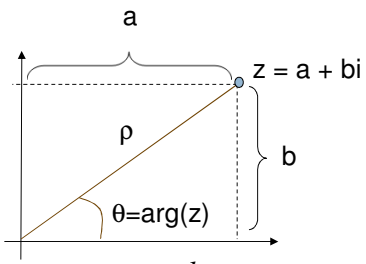




Revisão de Números Complexos – Módulo e Fase

20





$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Revisão de Números Complexos – Forma Polar: Módulo e Fase

- Como:

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \therefore b = \rho\sin\theta \qquad z = a + bi$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \therefore a = \rho\cos\theta \qquad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- Pelas formulas de Euler: $z = \rho e^{j\theta}$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Revisão de Números Complexos – formas polar e cartesiana

- Conversão de:
  - Cartesina-polar $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \arctan\frac{b}{a}$
  - Polar-cartesiana $a = \rho\cos\theta$ $b = \rho\sin\theta$
- Operações:
  - Adição (forma cartesiana):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

  - Multiplicação (forma polar):

$$z_1 * z_2 = (\rho_1 e^{j\theta_1}) * (\rho_2 e^{j\theta_2}) = \rho_1 * \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Sinais Básicos

- Exponencial Complexa

$$x(t) = C\, e^{at}$$

Sendo C e a constantes complexas:

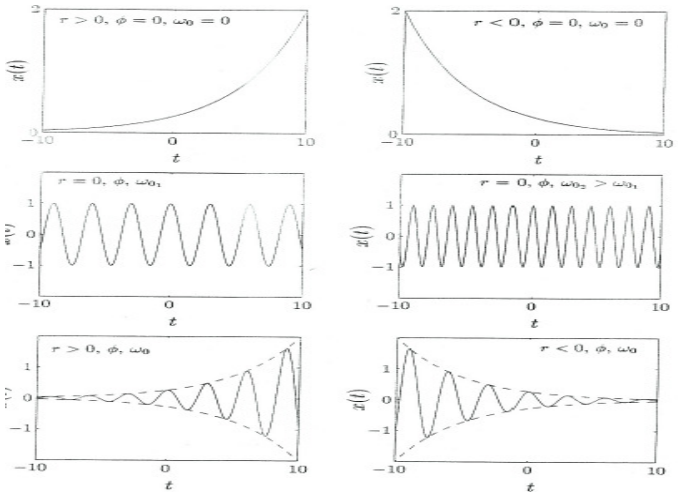
$$C = A\, e^{j\phi} \qquad a = r + jw_0$$

$$x(t) = A\, e^{j\phi} e^{rt} e^{jw_0 t} = A\, e^{rt} e^{j(w_0 t + \phi)}$$

No caso particular de r=0 e a=jw_0

$$x(t) = A\, e^{jw_0 t} = A\left[\cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)\right]$$

Exponencial Complexa Contínua



Sinais Básicos

- Exponencial Complexa para sinais discretos

$$x(n) = Ce^{\beta n}$$

Sendo C e β constantes complexas: $w_0 = 2\pi \frac{f_0}{F_a}$

$$C = A e^{j\phi} \qquad \beta = r + jw_0$$

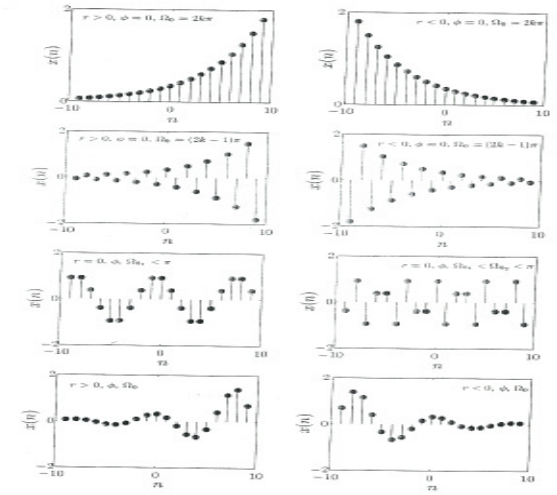
$$x(n) = A e^{rn} e^{j(w_0 n + \phi)}$$

No caso particular de r=0 e $\beta = j\Omega_0$

$$x(n) = A e^{j\Omega_0 n / F_a} = A[\cos(\Omega_0 n / F_a) + j \sin(\Omega_0 n / F_a)]$$

$$x(n) = A e^{j2\pi f_0 / F_a} A[\cos(2\pi f_0 n / F_a) + j \sin(2\pi f_0 n / F_a)]$$

Exponencial Complexa Discreta

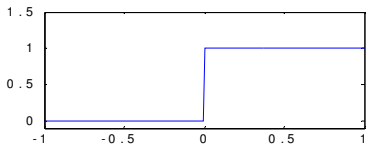


Sinais Básicos

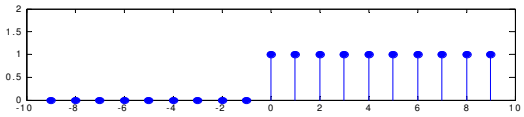
- Degrau Unitário

Função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ 1 & ; \quad t > 0 \end{cases}$$



$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

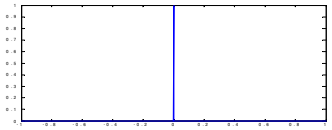


Sinais Básicos

- Impulso Unitário

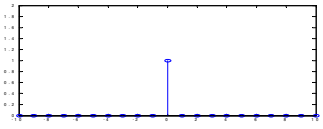
Impulso de Dirac δ(t)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$



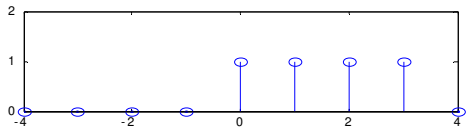
- Impulso Unitário

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

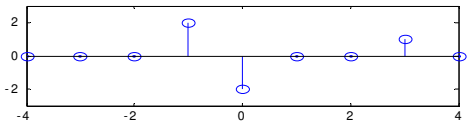


Exemplos de Sinais

- x[n]=u[n]-u[n-4]



- v[n]=2δ[n+1]-2δ[n]+δ[n-3]



CAPÍTULO 2 - SISTEMAS

Sistemas

- O que é um sistema.
- Modelo de um Sistema
  - Diagrama de blocos
  - Modelo Físico/Matemático
- Propriedades dos Sistemas
  - Contínuo/discreto
  - Sem memória ou Instantâneo
  - Invertível
  - Linear/Não Linear
  - Invariante no tempo/Variante no tempo
  - Causal/Não causal
  - Estável/Não estável
  - Múltiplas entradas

O que é um sistema

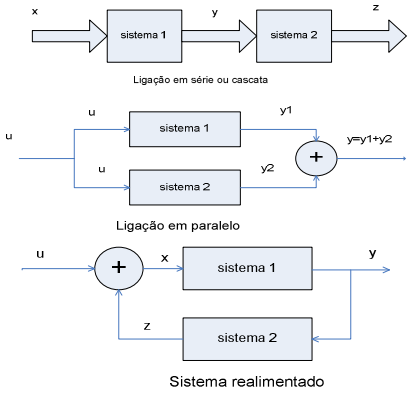
- Pode ser visto como "*uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo.*" *Lourtie, Isabel.*
- Por exemplo:
  - uma resistência eléctrica pode ser vista como um elemento de um sistema que é um circuito eléctrico.
  - Um leitor de CD's pode ser visto como um sistema composto por diversos elementos (gaveta, laser, motor, etc...). Esse sistema devolve a informação contida no CD quando lhe é dado um sinal de comando para efectuar a leitura, numa determinada pista, e…
  - Esse leitor de CD's pode ser um elemento de um outro sistema que é o computador. É o computador que dá ordem ao leitor de CD's para efectuar a leitura e recebe a informação contida no CD.
  - Os Engenheiros que projectam o computador não tem necessidade nem tempo para estudar em detalhe o funcionamento interno do leitor de CD's, apenas precisam de saber qual a sua interacção com o PC. *O leitor de CD's é para eles uma* ***caixa preta.***

Caixa Preta

- O conceito de caixa preta é essencial para uma abordagem sistémica à resolução de problemas de maior dimensão.
- A caixa preta representa o comportamento de um elemento através da sua relação *entrada/saída*. Esta relação exprime um comportamento *causa/efeito*.
- Essa caixa preta ou relação entrada/saída ou ainda causa/efeito, pode ser representada por um diagrama de blocos do elemento.

Diagrama de Blocos

- As interligações dos diagramas de blocos de diversos elementos permitem especificar as interligações dos elementos/sistemas respectivos.



Modelo de Sistema

- Um fenómeno físico baseado em hipóteses simplificadas pode ser descrito por um modelo. Esse modelo pode ser um modelo matemático que representa as relações das diversas variáveis de entrada com a saída do modelo.
- Assim, a referida 'caixa preta' ou bloco é descrita pelo **modelo** do sistema que relaciona as entradas com as saídas.
- Por exemplo: um modelo que representa o sistema 'Resistência eléctrica' que tem à entrada um tensão v(t), e à saída uma corrente i(t), será i(t)=v(t)/R.

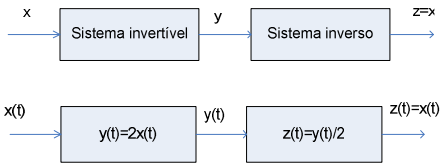
Propriedades dos Sistemas

- Contínuo/Discreto
  - Sistema contínuo tem na entrada e saída sinais contínuos.
  - Sistema discreto tem na entrada e saída sinais discretos.
- Sem Memória ou Instantâneo
  - Um sistema é sem memória (instantâneo) quando a saída num dado instante depende da entrada apenas nesse instante de tempo.
  - Por exemplo: uma resistência é um sistema sem memória, i(t)=v(t)/R, já um condensador é um sistema com memória

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

Propriedades dos Sistemas

- Invertibilidade
  - Um sistema é invertível quando a partir da sua saída se pode determinar a sua entrada.



- Linearidade
  - Um sistema linear possui a propriedade da sobreposição.
  - Se um sinal de entrada é a combinação linear de vários sinais, então a saída do sistema é a mesma combinação linear das saídas correspondentes a cada uma das entradas individuais.

Propriedades dos Sistemas

- Linearidade

$T[x_1(t)] = y_1(t)$
$T[x_2(t)] = y_2(t)$
O sistema é linear se:
$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$

$T[x_1(n)] = y_1(n)$
$T[x_2(n)] = y_2(n)$
O sistema é linear se:
$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$

- Ver exemplo para o sistema: y(t)=x(1-t)

$T[x(t)] = y(t) = x(1-t)$
$Sendo$
$T[x_1(t)] = y_1(t) = x_1(1-t)$
$T[x_2(t)] = y_2(t) = x_2(1-t)$
O sistema é linear se:
$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$
$Ora:$
$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$
$ay_1(t) + by_2(t) = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$
Como a igualdade se verifica, o sistema é linear

Propriedades dos Sistemas

- Invariante no tempo
  - Um sistema é invariante no tempo quando uma deslocação no tempo no sinal de entrada conduz à mesma deslocação no tempo no sinal de saída.

$$T[x(t)] = y(t)$$
$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

$$T[x(n)] = y(n)$$
$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

  - Ver exemplo do sistema:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

$$T[x(n)] = y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

Verificar a igualdade

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n-n_0)$$

$$y(n-n_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} x(n-n_0)$$

São diferentes, logo não é invariante no tempo

Propriedades dos Sistemas

- Causal / Não Causal
  - Um sistema é causal quando o sinal de saída depende apenas do presente ou do passado do sinal de entrada.
  - Um sistema causal é não antecipativo. É causa de um acontecimento passado.
  - Um sistema sem memória é sempre causal.
  - Exemplo de sistemas não causais: processamento de dados previamente gravados, processamento de imagens, etc…
    y(n)=x(n)-x(n+1)

Propriedades dos Sistemas

- Estabilidade
  - Um sistema é estável quando uma entrada limitada dá origem a uma saída limitada.
  - Um sistema do tipo y(n)=nx(n) é instável.
  - Um sistema integrador é um sistema instável, pois se na sua entrada estiver um degrau unitário, o seu integral é ilimitado.

Propriedades dos Sistemas

- Sistema de múltiplas entradas/saídas
  - Um sistema com várias entradas/saída designa-se de multivariável.
  - Um sistema com uma só entrada e uma só saída é um sistema univariável.
  - Em SS só vamos estudar sistemas univariável.

43

CAPÍTULO 3 – SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO (LIT)

SS

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

44

- O que são Sistemas LIT
- Resposta impulsional
- Convolução
  - Somatório de Convolução
  - Integral de Convolução
- Propriedades da Convolução
  - Comutativa
  - Associativa
  - Distributiva

JPT

SS

Sistemas LIT (recordando)

- Linear
  - Um sistema linear possui a propriedade da sobreposição.
  - Se um sinal de entrada é a combinação linear de vários sinais, então a saída do sistema é a mesma combinação linear das saídas correspondentes a cada uma das entradas individuais.

$$T[x_1(t)] = y_1(t)$$
$$T[x_2(t)] = y_2(t)$$
$$O \text{ sistema é linear se:}$$
$$T[a x_1(t) + b x_2(t)] = a y_1(t) + b y_2(t)$$

$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$
$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$
$$O \text{ sistema é linear se:}$$
$$T[a x_1(n) + b x_2(n)] = a y_1(n) + b y_2(n)$$

Sistemas LIT (recordando)

- Invariante no Tempo
  - Um sistema é invariante no tempo quando uma deslocação no tempo no sinal de entrada conduz à mesma deslocação no tempo no sinal de saída.

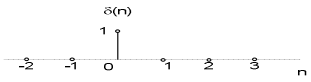
$$T[x(t)] = y(t)$$
$$T[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

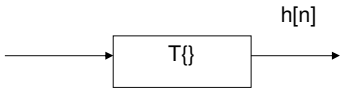
$$T[x(n)] = y(n)$$
$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

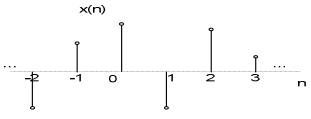
Resposta Impulsional

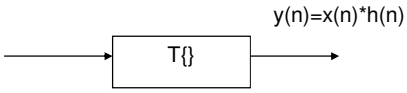
- Qualquer sinal pode ser representado com base em impulsos unitários.
- Se se conhecer a resposta de um sistema LIT ao impulso unitário, então é possível determinar a sua resposta a qualquer sinal de entrada.
- Esta resposta permite descrever univocamente o sistema LIT.
- É A RESPOSTA IMPULSIONAL h(t) ou h(n).

Resposta impulsional





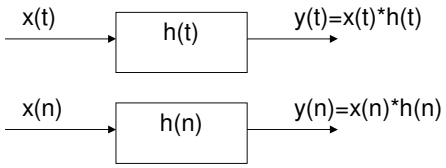




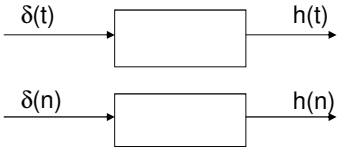
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\delta(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k)$$

Sistemas LIT



- Em que * é a operação CONVOLUÇÃO
- Em que



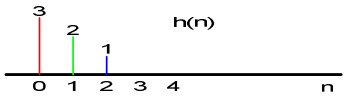
Convolução Discreta
Somatório de Convolução

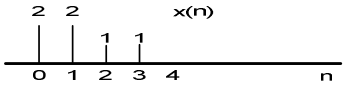
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k)$$
$$= x(n) * h(n)$$

- * - Representa a convolução
- Para se obter y(n) no instante n:
  1. Determinar o sinal reflexo de h(k) em relação à origem z(k)=h(-k)
  2. Atrasar o sinal z(k) de n unidades w(k)=z(k-n)=h(n-k)
  3. multiplicar ponto por ponto h(n-k) pela entrada x(k)
  4. somar todos os resultados das multiplicações anteriores.

Convolução Linear

- y(n)=x(n)*h(n)



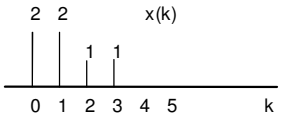


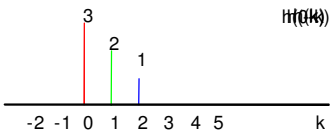
Comprimento M=3 Comprimento L=4

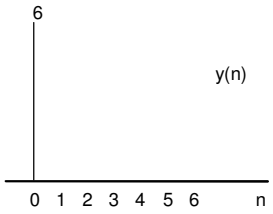
Convolução Linear

Para n=0 y(0)=2x3=6

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



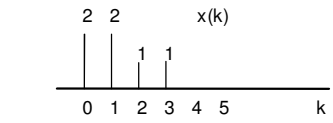


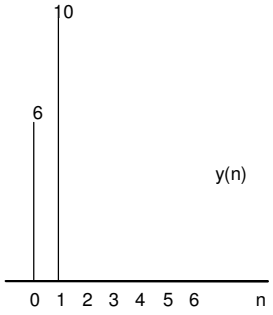


Convolução Linear

Para n=1 y(1)=2x2+2x3=10

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

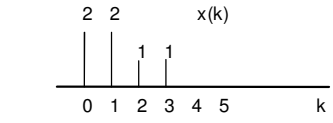


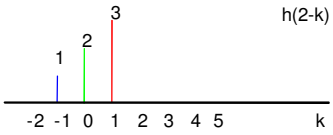


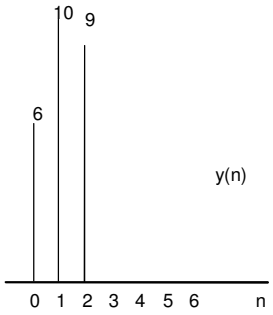
Convolução Linear

Para n=2 y(2)=2x1+2x2+1x3=9

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



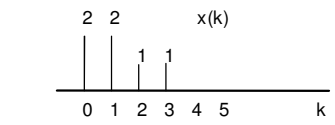


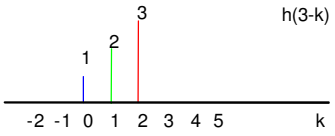


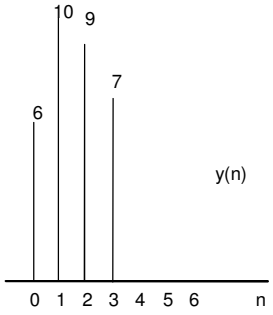
Convolução Linear

Para n=3 y(3)=2x1+1x2+1x3=7

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



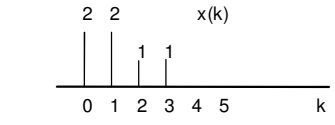


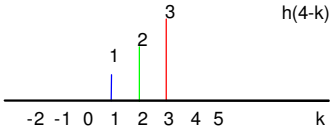


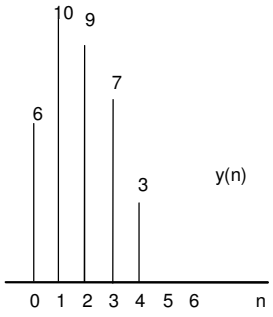
Convolução Linear

Para n=4 y(4)=1x1+1x2=3

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



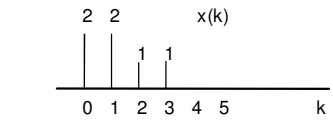


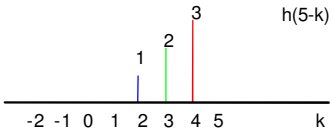


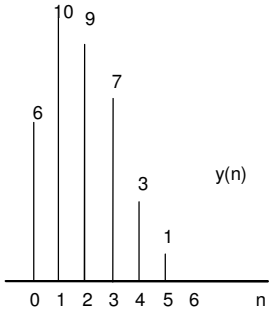
Convolução Linear

Para n=5 y(5)=1x1=1

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



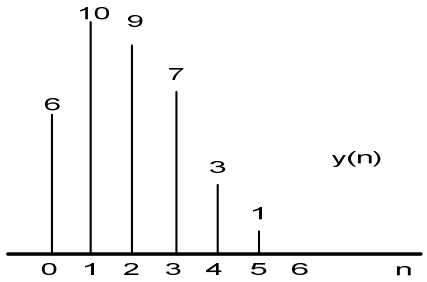




Convolução Linear

Comprimento de y(n) N=L+M-1=6

L – comprimento de x(n)
M – comprimento de h(n)



Convolução Contínua
Integral de Convolução

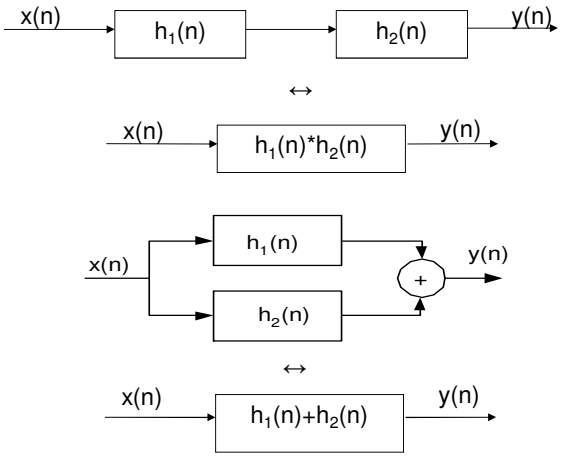
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$
$$= x(t) * h(t)$$

- * - Representa a convolução
- Determinação de y(t):
  - Em x(t) substitui-se t por τ
  - Em h(t) substitui-se t por $t-\tau$
  - Resolve-se o integral em ordem a τ

Propriedades da Convolução

- Comutativa
  - $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$
  - $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$
- Associativa
  - $x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$
  - $x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$
- Distributiva
  - $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$
  - $x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

Propriedades da Convolução



Jean-Baptiste Joseph Fourier

Nascimento: 21 de março de 1768 Auxerre
Morte: 16 de maio de 1830 (62 anos) Paris
Residência: França
Nacionalidade: Francês
Áreas: Física, Matemática
Instituições: Escola Normal Superior de Paris, École Polytechnique
Alma mater: Escola Normal Superior de Paris
Orientador(es): Joseph-Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, Gaspard Monge
Orientado(s): Gustav Dirichlet, Giovanni Plana, Claude Louis Marie Henri Navier
Conhecido(a) por: Série de Fourier, Transformada de Fourier, Lei de Fourier

CAPÍTULO 4 – SÉRIE DE FOURIER

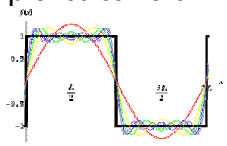
Série de Fourier em Tempo Contínuo

- Quando e para que se usa?
- Formas da Série de Fourier
  - Forma Exponencial
  - Forma Trigonométrica Combinada
  - Forma Trigonométrica
- Determinação dos Coeficientes de Fourier
- Espectro de Frequências
- Efeitos de Simetria
  - Par
  - Impar
- Propriedades
- Forma Exponencial por derivação

Série de Fourier em Tempo Contínuo

- É usada para expressar sinais periódicos complexos como a soma de sinais mais simples.

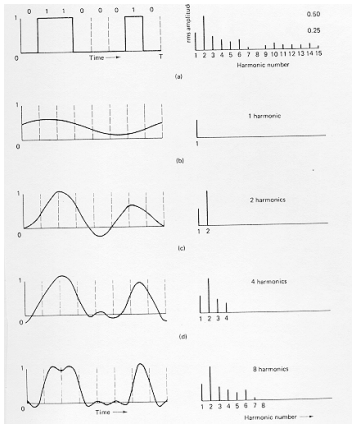
  Os sinais mais simples são sinusóides.



- Os sinais periódicos têm as seguintes propriedades:
  - existem indefinidamente no tempo
  - um sinal periódico com período **T** também é periódico com período **nT** (em que n é inteiro)
  - O valor mínimo de **T**>0 que satisfaça x(t)=x(t+**T**) é o *período fundamental* $\mathbf{T_0}$.
  - *Frequência fundamental*

$$w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Exemplo de Reconstrução de um Sinal pela soma dos seus Harmónicos



Formas da Série de Fourier

- Forma Exponencial da Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkw_0 t} \qquad C_k = C_{-k}^{*}$$

- a frequência kw_0 é a frequência do harmónico de ordem k.
- C_k são os coeficientes de Fourier
- Normalmente C_k é um complexo. Nesses casos, C_{-k} é o conjugado de C_k.

$$C_k = |C_k| e^{j\theta_k}$$

Formas da Série de Fourier

- Forma Trigonométrica Combinada da Série de Fourier

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,|C_k| \cos\left(k w_0 t + \theta_k\right)$$

- Forma Trigonométrica da Série de Fourier

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k w_0 t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(k w_0 t\right)$$

- A_k e B_k são também os coeficientes da Série de Fourier

Coeficientes de Fourier

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk w_0 t} dt$$

$$2 C_k = A_k - j B_k$$

$$A_k = 2\,\mathrm{Re}[C_k]$$
$$B_k = -2\,\mathrm{Im}[C_k]$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k w_0 t)\, dt$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k w_0 t)\, dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

C_0 é o Valor médio

Como $A_0=C_0$

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

Espectro de Frequências

- As formas exponencial e combinada são as mais úteis.
- Os coeficientes da forma exponencial são mais fáceis de determinar.
- As amplitudes dos harmónicos são determinadas directamente da forma combinada
- As amplitudes dos harmónicos são $2|C_k|$.
- A amplitude dc é apenas C_0
- O espectro de frequências mostra em função da frequência:
  - as amplitudes, $2|C_k|$ - espectro de amplitudes
  - e as fases, arg de C_k - espectro de fases

Efeitos de Simetria

- Simetria Par
  - Para um sinal x(t) com simetria par:

$$A_0 = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt$$

$$A_k = \frac{4}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(k w_0 t)\,dt$$

$$B_k = 0$$
$$C_0 = A_0$$
$$C_k = \frac{A_k}{2}$$

Efeitos de Simetria

- Simetria Impar
  - Para um sinal x(t) com simetria ímpar:

$$A_0 = 0$$

$$A_k = 0$$

$$B_k = \frac{4}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}} x(t) sen(k w_0 t) dt$$

$$C_0 = 0$$

$$C_k = -j \frac{B_k}{2}$$

Propriedades da Série de Fourier

- …
- A série de Fourier da soma de várias funções periódicas é igual à soma das séries de Fourier de cada função, desde que a soma das funções seja ainda uma função periódica.

  Ou seja:

$$S(a(t) + b(t)) = S(a(t)) + S(b(t))$$

  Se a(t)+b(t) for ainda periódica

Determinação da Forma Exponencial por Derivação

- Ora

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkw_0 t}$$

- As suas derivadas são:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jkw_0 C_k e^{jkw_0 t}$$

$$x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jkw_0)^2 C_k e^{jkw_0 t}$$

$$\ldots$$

$$x^{(p)}(t) = \frac{d^{(p)}x}{dt^{(p)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jkw_0)^p C_k e^{jkw_0 t}$$

- E o seu desenvolvimento em série de Fourier:

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{jkw_0 t}$$

C' é o coeficiente do sinal derivado

$$x''(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C''_k e^{jkw_0 t}$$

$$\ldots$$

$$x^{(p)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C^{(p)}_k e^{jkw_0 t}$$

Determinação da Forma Exponencial por Derivação

- Por comparação dos coeficientes C_k e suas derivadas:

$$C_k^{(p)} = (jkw_0)^p C_k$$

portanto:

$$C_k = \frac{C_k^{(p)}}{(jkw_0)^p}$$

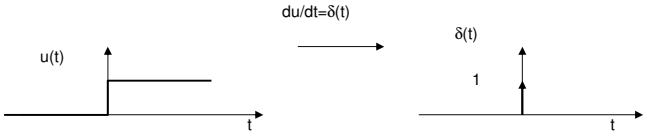
- Ou mais simplesmente:

$$C_k = \frac{C'}{(jkw_0)}$$

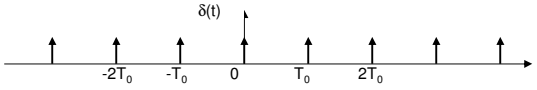
- Em que C' é o coeficiente do sinal derivado

Forma Exponencial por Derivação

- Útil nas situações:



- Série de Fourier de em trem de impulsos



$$C_k = \frac{1}{T_0}$$

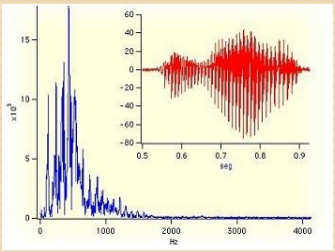
$$\delta(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkw_0 t}$$

Transformadas

- Transformada de Fourier em Tempo Contínuo (Sinais contínuos no Tempo) (SS)
- Transformada de Laplace (Sinais contínuos no tempo) (SS)
- Transformada de Fourier (Sinais discretos) (PDS)
- Transformada Discreta de Fourier (Sinais discretos) (PDS)
- Transformada Z (Sinais discretos) (PDS)

Transformadas

Nome	Natureza do sinal original	Natureza do domínio transformado
Série de Fourier	Contínuo e periódico	Espectro de riscas
Transformada de Fourier (FT)	Contínuo não-periódico	Frequências Contínuas de -∞ a +∞
Transformada de Laplace	Contínuo não-periódico	s
Transformada de Fourier (DTFT)	Discreto	Frequências Contínuas de -π +π
Transformada de Fourier (DFT)	Discreto	Discreto
Transformada z	Discreto	z



Aplicações da análise de Fourier:
Hoje a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas. Além de ser utilizada extensivamente em cálculo numérico nas áreas mais diversas das ciências aplicadas e engenharias, a análise de Fourier constitui ainda a base do processamento de sinais. Tem por isso um papel central nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais. Como curiosidades: é utilizando análise de Fourier que se retira a voz das canções para fazer karaoke e também que se faz a compressão de imagens em formato JPEG.

CAPÍTULO 5 – TRANSFORMADA DE FOURIER EM TEMPO CONTÍNUO

Transformada de Fourier em Tempo Contínuo

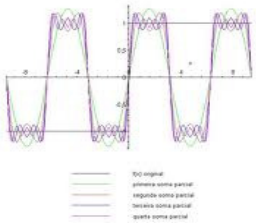
79

- Definição
- Formula da Transformada de Fourier
- Transformada Inversa de Fourier
- Propriedades da Transformada de Fourier
  - Linearidade
  - Escalonamento no Tempo
  - Deslocamento no tempo
  - Transformação no Tempo
  - Dualidade
  - Convolução
  - Multiplicação
  - Deslocamento nas frequências
  - Derivação no tempo
  - Integração no tempo
  - Derivação na Frequência

Transformada de Fourier em Tempo Contínuo

80

- É usada para representar um sinal <u>não-periódico</u> de tempo contínuo como uma sobreposição de sinusóides complexas.



- Esta representação no domínio das frequências envolve um <u>contínuo de frequências</u> desde <u>-∞ a +∞</u>.

Transformada de Fourier (FT)

$$F\{f(t)\} = F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt}\, dt$$

- Transformada Inversa de Fourier

$$F^{-1}\{F(jw)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jw) e^{jwt}\, dw$$

- Par de Transformadas $f(t) \leftrightarrow F(jw)$

Condições para que exista FT

- Condições de Dirichlet (condições suficientes mas não necessárias):
  1. Num intervalo finito
     a) f(t) é limitada
     b) f(t) tem um número finito de máximos e mínimos
     c) f(t) tem um número finito de descontínuidades
  2. f(t) é absolutamente integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- Condição suficiente:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Propriedades da FT

- Linearidade

  Para um dado par de transformadas

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(jw)$$
$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(jw)$$

então

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(jw) + bF_2(jw)$$

- Escalonamento no Tempo

$$f(t) \leftrightarrow F(jw)$$

então

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{w}{a}\right)$$

Propriedades da FT

- Deslocamento no Tempo

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(jw)e^{-jwt_0}$$

- Transformação no Tempo

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{w}{a}\right)e^{-j\frac{w}{a}t_0}$$

Propriedades da FT

- Dualidade

dada a semelhança das transformada e transformada inversa

$$F\{f(t)\} = F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

$$F^{-1}\{F(jw)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)e^{jwt}dw$$

Então

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$$

Se a função matemática f(t) tem transformada de Fourier F(jw), então

$$F(jw)\Big|_{w=t} = F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$$

Propriedades da FT

- Convolução

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(jw)$$
$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(jw)$$

então

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(jw)F_2(jw)$$

- Multiplicação

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(jw) * F_2(jw)$$

Propriedades da FT

- Deslocamento nas Frequências

$$f(t)e^{jw_0 t} \leftrightarrow F(j(w - w_0))$$

- Derivação no Tempo

$$f(t) \leftrightarrow F(jw)$$

então

$$\frac{d[f(t)]}{dt} \leftrightarrow jwF(jw)$$

genericamente

$$\frac{d^n[f(t)]}{dt^n} \leftrightarrow (jw)^n F(jw)$$

Propriedades da FT

- Integração no Tempo

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{jw}F(jw) + \pi F(0)\delta(w)$$

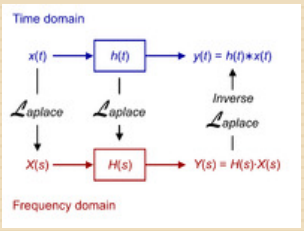
- Derivação na Frequência

$$f(t) \leftrightarrow F(jw)$$

então

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n[F(jw)]}{dw^n}$$

Pierre-Simon Laplace



89

CAPÍTULO 6 – TRANSFORMADA DE LAPLACE

Transformada de Laplace

- Definição da TL
- Polos e zeros da função de transferência
- Região de Convergência
  - Definição
  - Propriedades
- Transformada Inversa
  - Método da decomposição em frações parciais
- Propriedades

Transformada de Laplace

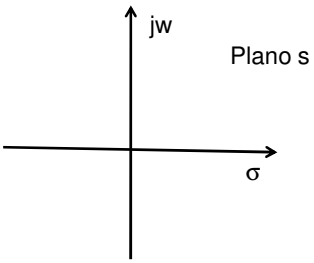
- É uma generalização da TF
- Há alguma semelhança com a Tz para sinais discretos

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Plano s

$$s = \sigma + jw$$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$



Transformada de Laplace

- Quando s=jw (σ=0)

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

- Que corresponde à TF de x(t)

$$X(s)\Big|_{s=jw} = F\{x(t)\}$$

Transformada de Laplace – Polos e Zeros

- Quando a TL é expressa na forma racional (sempre que x(t) seja uma combinação linear de exponenciais reais ou complexos e equações diferenciais de coeficientes constantes):

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

- N(s)=0 ⟶ zeros da TL ⟶X(s)=0
- D(s)=0 ⟶ polos da TL ⟶X(s)=∞

- A ROC mais os polos e zeros caracterizam, a menos de um factor de escala, a expressão algébrica da TL.

Propriedades da ROC

1. A ROC é uma faixa paralela ao eixo jw no plano s.
2. A ROC não contém polos.
3. Se x(t) tem duração finita (limitado à esquerda e à direita) e é absolutamente integrável, então a ROC é todo o plano s.
4. Se x(t) é limitado à esquerda (u(t)) então a ROC é limitada à esquerda.
5. Se x(t) é limitado à direita (u(-t)) então a ROC é limitada à direita.
6. Se x(t) não é limitado então a ROC é uma faixa vertical no plano s.
7. Se a TL é racional então a ROC é delimitada pelos polos ou estendida até infinito. Nenhum polo fica dentro da ROC.

Propriedades da ROC

8. (Resultante das propriedades 7, 4 e 5) Se a TL é racional:
   - Se x(t) é limitada à esquerda então a ROC fica à direita do polo mais à direita.
   - Se x(t) é limitada à direita então a ROC fica à esquerda do polo mais à esquerda.

Transformada Inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - jw}^{\sigma + jw} X(s)e^{st}ds$$

- Pode-se recuperar x(t) a partir da sua Transformada de Laplace avaliada para o conjunto de valores s=σ+jw na ROC, com σ fixo e w a variar de –∞ a +∞ .
- O contorno de integração é a faixa vertical do plano s correspondente a todos os pontos em que Re{s}=σ.
- A avaliação formal deste integral obriga a que se determine o integral em todo o contorno de integração do plano s.

Transformada Inversa de Laplace

- Para as TL racionais a inversa pode ser determinada sem avaliar a equação do integral, usando a técnica da expansão em frações parcial.
- Basicamente consiste em expandir a expressão algébrica racional numa combinação linear de termos de menor ordem, dos quais se conhece a transformada inversa.

Transformada Inversa de Laplace – pela expansão parcial

- Assumindo que o denominador é de maior ordem que o numerador e que não se consideram polos de ordem múltipla:

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}$$

- A ROC de cada termo pode ser inferida da ROC de X(s).
- Finalmente, a TL^{-1} de cada termo pode ser determinada por comparação.

Transformada Inversa de Laplace – pela expansão parcial

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \qquad \sigma < -a$$

- Se a ROC é o lado direito de $s=-a_i$ então a TL^{-1} será

$$A_i e^{-a_i t} u(t)$$

- Se a ROC é o lado esquerdo de $s=-a_i$ então a TL^{-1} será

$$-A_i e^{-a_i t} u(-t)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Sendo:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{com } ROC = R$$
$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) \quad \text{com } ROC = R_1$$
$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s) \quad \text{com } ROC = R_2$$

- Linearidade

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{L} a X_1(s) + b X_2(s)$$

- Com a ROC a conter a intercepção de R1 com R2
- Se R1 e R2 não se interceptarem a ROC é um conjunto vazio e portanto não há TL.
- O cancelamento de polos pode levar à extensão da ROC.

Propriedades da Transformada de Laplace

- Deslocamento no Tempo

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0}X(s) \quad \text{com ROC=R}$$

- Deslocamento em s

$$x(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{L} X(s-s_0) \quad \text{com ROC=R+Re\{s\}}$$

- Escalonamento no Tempo

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{com ROC = aR}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Conjugação

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*) \quad \text{com ROC = R}$$

$$Se\ x(t)\ for\ real \quad X(s)=X^*(s^*)$$

- Convolução

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s).X_2(s)$$

$$Com \quad ROC = R_1 \bigcap R_2$$

  - A ROC pode ser maior se houver cancelamento de polos.

Propriedades da Transformada de Laplace

- Derivação no Tempo

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} s.X(s) \quad \text{com ROC=R}$$

  - A ROC pode ser maior se esta for limitada por um polo em s=0 que será cancelado pela multiplicação por s.

- Derivação em s

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{com ROC=R}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Integração no Tempo

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) \quad \text{com ROC=R} \cap \{\text{Re}\{s\}>0\}$$

- Teorema do Valor Inicial

  Se x(t)=0 para t<0 e x(t) não contém nenhum impulso ou singularidade na origem então

$$x(o^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

  x(t) quando t->∞ a a partir de valores positivos

Propriedades da Transformada de Laplace

- Teorema do Valor Final

  Se x(t)=0 para t<0, e se x(t) tem limite finito quando t->∞

  então

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$