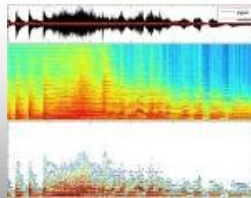


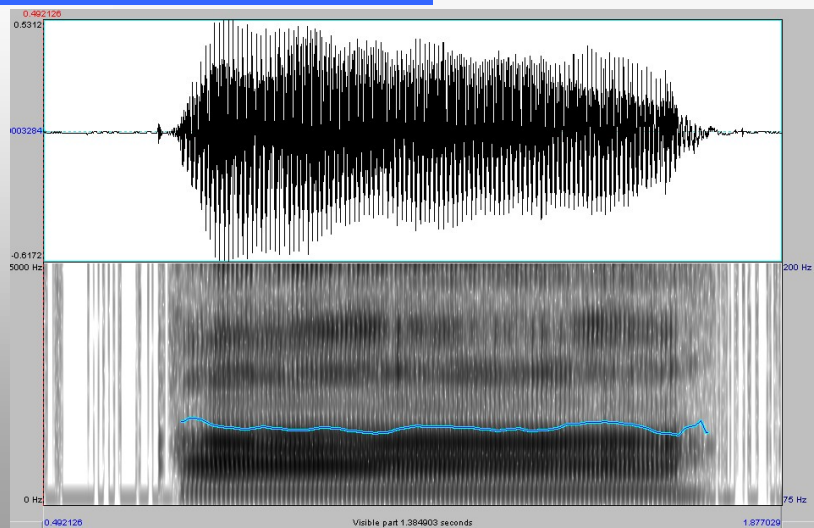
Engenharia Biomédica

Processamento de Sinal



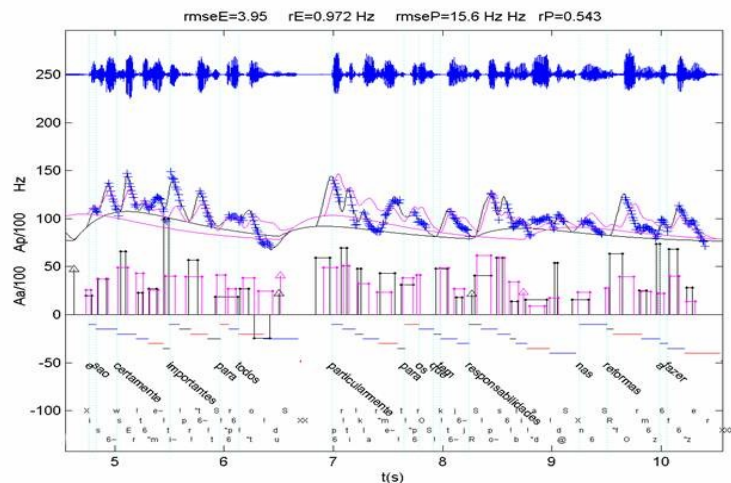
João Paulo Teixeira - JPT

Sinais de Fala



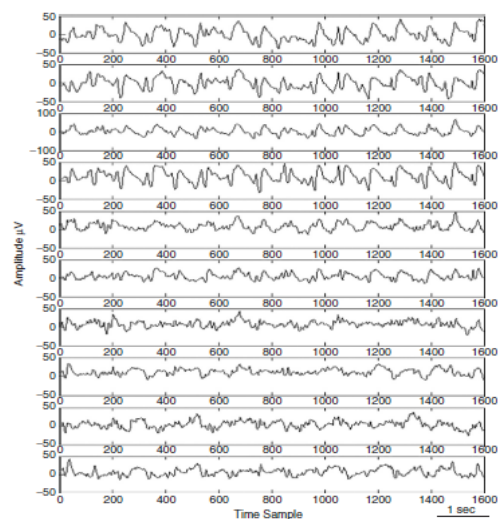
JPT - PS

Sinais de Fala



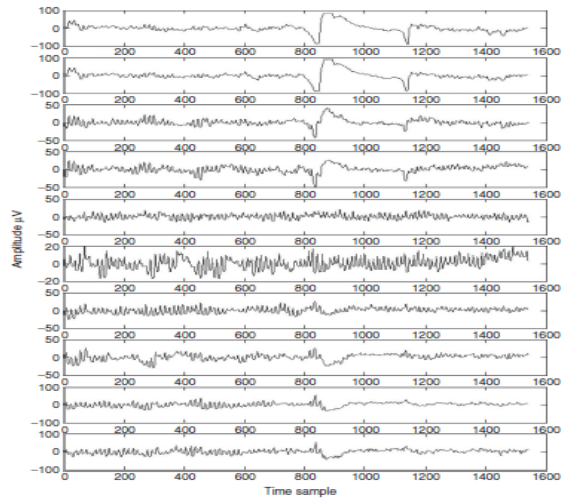
JPT - PS

EEG



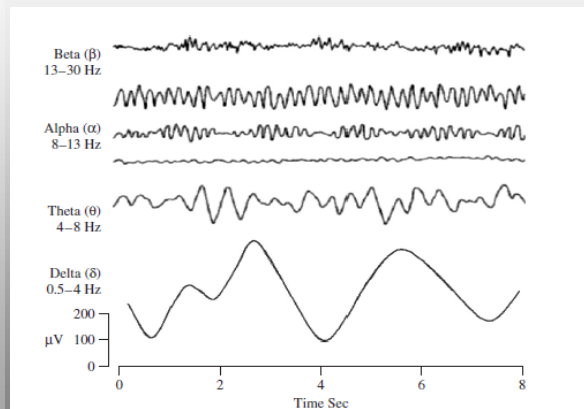
JPT - PS

EEG



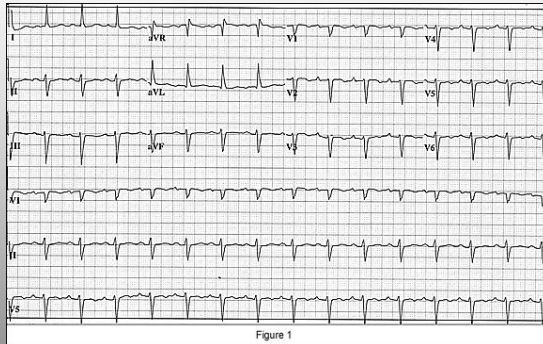
JPT - PS

EEG

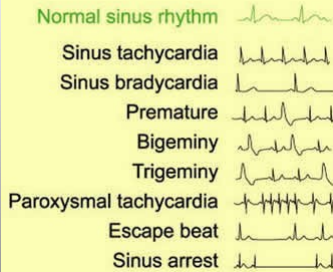


JPT - PS

ECG

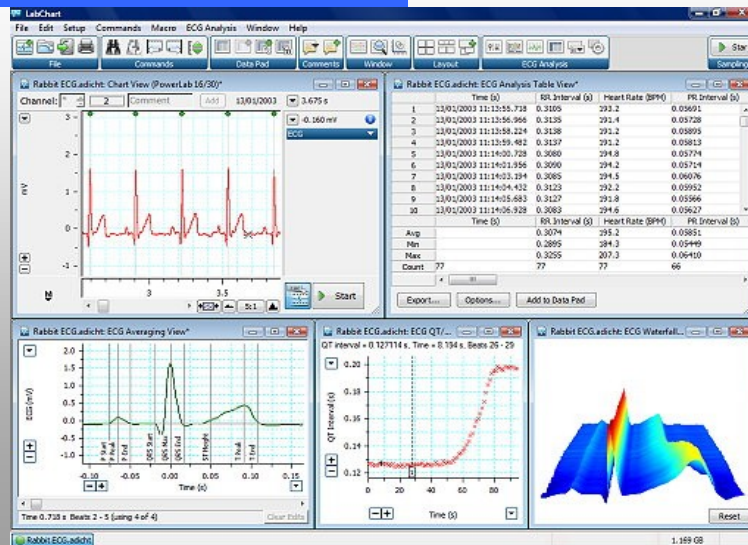


Capture 8 Heart Syndromes just within 30 seconds!



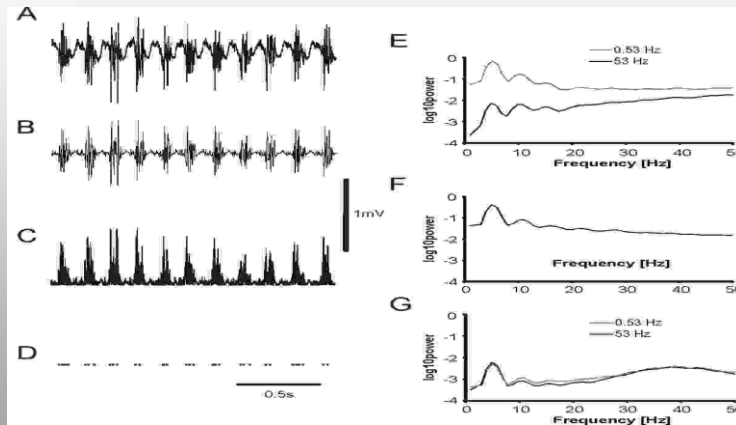
JPT - PS

ECG



JPT - PS

EMG



JPT - PS

Sinais

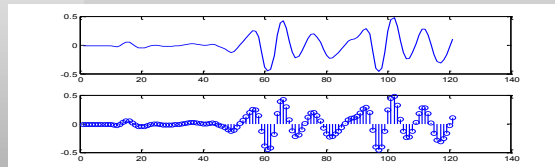
- Distinguir sinais contínuos de sinais discretos.
- Operações sobre sinais:
 - Escalonamento na amplitude;
 - Escalonamento no tempo;
 - Reflexão;
 - Deslocamento;
 - Regra de precedência para deslocamento e escalonamento no tempo
 - Adição e subtração de sinais;
- Propriedades de sinais:
 - Pares
 - Ímpares
 - Periodicidade
- Exemplos de Alguns Sinais:
 - Sinusoidal
 - Exponencial complexo
 - Degrau unitário
 - Impulso unitário

JPT - PS

Sinais

- Sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação acerca do comportamento e características de determinados fenómenos físicos. São representados matematicamente como função de uma ou mais variáveis independentes.

- Contínuo/Discreto**



- $x(t) = A \sin(2\pi f t)$ - contínuo - O domínio é um subconjunto dos números reais;
 - $x(n) = A \sin(2\pi f n / F_a)$; - discreto - O domínio é um subconjunto dos números inteiros;
- Em ambos os casos o contradomínio pode ser contínuo ou discreto.

JPT - PS

Sinais Discretos por amostragem de Sinais Contínuos

- Sinal discreto por amostragem de um sinal contínuo:

$$x(n) = x_a(nT_a),$$

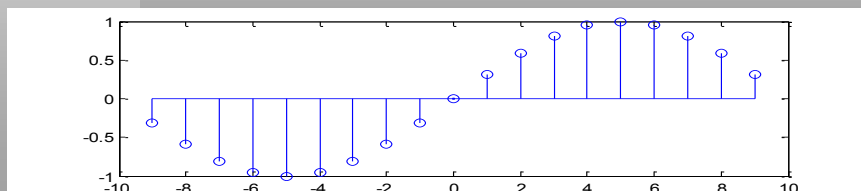
- T_a - período de amostragem

- $F_a = 1/T_a$ - Frequência de amostragem

- Representação gráfica de um sinal discreto:

$$x(n) = A \sin(2\pi f n / F_a);$$

$$-\infty < n < \infty$$



JPT - PS

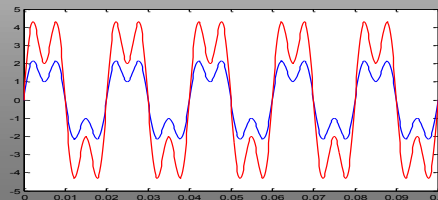
Operações Sobre Sinais

- **Escalonamento da amplitude**
Operação sobre a variável dependente.

Ex: $y(t) = a \cdot x(t)$

$y(n) = a \cdot x(n)$

$y(t) = 2x(t)$



JPT - PS

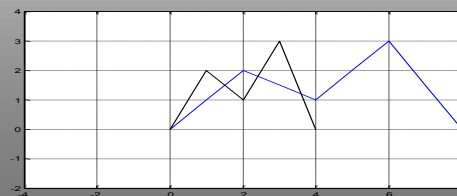
Operações Sobre Sinais

- **Escalonamento no tempo**
Operação sobre a variável independente.

Ex: $y(t) = x(a \cdot t)$ - a real positivo

$y(n) = x(a \cdot n)$ - a inteiro positivo

$y(t) = x(2t)$



JPT - PS

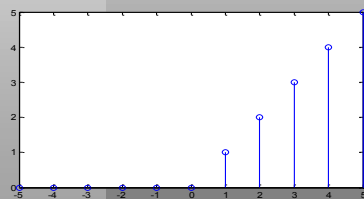
Operações Sobre Sinais

- **Reflexão** (caso particular de escalonamento no tempo com $a=-1$) (ESPELHO)

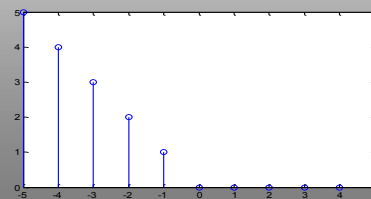
$$y(t)=x(-t)$$

$$y(n)=x(-n)$$

$x(n)$



$y(n)=x(-n)$



JPT - PS

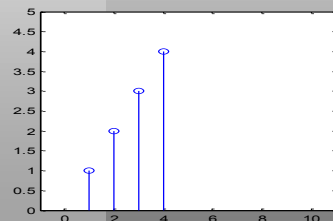
Operações Sobre Sinais

- **Deslocamento**

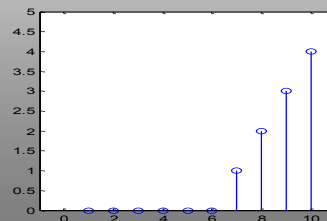
$$y(t)=x(t-t_0)$$

$$y(n)=x(n-n_0)$$

$x(n)$



$x(n-6)$



JPT - PS

Operações Sobre Sinais

- **Regra de Precedência para deslocamento e escalonamento no tempo**
 - Consideremos a relação: $y(t)=x(at-b)$
 - Que satisfaz as seguintes condições: $y(0)=x(-b)$; e $y(b/a)=x(0)$.
 - Para se obter correctamente $y(t)$ a partir de $x(t)$, as operações de deslocamento e escalonamento devem ser realizadas na ordem correcta:

Operações Sobre Sinais

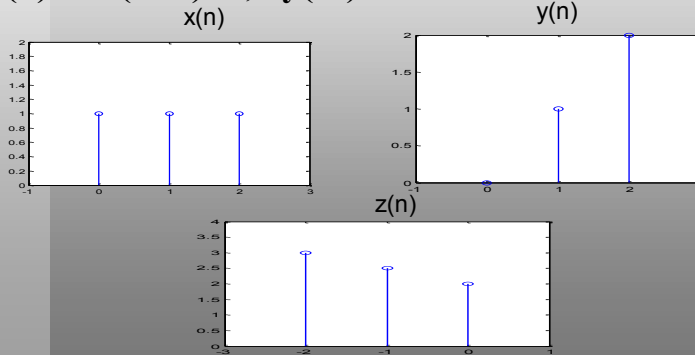
1. operação de deslocamento no tempo, substituindo t por $t-b$:
 - $v(t)=x(t-b)$
 2. escalonamento no tempo (executada em $v(t)$), substituindo t por at :
 - $y(t)=v(at)$
 - Resultando $y(t)=x(at-b)$
- Repare-se que a pode ser -1 denotando uma reflexão.

Operações Sobre Sinais

● Adição e subtracção de sinais

Exemplo:

$$z(n) = 2 \cdot x(n+2) + 0,5 \cdot y(-n)$$



JPT - PS

Propriedades dos Sinais

● Sinal Par

O sinal é par se

$$x(t) = x(-t)$$

$$x(n) = x(-n)$$

● Sinal Ímpar

O sinal é ímpar se

$$x(t) = -x(-t)$$

$$x(n) = -x(-n)$$

JPT - PS

Decomposição de um sinal nas componentes Par e Ímpar

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n)$$

- **Componente Par**

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad x_p(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

- **Componente Ímpar**

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad x_i(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

Propriedades dos Sinais

- **Periodicidade**

Um sinal é periódico se existe um $T > 0$ (ou $N > 0$) tal que

$$x(t) = x(t+T) \qquad T: \text{período}$$

$$x(n) = x(n+N) \qquad N: \text{período}$$

No tempo contínuo um sinal sinusoidal ou um exponencial complexo são periódicos com período $T = 2\pi/\omega_0$.

Periodicidade Para Sinais Discretos

Para o caso sinusoidal:

$$A \cos(\omega_0 n + \theta) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \theta)$$

Requer que

$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{com } k \text{ inteiro}$$

Para o caso exponencial complexo:

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

Requer que

$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{com } k \text{ inteiro}$$

Assim, as sequencias exponencial complexa e sinusoidal não são necessariamente periódicas com período $2\pi/\omega_0$, e dependendo do valor de ω_0 , podem até nunca ser periódicas.

Sinais Básicos

● Sinusoidal

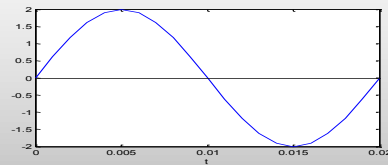
$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

t – variável independente (tempo)

f – frequência

ϕ - desfasamento

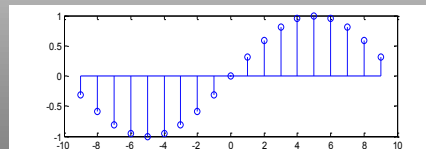
A – Amplitude



● Discreto

$$x(n) = A \sin(2\pi f n / F_a + \phi)$$

F_a – frequência de amostragem



Sinais Básicos

● Exponencial Complexa

$$x(t) = Ce^{at}$$

Sendo C e a constantes complexas:

$$C = Ae^{j\phi} \quad a = r + j\Omega_0$$

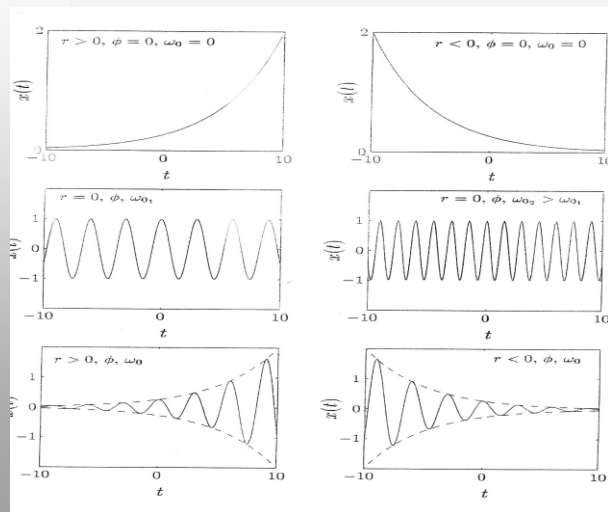
$$x(t) = Ae^{j\phi} e^{rt} e^{j\Omega_0 t} = Ae^{rt} e^{j(\Omega_0 t + \phi)}$$

No caso particular de $r=0$ e $a=j\Omega_0$

$$x(t) = Ae^{j\Omega_0 t} = A[\cos(\Omega_0 t) + j \sin(\Omega_0 t)]$$

JPT - PS

Exponencial Complexa Contínua



JPT - PS

Sinais Básicos

● Exponencial Complexa para sinais discretos

$$x(n) = Ce^{\beta n} \quad w_0 = 2\pi \frac{f_0}{F_a}$$

Sendo C e β constantes complexas:

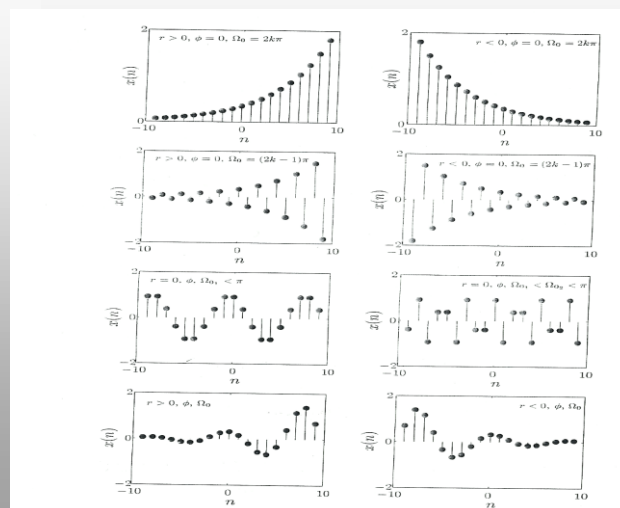
$$C = Ae^{j\phi} \quad \beta = r + jw_0$$

$$x(n) = Ae^{rn} e^{j(w_0 n + \phi)}$$

No caso particular de $r=0$ e $\beta=jw_0$

$$x(n) = Ae^{jw_0 n} = A[\cos(w_0 n) + j \sin(w_0 n)]$$

Exponencial Complexa Discreta



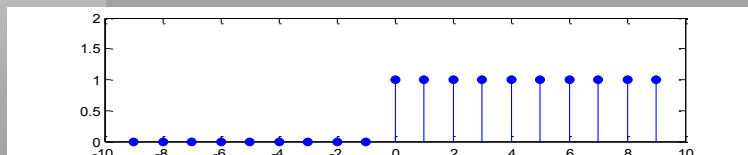
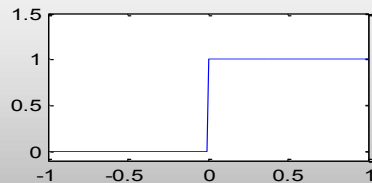
Sinais Básicos

● Degrau Unitário

Função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



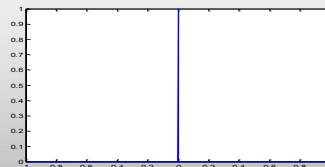
JPT - PS

Sinais Básicos

● Impulso Unitário Contínuo

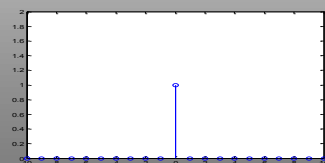
Impulso de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$



● Impulso Unitário Discreto

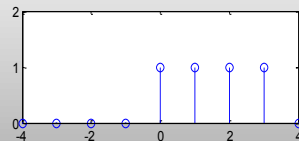
$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



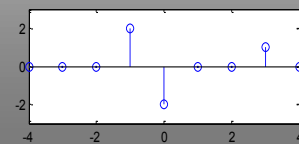
JPT - PS

Exemplos de Sinais

- $x(n) = u(n) - u(n-4)$



- $v(n) = 2\delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-3)$



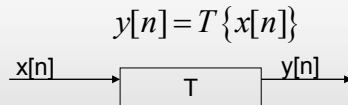
JPT - PS

Sistemas Discretos



JPT - PS

Sistemas Discretos



$h(n)$ – resposta impulsional do sistema (LIT) – é a resposta do sistema à entrada $\delta(n)$.

Exemplos simples de sistemas:

- Sistema de atraso ideal

$$y[n] = x[n - n_a]$$

- Média deslizando

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

Sistemas Discretos

- Podem ser definidos por:

- resposta impulsional $h(n)$ (LIT),

$$h[n] = u[n] - u[n - 10]$$

- Equação às diferenças

$$y[n] = x[n] + 2x[n - 1] + 0.5x[n - 2] \text{ - forma não recursiva}$$

ou

$$y[n] = x[n] + 2y[n - 1] + 0.5y[n - 2] \text{ - forma recursiva}$$

- A partir da forma não recursiva pode-se obter directamente a resposta impulsional (para sistemas LIT):

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] + 0.5\delta[n - 2]$$

Sistemas Discretos

- **Sistemas sem memória:**

A saída $y[n]$, para qualquer valor de n , depende apenas da entrada $x[n]$ para o mesmo valor de n .

Ex:
$$y[n] = (x[n])^2$$

- **Sistemas FIR (Finite Impulse Response) e IIR (Infinite Impulse Response)**

Refere-se ao número de elementos não nulos da $h[n]$.

Sistemas Discretos

- **Sistemas Recursivos e Não Recursivos**

Sistema recursivo: a resposta $y[n]$ é definida recursivamente à custa de respostas anteriores: ex:

$$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$$

Não recursivos: a resposta $y[n]$ pode ser determinada exclusivamente a partir da entrada $x[n]$:

$$y[n] = 4x[n] - 2x[n-1]$$

- Um sistema FIR pode sempre ser implementado de forma não recursiva.
- Um sistema recursivo, normalmente é do tipo IIR.

Sistemas Discretos

● Tempo Real

Considera-se que um sistema opera em tempo real quando os elementos da saída são determinados à mesma cadência que chegam os elementos de entrada.

● Sistema Discreto Causal

Um sistema é causal quando é ‘causa’ de acontecimentos passados e não depende de acontecimentos futuros.

Condição necessária e suficiente para sistemas LIT

$$h[n]=0, n<0$$

Um sistema que opere em tempo real é causal.

● Sistema Discreto Estável

A uma entrada limitada responde sempre com uma saída limitada.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

JPT - PS

Sistemas Discretos

● Sistema Linear

$$\text{Se } y_1[n] = T\{x_1[n]\} \quad \text{e} \quad y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

então

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

Pode ser aplicado o princípio da sobreposição.

● Sistema Invariante no Tempo

Um sistema tem a resposta $y[n]$ à entrada $x[n]$. Então o sistema é invariante no tempo se à entrada

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

Responde com a saída

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

JPT - PS

Sistemas Discretos

● Linearidade

$$T[x_1(t)] = y_1(t)$$

$$T[x_2(t)] = y_2(t)$$

O sistema é linear se:

$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$$

$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$

$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$

O sistema é linear se:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

● Ver exemplo para o sistema: $y(t)=x(1-t)$

$$T[x(t)] = y(t) = x(1-t)$$

Sendo

$$T[x_1(t)] = y_1(t) = x_1(1-t)$$

$$T[x_2(t)] = y_2(t) = x_2(1-t)$$

O sistema é linear se:

$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$$

Ora :

$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$$

$$ay_1(t) + by_2(t) = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$$

Como a igualdade se verifica, o sistema é linear

JPT - PS

Sistemas Discretos

● Invariante no tempo

- Um sistema é invariante no tempo quando uma deslocação no tempo no sinal de entrada conduz à mesma deslocação no tempo no sinal de saída.

$$T[x(t)] = y(t)$$

$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

$$T[x(n)] = y(n)$$

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

Ver exemplo do sistema:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

$$T[x(n)] = y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

Verificar a igualdade

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n-n_0)$$

$$y(n-n_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} x(n-n_0)$$

São diferentes, logo não é invariante no tempo

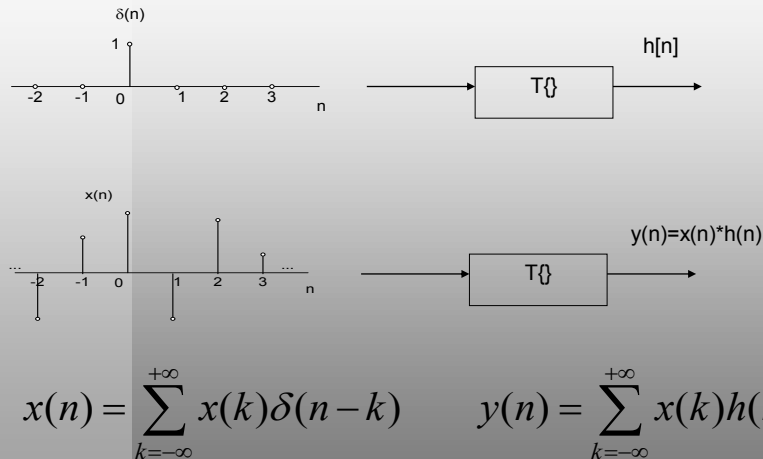
JPT - PS

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

- Juntam as duas características da linearidade e da invariância no tempo.
- Completamente caracterizados pela $h(n)$.
- A resposta do sistema é dada por:
 $y(n) = x(n) * h(n)$ — convolução discreta
- Muitos sistemas são LIT

JPT - PS

Resposta impulsional



JPT - PS

Convolução Discreta (Somatório de Convolução)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

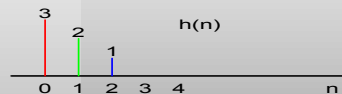
- É a convolução de $x(n)$ com $h(n)$. Pode ser representada por: $y(n)=x(n)*h(n)$.
- Goza da propriedade comutativa:
 $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

● *Para que serve?*

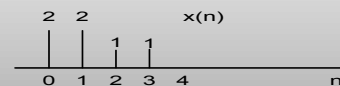
R: Para determinar a resposta de um sistema LIT, $y(n)$, sendo conhecidos a resposta impulsional, $h(n)$, e a entrada $x(n)$.

Convolução Linear

- $y(n)=x(n)*h(n)$



Comprimento $M=3$



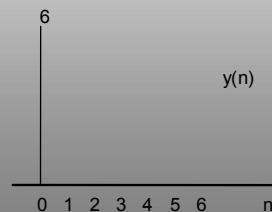
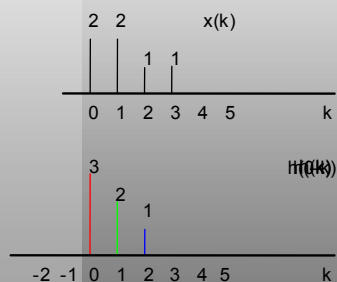
Comprimento $L=4$

Convolução Linear

Para $n=0$

$$y(0)=2 \times 3=6$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



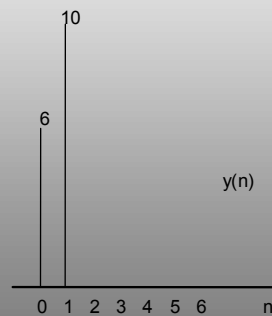
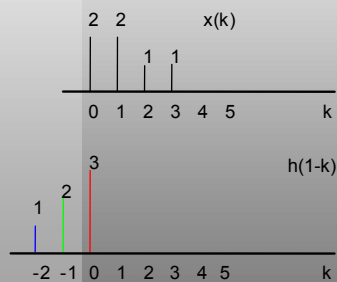
JPT - PS

Convolução Linear

Para $n=1$

$$y(1)=2 \times 2 + 2 \times 3 = 10$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



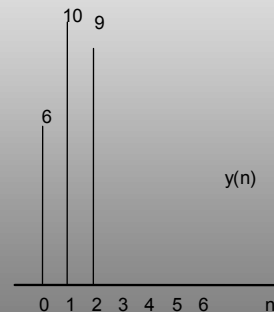
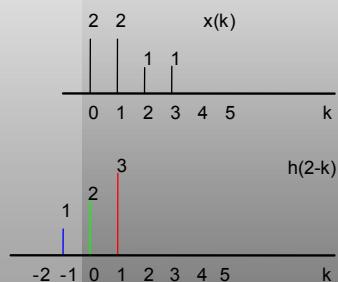
JPT - PS

Convolução Linear

Para $n=2$

$$y(2)=2x_1+2x_2+1x_3=9$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



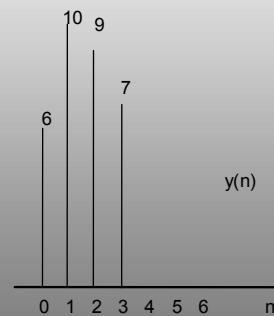
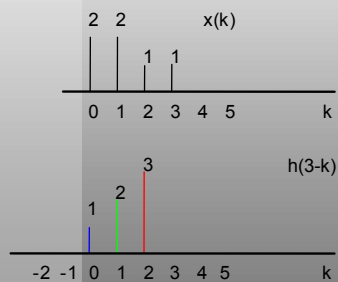
JPT - PS

Convolução Linear

Para $n=3$

$$y(3)=2x_1+1x_2+1x_3=7$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



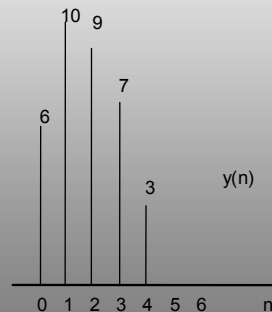
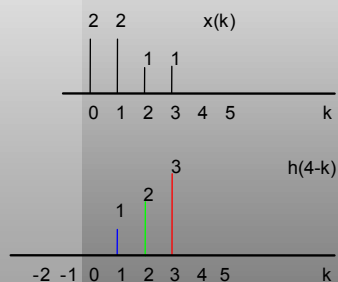
JPT - PS

Convolução Linear

Para $n=4$

$$y(4)=1x_1+1x_2=3$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



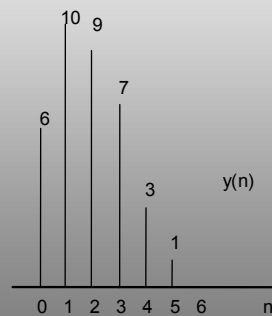
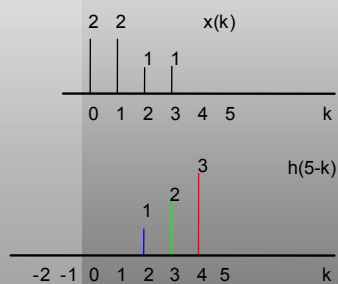
JPT - PS

Convolução Linear

Para $n=5$

$$y(5)=1x_1=1$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



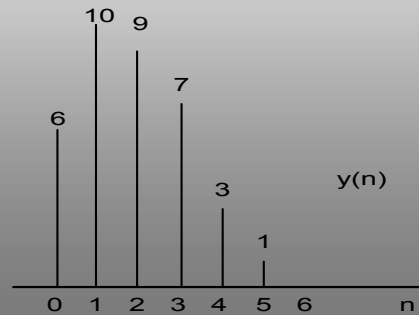
JPT - PS

Convolução Linear

Comprimento de $y(n)$ $N=L+M-1=6$

L – comprimento de $x(n)$

M – comprimento de $h(n)$



JPT - PS

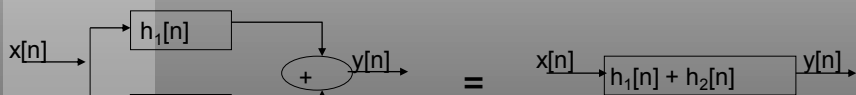
Propriedades dos sistemas LIT

- São as mesmas que as da convolução discreta:

- Comutativa
- Distributiva na adição:



$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



JPT - PS

Representação no Domínio das Frequências de Sinais e Sistemas Discretos

- **Resposta em Frequência do Sistema:**
(Transformada de Fourier)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- Neste caso (ao contrário dos sistemas de tempo contínuo) a resposta em frequência é periódica de período 2π .

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega})$$

- Então basta especificar:

$$0 \leq \omega \leq 2\pi \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Transformada Inversa

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Qualquer intervalo de 2π pode ser escolhido.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linear

• Se a TF de $x[n]$ é $X(e^{j\omega})$, então a TF de $x[n-k]$ é:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega(n+k)} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

Propriedades/Teoremas da Transformada de Fourier

Sinal	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
$x[n - n_a]$	$X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_a}$
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
	$X^*(e^{j\omega})$ se $x[n]$ é real
$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$

Teorema de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

JPT - PS

Propriedades de simetria da Transformada de Fourier

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x^*[n] \rightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

sinal	Transf. de Fourier
puramente real	parte real par, parte imaginária ímpar
puramente imaginário	parte real ímpar, parte imaginária par
parte real par, parte imaginária ímpar	puramente real
parte real ímpar, parte imaginária par	puramente imaginário

- $x[n]$ real e par tem $X(e^{j\omega})$ real e par

JPT - PS

Pares de Transformadas de Fourier

Sinal	Transformada de Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n] (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{outro } n \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$

JPT - PS

Equação às Diferenças e Resposta em Frequência

Equação às diferenças

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N-1} b_k y[n-k]$$

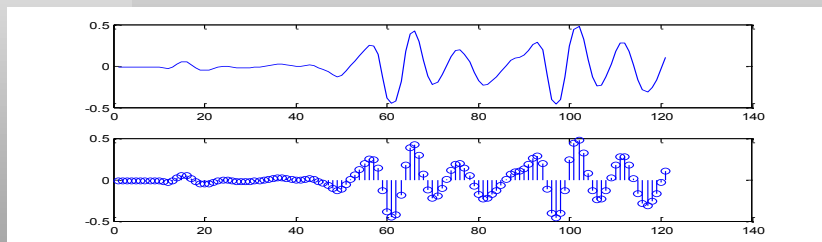
Com a resposta em frequência

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k e^{-j\omega k}}$$

JPT - PS

Amostragem de Sinais Contínuos

$$x[n] = x_c(n\Delta t)$$



JPT - PS

Amostragem de Sinais Contínuos

$$x[n] = x_c(n\Delta t)$$

$x[n]$ - sinal discreto

$x_c(t)$ - sinal contínuo

Δt - período de amostragem

$\Omega_a = \frac{2\pi}{\Delta t}$ frequência angular de amostragem

JPT - PS

Relação entre as transformadas de Fourier dos sinais contínuo e discreto:

$X_c(j\Omega)$ - Transformada de Fourier do sinal contínuo

$X(e^{jw})$ - Transformada de Fourier do sinal discreto

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(w + 2r\pi)}{\Delta t}\right)$$

Mudança de variável linear:

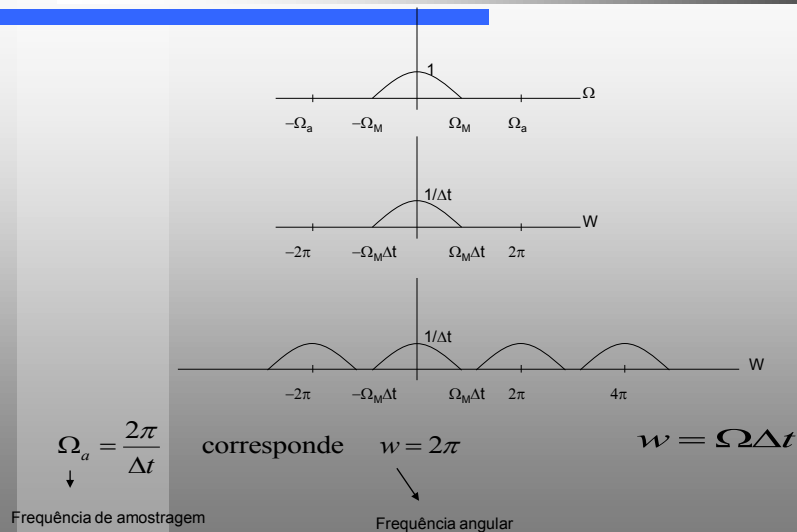
$$\Omega \Rightarrow \frac{w + 2r\pi}{\Delta t} \quad \text{para } r=0 \quad \Omega \Rightarrow \frac{w}{\Delta t}$$

Ω (rad / s)

w (rad)

JPT - PS

Amostragem de Sinais Contínuos (exemplo)



JPT - PS

Teorema da Amostragem

- Para que um sinal seja recuperável as diferentes regiões de $H(e^{j\omega})$ não se podem sobrepor.
- Então $X_c(j\Omega)$ tem de ocupar uma região limitada de Ω . Ou seja, $x_c(t)$ tem de ter um espectro de banda limitada (Ω_M).
- E $\Omega_a > 2\Omega_M$
- Ω_M – frequência limite superior de banda do sinal (rad/s)
- $\Omega_a/2$ – Frequência (angular) de Nyquist

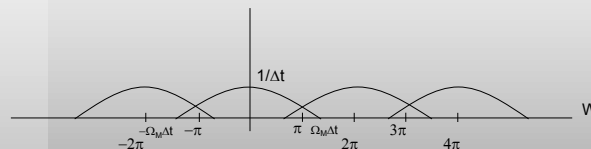
Teorema da Amostragem (Nyquist)

Um sinal contínuo com espectro de banda limitada ao intervalo $[-\Omega_M, \Omega_M]$ deve ser amostrado a uma frequência angular igual ou superior a $2\Omega_M$, para ser possível a sua reconstrução exacta a partir do sinal discreto resultante.

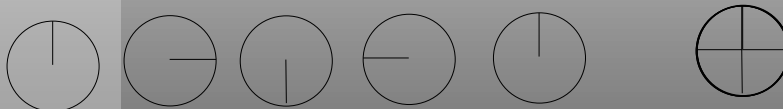
JPT - PS

Aliasing

- Ocorre quando não se verificam as condições do teorema da amostragem.
- Resulta da sobreposição das diferentes parcelas de $X(e^{j\omega})$.



- **Exemplo:**
- Na seguinte sequência de imagens, em que sentido gira a roda?



- E se souber que entre duas amostragens a roda não pode girar mais do que 180° ?

JPT - PS

Reconstrução de um Sinal Amostrado

- Faz-se determinando $X_c(j\Omega)$ a partir de $X(e^{jw})$, apenas no intervalo $[-\pi, \pi]$ e fazendo a mudança de variável $w \rightarrow \Omega\Delta t$.
- E depois determinando a transformada de Fourier inversa.

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn}$$

$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} \Delta t X(e^{j\Omega\Delta t}), & \text{se } -\frac{\pi}{\Delta t} < \Omega < \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

e calculando a transformada de Fourier inversa

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \text{senc}\left(\frac{\pi(t - n\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

É um sinal de banda limitada, e cada componente

$$x[n] \text{senc}\left(\frac{\pi(t - n\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

É de banda limitada e toma o valor zero em todos os pontos de amostragem, excepto no ponto $t=n\Delta t$, onde toma o valor $x[n]$.

JPT - PS

Interpolação

- É o aumento da frequência de amostragem do sinal contínuo. (Sem re-amostrar o sinal contínuo)
 - Só é possível se a amostragem tiver sido feita respeitando o teorema da amostragem.
 - Realiza-se intercalando zeros entre as amostras:
 - Para uma interpolação de ordem M:
- em que $x_0[n]$ é o sinal resultante da interpolação M do sinal $x[n]$:

$$x_0[n] = \begin{cases} x(n/M), & \text{se } n \text{ é múltiplo de } M \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

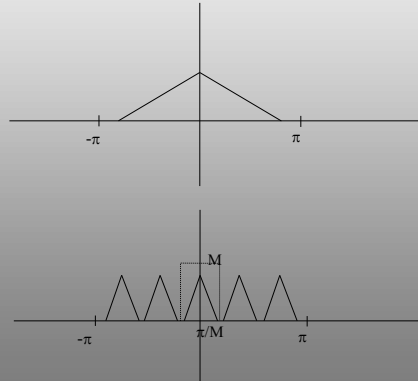
E depois, $x_0[n]$ é filtrado por um filtro passa baixo com frequência de corte π/M e ganho M.

JPT - PS

Interpolação (domínio da frequências)

$$X_0(e^{jw}) = X(e^{jwM})$$

A transformada de Fourier $X(e^{jw})$ como que é comprimida no intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$ e depois repetida periodicamente com período $2\pi/M$



JPT - PS

Decimação

- É a **redução da frequência de amostragem** do sinal contínuo. (Sem re-amostrar o sinal contínuo)
- É necessário verificar a possível ocorrência de *aliasing*.
- O sinal $x_d[n]$ é obtido por decimação de M:1 do sinal $x[n]$:

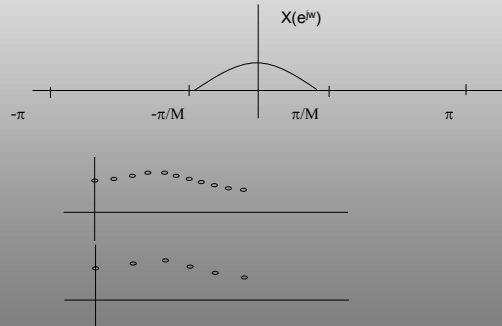
$$x_d[n] = x(Mn), \text{ M inteiro}$$
- A decimação é uma operação reversível (sem perda de informação) se $X(e^{jw})$ for zero fora do intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$, portanto de banda limitada.
- Então esta operação é normalmente precedida de uma filtragem passa baixo digital, para que esta situação seja garantida.

JPT - PS

Decimação

Em resumo:

- 1ª - filtragem passa baixo
- 2ª - $x_d[n] = x(Mn)$, M inteiro



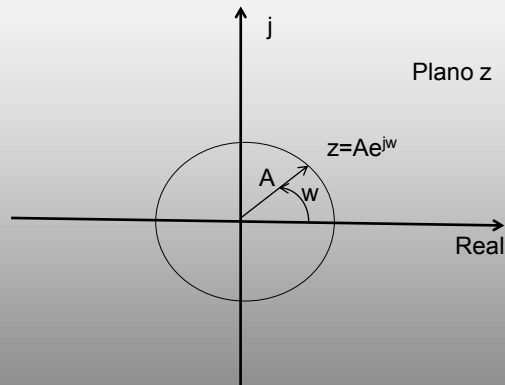
JPT - PS

Conversão Fraccionária da Frequência de Amostragem

- É a multiplicação da frequência de amostragem por uma fracção M/N .
- Realiza-se fazendo um interpolação de $1:M$ e uma decimação de $N:1$.
- Como nas duas operações é necessário uma filtragem passa baixo (na interpolação a $f_c = \pi/M$ e na decimação $f_c = \pi/N$), faz-se a filtragem apenas uma vez com a menor das f_c (frequência de corte).

JPT - PS

Transformada em z



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

JPT - PS

Transformada em z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Em que z é a frequência complexa e pertencente a $\mathbb{C}$.
- Esta definição permite que muitos sinais que não têm transformada de Fourier tenham transformada z .
- Desempenha um papel semelhante ao da transformada de Laplace para sinais contínuos.
- Tem uma notação mais conveniente que a transformada de Fourier.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

JPT - PS

Transformada em z

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Para

$$z = e^{j\omega}$$

A transformada z é igual à transformada de Fourier

● Equação às diferenças e Transformada z

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N-1} b_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k z^{-k}}$$

● Alguns somatórios de séries geométricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; |z| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}; |z| > 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^{-n} = \frac{a}{1-z}; |az| > 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}; |z| > |a|$$

Região de Convergência (ROC)

- É a região do plano z onde existe transformada z .
- A indicação da região de convergência é absolutamente necessária na transformada z
- Pode ser facilmente determinada já que, diferentes regiões do sinal discreto impõem diferentes ROC.
- Quando a Tz é dada por uma fracção cujos numerador e denominador são polinómios em z ou em z^{-1} :
 - os zeros do denominador são os pólos da Tz ;
 - os zeros do numerador são os zeros da Tz ;
 - os pólos limitam sempre a ROC;
 - os pólos situam-se sempre fora da ROC.

JPT - PS

Região de Convergência (ROC)

$x[n]$		convergência de $X(z)$	plano z
limitado à esquerda		zona exterior de um círculo	
limitado à direita		zona interior de um círculo	
comprimento finito		todo o z (excepto possivelmente $z=0$ e $z=\infty$)	
não limitado		região entre dois círculos	

JPT - PS

Propriedades da ROC da Tz

- P_1 – A ROC de $X(z)$ é um anel ou um disco no plano z centrado na origem.
- P_2 – A TF de $x[n]$ só existe se a ROC de $X(z)$ inclui o círculo unitário.
- P_3 – A ROC de $X(z)$ não contém nenhum pólo.
- P_4 – Se $x[n]$ é de duração finita (limitado à esquerda e à direita) então a ROC de $X(z)$ é todo o plano z , excepto, possivelmente $z=0$ ou $z=\infty$.
- P_5 – Se $x[n]$ é limitado à esquerda, então a ROC de $X(z)$ é o exterior do círculo limitado pelo pólo finito de maior magnitude.
- P_6 – Se $x[n]$ é limitado à direita, então a ROC de $X(z)$ é o interior do círculo limitado pelo pólo não nulo de menor magnitude.
- P_7 – Se $x[n]$ não é limitado à esquerda nem à direita então a ROC de $X(z)$ será um anel do plano z limitado no exterior e no interior por pólos e não contendo nenhum pólo.
- P_8 – A ROC deve ser uma região contígua.

JPT - PS

Pares de Transformadas z comuns

$x[n]$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	ROC
$\delta[n]$	1	todo z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	todo o z excepto 0 (se $m > 0$) ou ∞ (se $m < 0$)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $

JPT - PS

Relação da Tz com a TF

- Se a circunferência de raio unitário $z=e^{j\omega}$, pertencer à ROC de $X(z)$, então a TF pode obter-se:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \quad \text{para } z=e^{j\omega}$$

- Alguns sinais discretos têm Tz e não têm TF.
- Para se obter a Tz a partir da TF:

$$X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n] \Rightarrow X(z)$$

Propriedades da Tz

- A Tz é linear
- Deslocação em n

$$x[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

- Multiplicação por a^n

$$a^n x[n] \Leftrightarrow X(z/a) \quad \text{com ROC}=a\text{ROC}$$

- $x[-n]$

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}) \quad \text{com ROC}=\text{ROC}^{-1}$$

- Convolução

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

Com ROC=intercepção(ROCx com ROCh)

Estabilidade e Causalidade

- Um sistema discreto é estável se a ROC de $X(z)$ contiver a circunferência unitária do plano z .
- Um sistema discreto é causal se a ROC de $X(z)$ for o exterior de um círculo.
- Um sistema discreto causal e estável tem todos os seus pólos no interior da circunferência unitária do plano z .
- A circunferência unitária desempenha o mesmo papel que o eixo $j\omega$ do plano s relativamente à Transformada de Laplace.

Inversão da Transformada z

- 1. $X(z)$ é expressa como um polinómio em z :
 - Directa:
$$X(z) = 1 - 2z^{-1}$$

então

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$$
- 2. $X(z)$ é expressa como um quociente de dois polinómios em z :
 - a) Método da divisão: consiste na divisão dos polinómios.
 - segundo as potências decrescentes para sistemas causais
 - segundo as potências crescentes para sistemas não causais

Inversão da Transformada z

- b) **Método da decomposição em fracções simples.**
Consiste em decompor $X(z)$ em parcelas cuja transformada inversa é conhecida, e invocar a propriedade da linearidade da Tz.

- importante conhecer algumas transformadas e algumas propriedades

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ; |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ; |z| < |a|$$

$$x[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}) \quad \text{com ROC } \text{ROC}^{-1}$$

Inversão da Transformada z

Método do Integral de Linha (forma geral)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Com o integral calculado ao longo de um contorno C desenhado à volta da origem do plano z e na região de convergência de $X(z)$.
- O integral pode ser calculado pelo método dos resíduos:
 - o integral é igual à soma dos resíduos da função integranda nos seus pólos situados no interior do contorno, suposto percorrido no sentido directo.

Resíduos

- Resíduo de uma função $F(z)$ num pólo simples:

$$(z - a) F(z) \Big|_{z=a}$$

- Resíduo de uma função $F(z)$ num pólo com multiplicidade m :

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m F(z) \right] \Big|_{z=a}$$

(Parece complicado, mas é simples para pólos de multiplicidade 2)

Convolução Complexa (em z)

- A transformada z da multiplicação de dois sinais discretos é a convolução complexa da transformada z dos respectivos sinais.

$$x[n] \times w[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w[n] z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \tilde{X}(v) \tilde{W}\left(\frac{z}{v}\right) dv$$

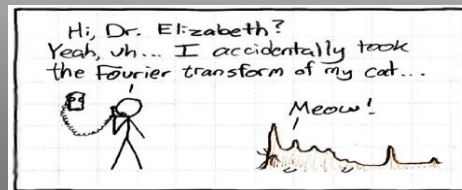
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(w-\theta)}) d\theta$$

Convolução

- Importante para avaliar o efeito no domínio das frequências, da multiplicação de dois sinais discretos.
- Por exemplo no caso da aplicação de uma janela.
 - Aplicação de uma janela rectangular a uma resposta impulsional:

$$h_a[n] = h[n](u[n + n_0] - u[n - n_0 - 1])$$

Transformada de Fourier Discreta DFT



JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

● O que é?

- A DFT é uma sequência e não uma função de variável contínua;
- Corresponde a amostras igualmente espaçadas na frequência da Transformada de Fourier do sinal;
- É aplicada a sequências finitas (sinais discretos de comprimento limitado, N).
- A DFT desempenha um papel fundamental nos algoritmos de PDS – algoritmos eficientes para o seu cálculo – FFT.

JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- **Vários caminhos para se chegar à DFT:**
 - Estudar a TF de sinais discretos → representação contínua com w entre $-\pi$ e π . Depois, amostrar no domínio das frequências (w).
 - Ver a representação no domínio das frequências através da Série de Fourier de sequências periódicas. Estudar as suas propriedades. E aplicar a Série de Fourier a sequências limitadas (abordagem seguida em ‘Discrete-Time Signal Processing’).
 - ...

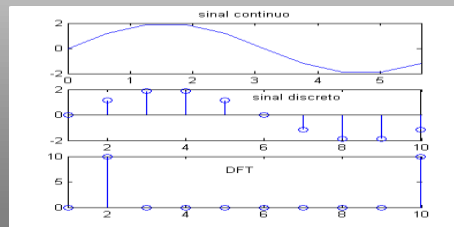
Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- **A Transformada de Fourier de um sinal discreto $x[n]$, $X(e^{jw})$, é uma função de variável contínua w , que é periódica de período 2π .**
- **Em que condições se pode representar $X(e^{jw})$ por uma amostragem $X(k)$?**
 - $x[n]$ deve ser de comprimento limitado N ;
 - A sua transformada $X(e^{jw})$ deve ser amostrada em, pelo menos, N pontos num período;
 - + condições de amostragem

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- Nas condições enunciadas: um sinal de banda limitada e duração limitada pode ser representado por N amostras de:

- sinal
- Transformada de Fourier



JPT - PS

Amostragem nos domínios do Tempo e da Frequência

- Quando se amostra um sinal contínuo $x_c(t)$,
$$x(n) = x_c(n\Delta t)$$
- A sua transformada de Fourier $X_c(\Omega)$ tem que ser de banda limitada a um intervalo de largura igual ou inferior a $2\pi/\Delta t$ (senão ocorre *aliasing*).



JPT - PS

Amostragem nos domínios do Tempo e da Frequência

- Quando se amostra a Transformada de Fourier $X_c(\Omega)$,

$$X(k) = X_c(k\Delta\Omega)$$

- O sinal contínuo $x_c(t)$ tem de ser de duração limitada a um intervalo $2\pi/\Delta\Omega$ (senão ocorre *aliasing*).



JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta

- A transformada de Fourier discreta (DFT) de um sinal discreto $x[n]$ de comprimento N é uma amostragem da sua transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ em N pontos igualmente espaçados do intervalo $[0, 2\pi[$.

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0 \dots N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad n = 0 \dots N-1.$$

JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta - FÓRMULAS

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - j \sin \frac{2\pi}{N}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0 \dots N-1.$$

Propriedades da DFT

- A DFT goza da propriedade da linearidade.

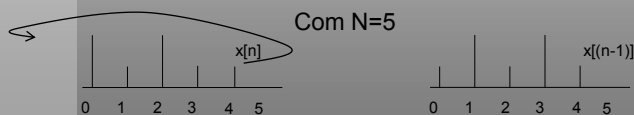
$$DFT(ax_1[n] + bx_2[n]) = aDFT(x_1[n]) + bDFT(x_2[n])$$

- Deslocamento no sinal discreto:

- deslocar $x[n]$ de m , $x[n-m]$, corresponde a multiplicar $X[k]$ por W_N^{mk}

$$x[(n-m)] \rightarrow W_N^{mk} X[k]$$

Sendo o deslocamento circular ((.)):



Propriedades da DFT

- A DFT tem a propriedade da convolução circular ou periódica:
 - Ao produto de duas DFT de comprimento N corresponde a convolução circular dos respectivos sinais discretos originais.
 - A convolução circular ou periódica é entendida como um período da convolução de um deles por um período do outro (ver exemplo).

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]$$

- A convolução circular introduz *aliasing* se o comprimento do sinal resultante da convolução linear excede o comprimento da DFT
 - Senão, a convolução circular é igual à convolução linear.

Propriedades da DFT

A dualidade entre os domínios original e transformado da DFT, confirmada pela semelhança entre as expressões da DFT e da iDFT, conduz a propriedades duais:

- Um deslocamento circular de m em $X[k]$, $X[k-m]$, corresponde a multiplicar o sinal original por W_N^{-mk}

$$x[n]W_N^{-mk} \rightarrow X[(k-m)]$$

- À multiplicação dos dois sinais discretos corresponde a convolução circular das duas DFT

$$y[n] = x[n]h[n]$$

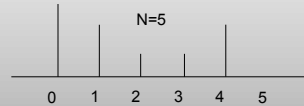
$$Y[k] = X[k] \otimes H[k]$$

Propriedades da DFT

- A periodicidade subjacente à DFT leva a que um sinal de comprimento N:

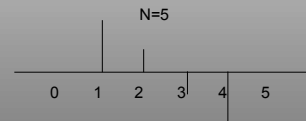
– é par se:

$$x[n] = x[N - n]$$



– é ímpar se:

$$x[n] = -x[N - n]$$



Relação da DFT com a Tz

- A DFT pode ser vista como uma amostragem da Tz em N pontos igualmente espaçados sobre a circunferência de raio unitário.

$$z_k = W_N^{-k}, \quad k = 0 \dots N - 1$$

- A Tz pode ser obtida a partir da DFT pela expressão:

$$H[z] = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

(Método usado no projecto de filtros digitais – ‘Amostragem da função de transferência’)

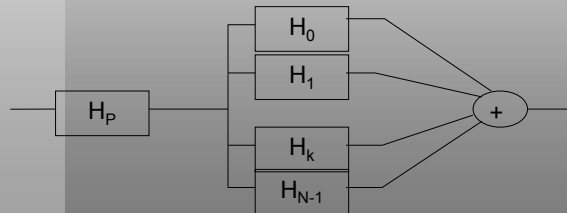
Relação da DFT com a Tz

$$H[z] = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- Pode ser implementado pela associação em série de um sistema $H_p(z)$ com diversos sistemas em paralelo $H_k(z)$.

$$H_p[z] = \frac{1-z^{-N}}{N}$$

$$H_k[z] = \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}, \quad k = 0..N-1$$



JPT - PS

Convolução Linear Utilizando a DFT

- A multiplicação de duas DFT corresponde a uma convolução circular.
- Mas, os sistemas realizam a convolução linear.
- Cabe aos utilizadores fazer a DFT de forma a que o resultado seja a da convolução linear.

COMO?

- Realizando a DFT com o comprimento da convolução linear. $N=L+M-1$.

N – comprimento da DFT

L – comprimento de $x[n]$

M – comprimento de $h[n]$

JPT - PS

Convolução Linear Utilizando a DFT

Qual o interesse de fazer a convolução com a DFT?

$$X[k] = DFT(x[n])$$

$$H[k] = DFT(h[n])$$

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

$$y[n] = iDFT(Y[k])$$

Porque não fazer directamente a convolução?

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- **PORQUE** fazendo a DFT com algoritmos rápidos (fft) o tempo de processamento é MUITO menor (menor número de operações).

Convolução Circular ou Periódica

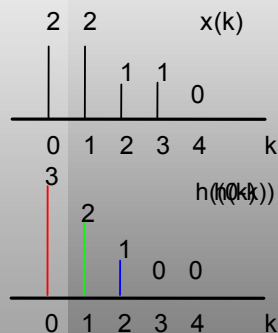
- $y(n) = x(n) * h(n)$



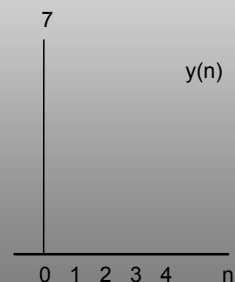
Comprimento N=5

Convolução Circular ou Periódica

Para $n=0$ $y(0)=2x_3+1x_1=7$



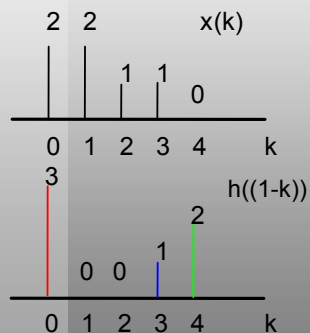
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$



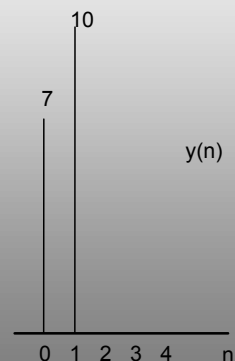
JPT - PS

Convolução Circular ou Periódica

Para $n=1$ $y(1)=2x_2+2x_3=10$



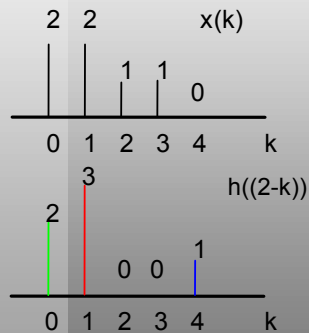
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$



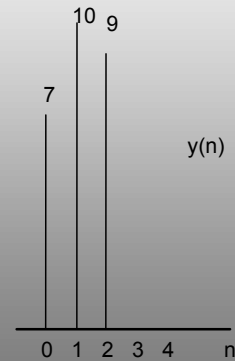
JPT - PS

Convolução Circular ou Periódica

Para $n=2$ $y(2)=2x_1+2x_2+1x_3=9$



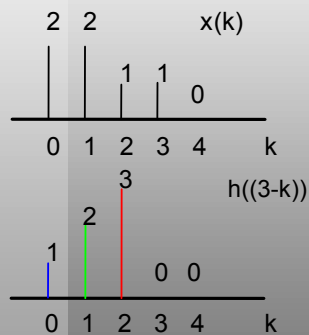
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$



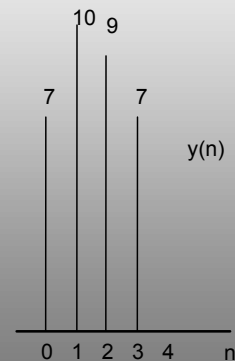
JPT - PS

Convolução Circular ou Periódica

Para $n=3$ $y(3)=2x_1+1x_2+1x_3=7$



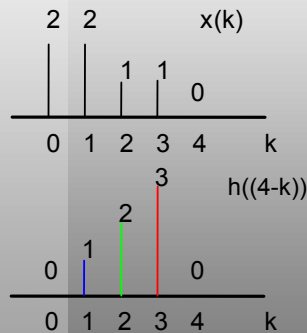
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$



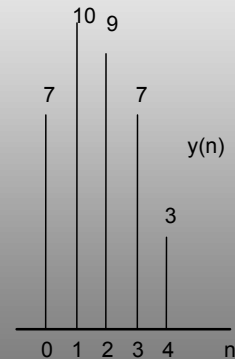
JPT - PS

Convolução Circular ou Periódica

Para $n=4$ $y(4)=1x1+1x2=3$



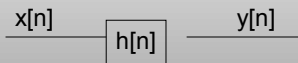
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$



JPT - PS

Overlap

- Como fazer no caso em que o comprimento L do sinal de entrada de um sistema é muito grande ou mesmo de valor indefinido (caso do processamento em tempo real)?



- Não é possível realizar uma só DFT, é necessário fraccionar $x[n]$ e depois juntar os resultados. Dois Métodos:
 - Overlap-Add
 - Overlap-Save

JPT - PS

Overlap-Add

- $x[n]$ é dividido em segmentos justapostos de comprimento L .

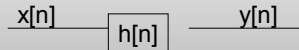
Em que: $L=N-M+1$

(lembram-se de $N=L+M-1$?)

N – comprimento da DFT

L – comprimento de $x[n]$

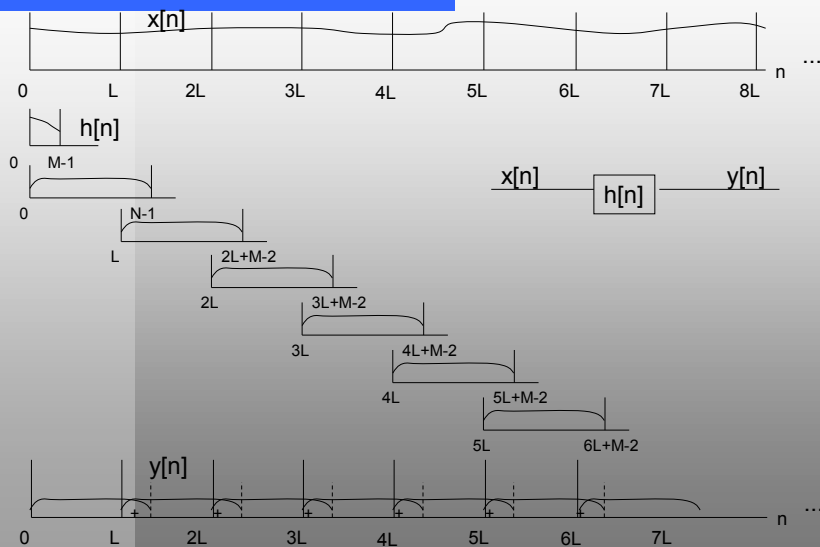
M – comprimento de $h[n]$



- Determina-se a convolução (DFT) segmento a segmento
- Justapõem-se os resultados, sendo que em $M-1$ pontos se adicionam os resultados de dois segmentos consecutivos.

JPT - PS

Overlap-Add



JPT - PS

Overlap-Save

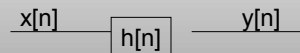
- $x[n]$ é dividido em segmentos justapostos de comprimento N (recrutando os $M-1$ pontos anteriores ao fim do segmento anterior) (No caso do primeiro segmento, acrescentam-se $M-1$ zeros no início).

Em que: $L=N-M+1$ (lembrem-se de $N=L+M-1$?)

N – comprimento da DFT

L – comprimento de $x[n]$

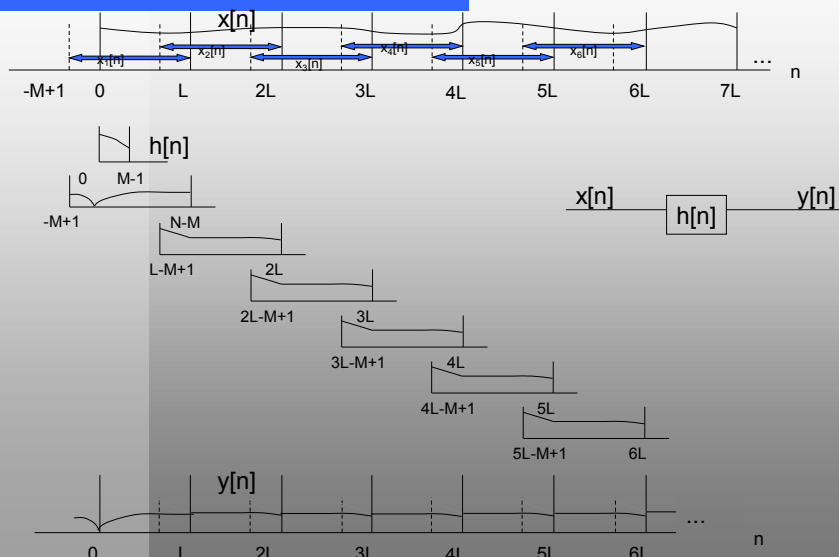
M – comprimento de $h[n]$



- Determina-se a DFT comprimento N , segmento a segmento. (Repare-se que os $M-1$ pontos iniciais são determinados com *aliasing*, mas os restantes estão correctos).
- Justapõem-se os pontos correctos sem necessidade de qualquer adição. (Os $M-1$ pontos com aliasing, são simplesmente ‘deitados fora’).

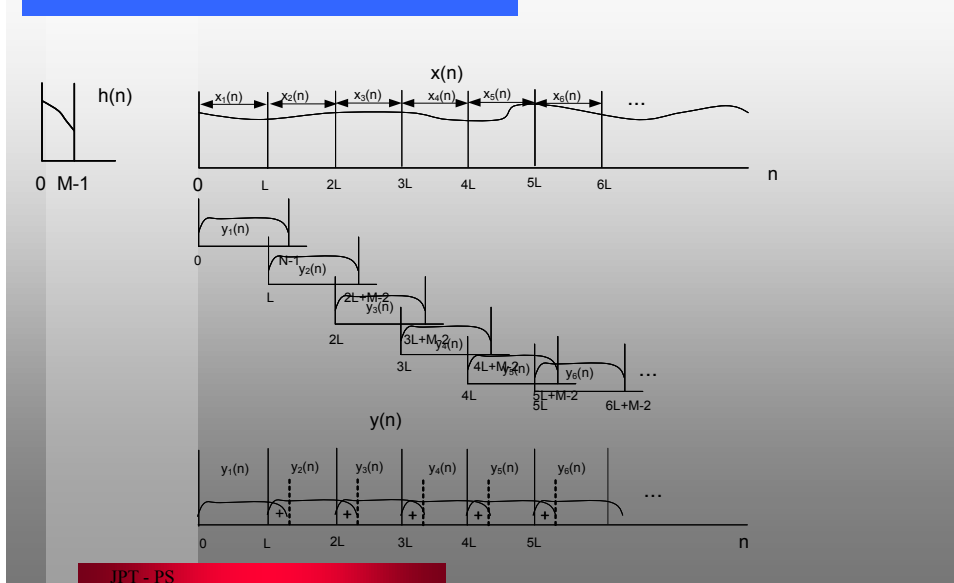
JPT - PS

Overlap-Save



JPT - PS

Overlap-add



JPT - PS

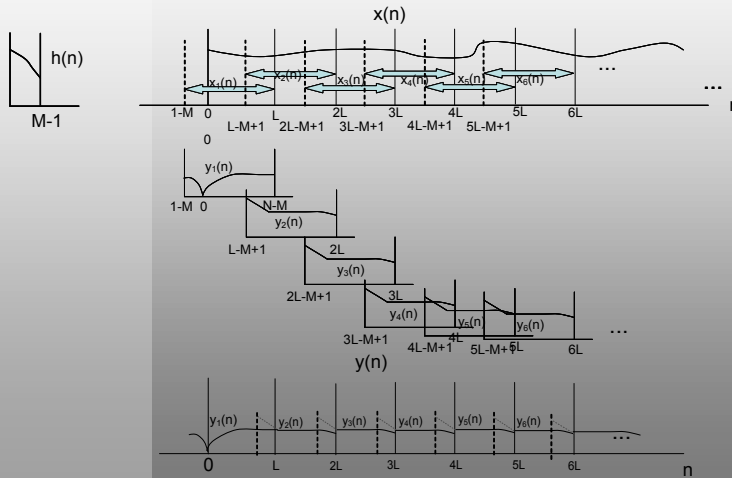
Implementação Overlap-add

```

function y=overlap_add(x,h,N);
M=length(h);
L=N-M+1;
ya=zeros(1,length(x)+M);
H=fft(h,N);
i=1;
while i<length(x)-L+1
    x1=x(i:i+L-1);
    X1=fft(x1,N);
    Y1=X1.*H;
    y1=ifft(Y1);
    ya(i:i+N-1)=ya(i:i+N-1)+y1;
    i=i+L;
end
y=ya(1:length(x));
    
```

JPT - PS

Overlap-save



JPT - PS

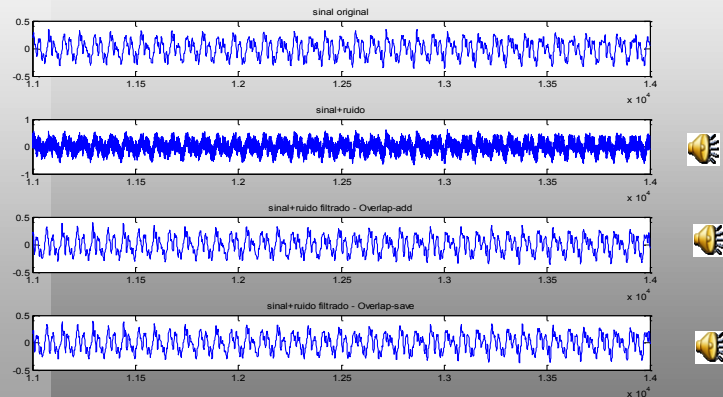
Implementação Overlap-save

```

function y=overlap_save(x,h,N);
M=length(h);
L=N-M+1;
y=zeros(1,length(x));
H=fft(h,N);
i=1;
while i<length(x)-L+1
    if i==1
        x1=[zeros(1,M) x(1:L)];
    else
        x1=x(i-M:i+L-1);
    end
    X1=fft(x1,N);
    Y1=X1.*H;
    y1=ifft(Y1);
    y(i:i+L-1)=y(i:i+L-1)+y1(M:N);
    i=i+L;
end
    
```

JPT - PS

Exemplo - eliminação de ruído em música



JPT - PS

Transformada Rápida de Fourier

FFT — Fast Fourier Transform

- Trata-se de métodos matemáticos / algoritmos para efectuar a determinação da DFT de uma forma muito eficiente (rápida).
- A eficiência resulta da redução significativa do número de adições e multiplicações.
- Algoritmos de:
 - Decimação no:
 - tempo
 - frequência
 - Raíz:
 - 2
 - 4
 - Dupla (combinação de 2 e 4)

JPT - PS

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 - Cooley & Tukey)

Fundamentos matemáticos:

$x[n]$ é dividido nos sinais

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_N^{(2n+1)k}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \quad k = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

sendo

$$G[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \quad k = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \quad k = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

finalmente

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad k = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

$$X[k + \frac{N}{2}] = G[k] - W_N^k H[k], \quad k = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$g[n] = x[2n]$$

$$h[n] = x[2n+1], \quad n = 0.. \frac{N}{2} - 1$$

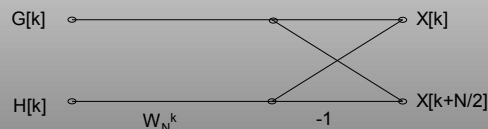
$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

JPT - PS

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 (Cooley & Tukey)

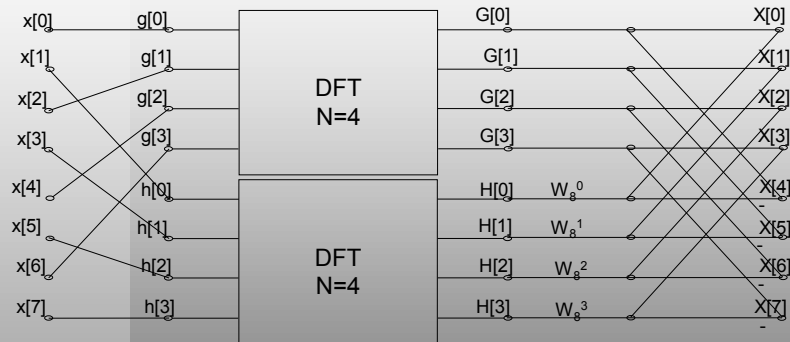
- Das expressões anteriores pode ver-se que se obtêm dois elementos de $X[k]$ a partir de um elemento de $G[k]$ e outro de $H[k]$, com uma única multiplicação e duas adições.

- Borboleta:



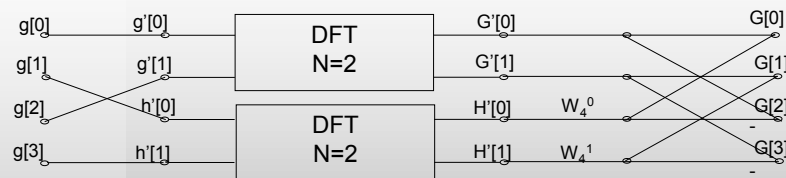
JPT - PS

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 Exemplo para DFT com N=8

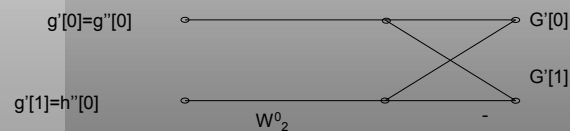


Cada DFT com N=4 é também realizada pelo mesmo processo

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 Exemplo para DFT com N=8

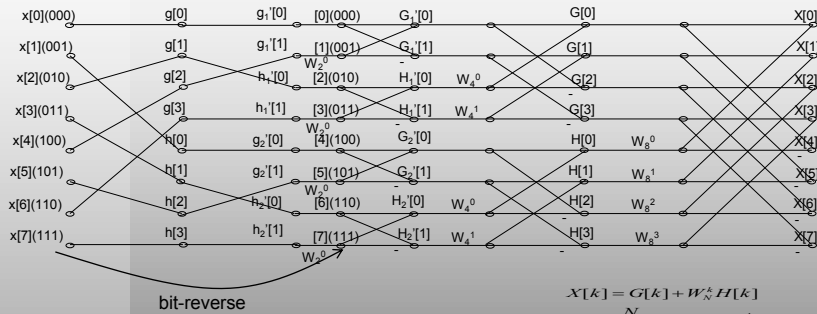


Cada DFT com N=2 é realizada por uma borboleta:



Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 Exemplo para DFT com N=8

• Tudo Junto:



- O algoritmo é realizado em duas partes:
 1. os elementos são arranjado segundo uma dada ordem – bit-reverse.
 2. Cálculo das “borboletas”.

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2

□ Número de operações:

Comprimento	andares	borboletas	Mult./borb.	adiç./borb.	Total de multiplicações	Total de adições
N	$\log_2 N$	N/2	1	2	$N/2 * \log_2 N$	$N * \log_2 N$
1024	10	512	1	2	5120	10240

□ Pelo cálculo directo da DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

Com N=1024:

$1024 * 1024 \sim 10^6$ multiplicações

$1024 * 1023 \sim 10^6$ adições

Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2

- A DFT de um sinal discreto de comprimento N, par é:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

- Pode ser separada nos seus termos de ordem par e de ordem impar:

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{\frac{N}{2}}^{nk}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{\frac{N}{2}}^{nk} W_N^{nk}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

- Que se podem considerar os sinais G[k] e H[k], DFT dos sinais:

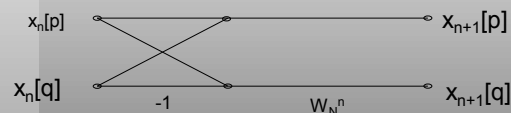
$$g[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right], \quad n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$h[n] = (x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]) W_N^n, \quad n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

JPT - PS

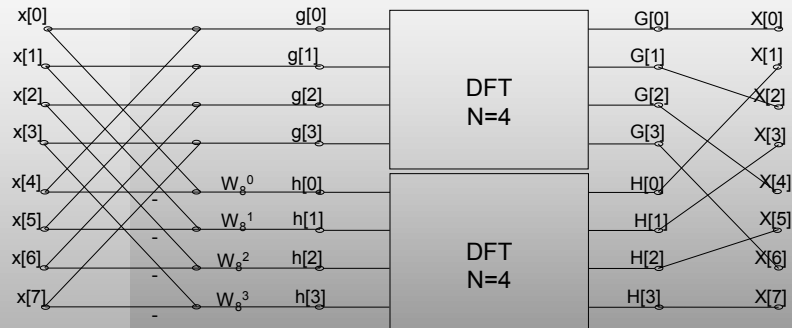
Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2

- Podem-se obter 2 elementos de X[k] a partir de um elemento de G[k] e outro de H[k], com uma multiplicação e duas adições:



JPT - PS

Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2 Exemplo para DFT com N=8



Mesmo número de operações que o algoritmo de decimação no tempo.

JPT - PS

Algoritmo Raiz 4 (decimação no tempo)

- Os algoritmos raiz 2 decompõem o sinal de entrada em 2.
- Os algoritmos raiz 4 decompõem o sinal de entrada em 4. Necessitam de menos multiplicações.

dividindo o sinal $x[n]$ em:

$$x_i[n] = x[4n + i], \quad n = 0 \dots \frac{N}{4} - 1, \quad i = 0 \dots 3$$

De tal modo que:

$$X[k] = \sum_{i=0}^3 W_N^{ik} X_i[k] \quad \text{em que} \quad X_i[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_i[n] W_N^{4nk}, \quad i=0 \dots 3$$

De onde resulta:

$$X[k] = X_0[k] + W_N^k X_1[k] + W_N^{2k} X_2[k] + W_N^{3k} X_3[k]$$

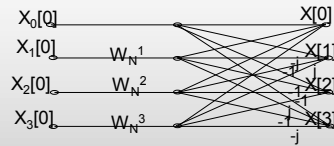
$$X[k + \frac{N}{4}] = X_0[k] - j W_N^k X_1[k] - W_N^{2k} X_2[k] + j W_N^{3k} X_3[k]$$

$$X[k + \frac{2N}{4}] = X_0[k] - W_N^k X_1[k] + W_N^{2k} X_2[k] - W_N^{3k} X_3[k]$$

$$X[k + \frac{3N}{4}] = X_0[k] + j W_N^k X_1[k] - W_N^{2k} X_2[k] - j W_N^{3k} X_3[k]$$

JPT - PS

Algoritmo Raiz 4 (decimação no tempo)



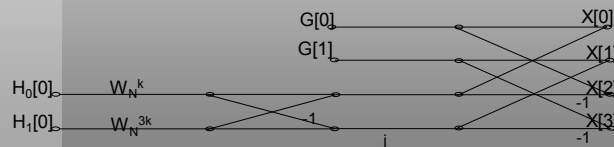
- Usando 4 valores $X_i[k]$ obtém-se 4 valores de $X[k]$ com 3 multiplicações e 12 adições (considerando as multiplicações por j incluídas nas adições).
- São necessários menos andares.

Raiz	Comprimento	andares	borboletas	Mult./b orb.	adiç./bor b.	Total de multiplicações	Total de adições
2	N	$\log_2 N$	$N/2$	1	2	$N/2 \cdot \log_2 N$	$N \cdot \log_2 N$
	1024	10	512	1	2	5120	10240
4	N	$(\log_2 N)/2$	$N/4$	3	12	$3N/8 \cdot \log_2 N$	$3/2 N \cdot \log_2 N$
	1024	5	256	3	12	3840	15360

JPT - PS

Algoritmo Raiz dupla (decimação no tempo)

- Usam simultaneamente as raízes 2 e 4.
- Necessitam ainda menor número de multiplicações que as anteriores (tende para 2/3 do número de multiplicações do algoritmo raiz 2).
- Mesmo número de adições que o algoritmo raiz 2.
- Uma borboleta requer 2 multiplicações e 6 adições complexas para determinar 4 elementos de $X[k]$.



JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta Inversa

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

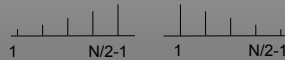
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0 \dots N-1.$$

- Diferem apenas de 1/N e do sinal do expoente nk.
- Pode-se usar o algoritmo FFT com uma pequena modificação.
- 3 Métodos:

– Método 1

$$x[-n] = \frac{1}{N} DFT[X[k]]$$

- A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT
 - com os coeficientes X[k],
 - Dividindo o resultado por N,
 - Re-ordenando as posições dos elementos de ordem n e N-n, para n=1..N/2-1



JPT - PS

Transformada de Fourier Discreta Inversa

– Método 2

$$x[n] = \frac{1}{N} DFT[X^*[k]]^*$$

- A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT
 - com os coeficientes X[k] conjugados,
 - dividindo o resultado por N,
 - determinar os seus conjugados.

– Método 3

$$x_I[n] + jx_R[n] = \frac{1}{N} DFT[X_I[k] + jX_R[k]]$$

- A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT
 - com os coeficientes X[k], com as suas partes real e imaginária trocadas,
 - dividindo o resultado por N,
 - Trocar as partes real e imaginária do resultado.

JPT - PS

Filtros



Filtros

- **Classificação de Filtros:**

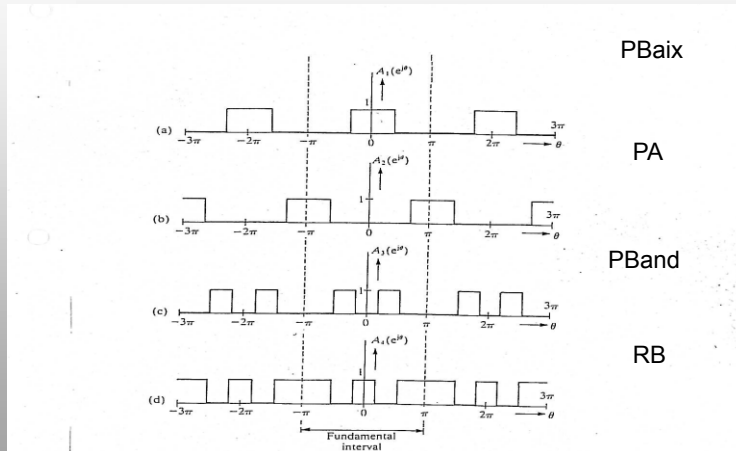
- Passa-baixo
- Passa-alto
- Passa-banda
- Rejeita-banda

- **Outros tipos de filtros:**

- **Diferenciador** $H_D(e^{j\theta}) = j\theta$ para $|\theta| \leq \pi$
- **Integrador** $H_I(e^{j\theta}) = 1/j\theta$ para $|\theta| \leq \pi$
- **Transformada de Hilbert** $H_H(e^{j\theta}) = \begin{cases} j & \text{para } 0 \leq \theta < \pi \\ -j & \text{para } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$
- **Passa tudo (phase-shifter)**

$$|H_F(e^{j\theta})| = 1 \text{ para } |\theta| \leq \pi$$

Filtros Ideais



JPT - PS

Filtros FIR e IIR

Característica	FIR	IIR
Função de Sistema	Contém apenas zeros	Contém pólos e zeros
Resposta em frequência	O método de projecto normal é bom para respostas em frequência arbitrárias	O método de projecto é bom principalmente para filtros PB, PA, PB e RB.
Características de fase	São possíveis filtros de fase exactamente linear. Não são possíveis phase-shifters	Fase linear só podem ser aproximados. A especificação do filtro só se reporta à amplitude. São possíveis Phase shifter
Estabilidade	Sempre estáveis	Instável se existem pólos fora do círculo unitário.
Complexidade	Proporcional ao comprimento da $h(n)$.	Não existe relação com $h(n)$.
Estrutura	Habitualmente não recursiva. Também pode ser recursiva.	Apenas estrutura recursiva.

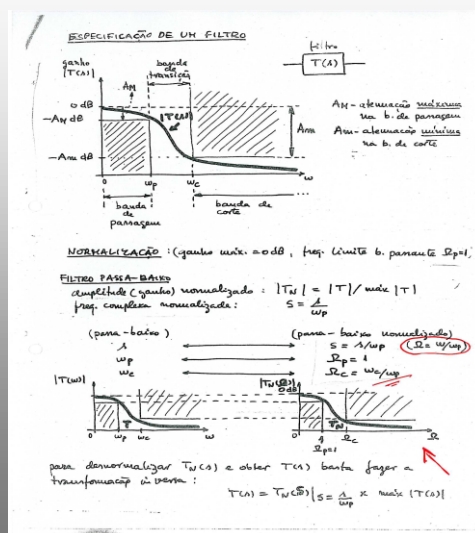
JPT - PS

Projecto de Filtros Digitais

- Estados do processo de projecto de filtros digitais a partir das suas especificações:
 - Escolha do tipo de filtro FIR ou IIR;
 - Determinação (escolha) da ordem do filtro e cálculo dos coeficientes da função do filtro;
 - Escolha da estrutura do filtro (tomar em consideração os efeitos de quantificação dos sinais de entrada, de saída e dos coeficientes do filtro);
 - Verificar se os resultados do filtro projectado se enquadram nas especificações iniciais. Se não, repetir o processo de projecto com algumas alterações (ordem do filtro, etc).

JPT - PS

Especificação



JPT - PS

Filtros Digitais do tipo FIR

- Estes filtros podem ser de fase linear:

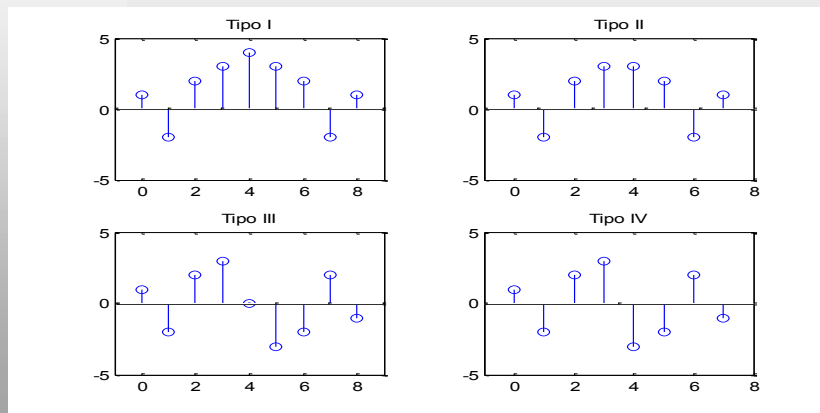
$$h[n] = \begin{cases} \pm h[N-1-n], & \text{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

- Assim, podem ser classificados como:

	Comprimento Impar	Comprimento Par
Simetria +	Tipo I	Tipo II
Simetria -	Tipo III	Tipo IV

Tipos de Filtros FIR

$h[n]$



Tipos de Filtros FIR

Tipo I (simetria positiva e N ímpar)

$$h[n] = h[N - 1 - n] \quad H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$A(\omega) = h\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

Tipo II (simetria positiva e N par)

$$h[n] = h[N - 1 - n] \quad H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

Para $\omega=\pi$, $H(e^{j\omega})=0$

Não pode ser um passa-alto.

JPT - PS

Tipos de Filtros FIR

Tipo III (simetria negativa e N ímpar)

$$h[n] = -h[N - 1 - n] \quad H(e^{j\omega}) = jB(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$B(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] \sin\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

Para $\omega=0$ ou $\omega=\pi$, $H(e^{j\omega})=0$

É adequado para diferenciadores ou filtros de Hilbert.

Tipo IV (simetria negativa e N par)

$$h[n] = -h[N - 1 - n] \quad H(e^{j\omega}) = jB(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$B(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

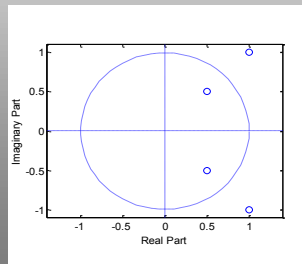
Para $\omega=0$, $H(e^{j\omega})=0$

É adequado para diferenciadores ou filtros de Hilbert.

JPT - PS

Relação entre os zeros de filtros FIR de fase linear

- Quando os coeficientes de um sistema discreto são reais, os pólos e zeros complexos ocorrem aos pares (com os respectivos conjugados).
- E, se o sistema for de fase linear, para um zero em z_k ocorre outro em z_k^{-1} .



JPT - PS

Projecto de Filtros Digitais do tipo FIR

- **Métodos de projecto:**
 - **Método da janela** – consiste em determinar a $h_d[n]$. Como $h_d[n]$ é normalmente de comprimento infinito, é necessário multiplicá-la por uma janela de comprimento finito.
 - Janela rectangular
 - Janela Hamming generalizada
 - Hamming
 - Hanning
 - Blackman
 - **Amostragem da função de Transferência** – consiste em amostrar a $H(z)$ em N pontos...
 - **Projecto óptimo** – optimização da resposta em frequência do filtro por processo iterativo.

JPT - PS

Filtros FIR - Método da janela

- Partindo de uma determinada resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, real e par, determina-se a resposta impulsional:

$$h_n[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- que é real e par e normalmente de comprimento infinito.
- É necessário truncá-la usando uma janela $w[n]$.

Filtros FIR - Método da janela

- A janela deve obedecer às condições:
 - (supondo N ímpar)

$$w[n] = w[-n]$$

$$w[n] = 0 \quad \text{para } n < -\frac{N-1}{2} \quad \text{ou } n > \frac{N-1}{2}$$

- resultando: $h[n] = w[n] h_n[n]$ com comprimento finito.
- Contudo, a resposta em frequência do sistema resultante é:

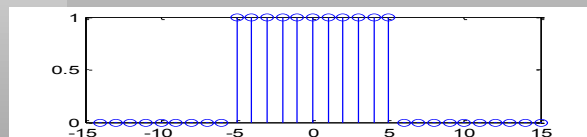
$$H(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega})$$

Filtros FIR - Método da janela

- Se se pretender um filtro causal, desloca-se a janela para a direita de $n=0$, através da introdução de um atraso de $(N-1)/2$.

- A $w[n]$ – mais óbvia é a janela rectangular:

$$w_R(n) = u\left[n + \frac{N-1}{2}\right] - u\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$$



- Mas introduz um grande ‘overshoot’ nas descontinuidades de H_d (fenómeno de Gibbs).

JPT - PS

Outras Janelas

- **Hanning**

$$w_N[n] = \left(0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) w_R[n]$$

- **Hamming**

$$w_M[n] = \left(0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) w_R[n]$$

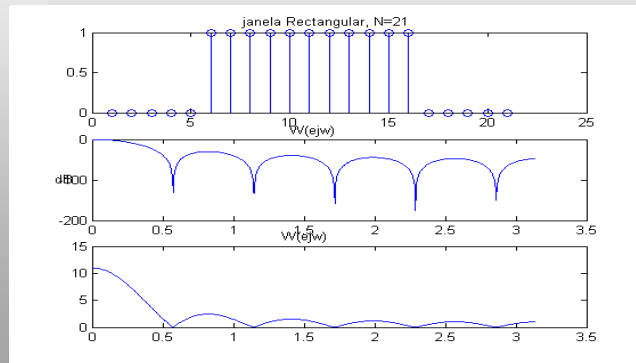
- **Blackman**

$$w_B[n] = \left(0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right) w_R[n]$$

JPT - PS

Janelas

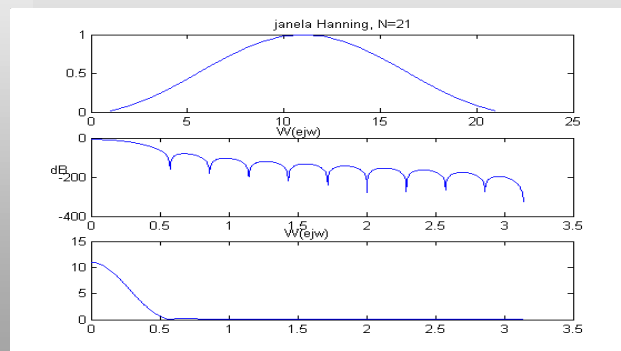
● Rectangular



JPT - PS

Janelas

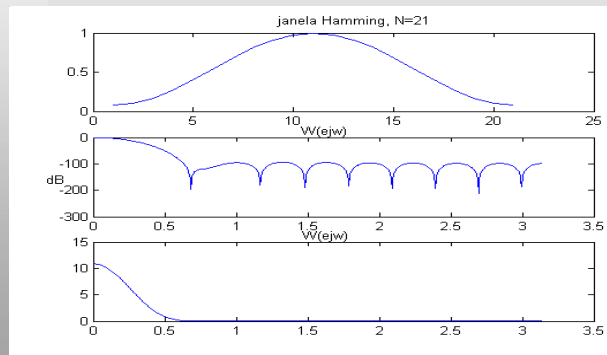
● Hanning



JPT - PS

Janelas

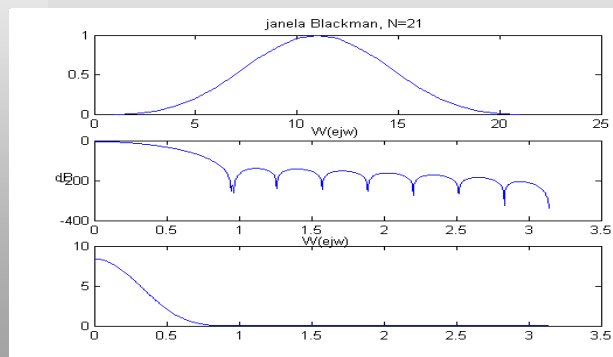
- **Hamming**



JPT - PS

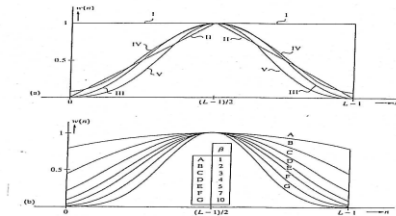
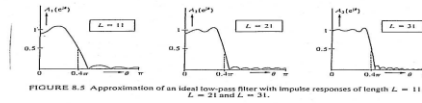
Janelas

- **Blackman**



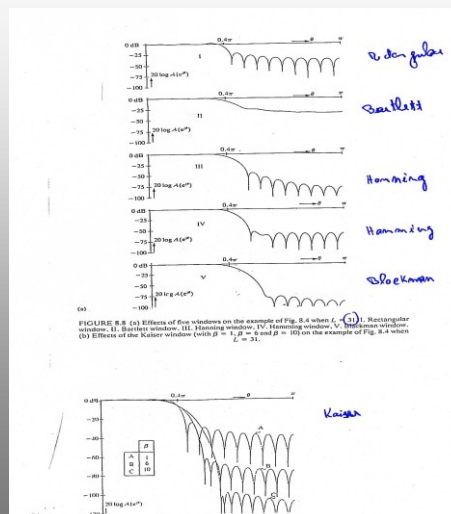
JPT - PS

Exemplos de Janelas



JPT - PS

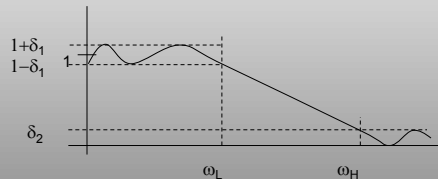
Exemplos de Janelas



JPT - PS

Filtros FIR – Projecto Óptimo

- A ordem do filtro é minimizada num processo iterativo. Para isso procura-se explorar ao máximo o *ripple* admitido nas bandas de passagem e de rejeição.



$$N \approx \frac{15 - 10 \log_{10}(\delta_1 \delta_2)}{14 \Delta f} + 1$$

$$\Delta f = \frac{(w_H - w_L)}{2\pi}$$

JPT - PS

Filtros FIR – Em Matlab

B = FIR1(N,Wn) designs an N'th order lowpass FIR digital filter and returns the filter coefficients in length N+1 vector B.

The cut-off frequency Wn must be between $0 < Wn < 1.0$, with 1.0 corresponding to half the sample rate. The filter B is real and has linear phase. The normalized gain of the filter at Wn is -6 dB.

A=1;

Y = FILTER(B,A,X) filters the data in vector X with the filter described by vectors A and B to create the filtered data Y. The filter is a "Direct Form II Transposed" implementation of the standard difference equation:

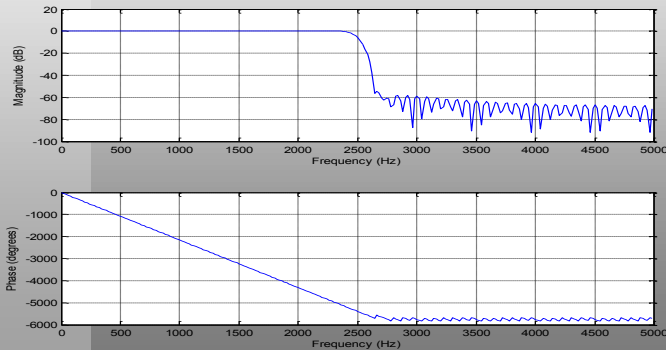
$$a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) \\ - a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$

JPT - PS

Filtros FIR – Em Matlab

- Filtro FIR de ordem 120, com $F_a=10000$ Hz e $F_c=2500$ Hz.

```
A=1;  
B=fir1(120,2500/5000);  
freqz(B,A,300,10000)  
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



JPT - PS

Filtros Digitais IIR

- São projectados a partir de filtros analógicos.
- Transformados em filtros digitais por um dos métodos:
 - Invariância da Resposta impulsional;
 - Transformação bilinear.
- Os filtros analógicos originais podem ser projectados tirando partido dos filtros de Butterworth, de Chebyshev e elípticos.

JPT - PS

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- **Consiste em impor que a resposta impulsional do filtro digital é uma amostragem da resposta impulsional do filtro analógico.**

$$h[n] = Th_a(nT)$$

- **O factor T garante que a amplitude da resposta em frequência dos dois filtros é a a mesma.**

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- **O método corresponde a um mapeamento dos pólos de $H_a(s)$ do plano s sobre o plano z:**

$$z_k = e^{s_k T}$$

- **Para a função de transferência do filtro analógico só com pólos simples:**

$$H_a(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k}$$

- **resulta a função de transferência do filtro digital:**

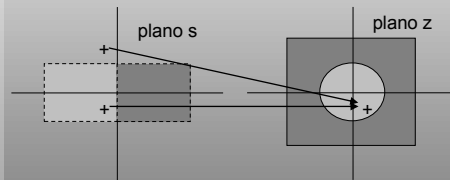
$$H(z) = T \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- O mapeamento não é biunívoco, já que todos os pólos

$$s_k + j \frac{2\pi r}{T}, \quad \text{com } r \text{ inteiro}$$

correspondem ao mesmo pólo z_k .



- dando origem à ocorrência de aliasing.

Filtros IIR – Método da Transformação Bilinear

- Permite passar directamente da função de transferência do filtro analógico para a função de transferência do filtro digital, pela substituição:

$$s \Rightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{2 + sT}{2 - sT}$$

- que define um mapeamento biunívoco.
- Um sistema contínuo causal e estável, dá origem a um sistema discreto causal e estável, porque todo o semiplano esquerdo de s é mapeado no interior da circunferência de raio unitário em z .

Filtros IIR – Método da Transformação Bilinear

- O eixo $j\Omega$ do plano s corresponde à circunferência unitária do plano z .

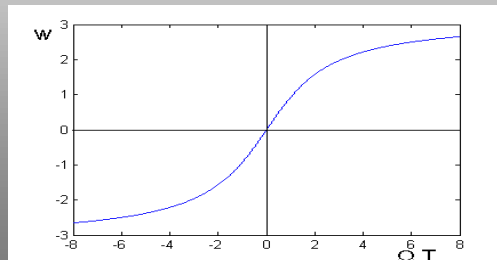
$$z = e^{j 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}$$

- Relação entre as frequências analógica Ω e digital ω :

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\omega_c = \frac{f_c}{f_a} 2\pi$$



Filtros IIR – Em Matlab Determinação da Ordem do Filtro

- Filtros Butterworth

`[N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws, Rp, Rs)` returns the order N of the lowest order digital Butterworth filter that loses no more than R_p dB in the passband and has at least R_s dB of attenuation in the stopband. W_p and W_s are the passband and stopband edge frequencies, normalized from 0 to 1 (where 1 corresponds to π radians/sample).

`BUTTORD` also returns W_n , the Butterworth natural frequency (or, the "3 dB frequency") to use with `BUTTER` to achieve the specifications.

- Filtros Chebyshev

`[N, Wn] = CHEB1ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)` Chebyshev Type I filter order selection.

`[N, Wn] = CHEB2ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)` Chebyshev Type II filter order selection

- Filtros Elipticos

`[N, Wn] = ELLIPORD(Wp, Ws, Rp, Rs)` Elliptic filter order selection

Filtros IIR – Em Matlab

Determinação da $H(z)$

- **Filtro de Butterworth**

BUTTER Butterworth digital and analog filter design.

$[B,A] = \text{BUTTER}(N,W_n)$ designs an Nth order lowpass digital Butterworth filter and returns the filter coefficients in length N+1 vectors B (numerator) and A (denominator). The coefficients are listed in descending powers of z. The cutoff frequency W_n must be $0.0 < W_n < 1.0$, with 1.0 corresponding to half the sample rate.

- **Filtro de Chebyshev**

CHEBY1 Chebyshev Type I digital and analog filter design.

$[B,A] = \text{CHEBY1}(N,R,W_n)$ designs an Nth order lowpass digital Chebyshev filter with R decibels of peak-to-peak ripple in the passband.

CHEBY2 Chebyshev Type II digital and analog filter design.

$[B,A] = \text{CHEBY2}(N,R,W_n)$

- **Filtro Eliptico**

ELLIP Elliptic or Cauer digital and analog filter design.

$[B,A] = \text{ELLIP}(N,R_p,R_s,W_n)$ designs an Nth order lowpass digital elliptic filter with R_p decibels of peak-to-peak ripple and a minimum stopband attenuation of R_s decibels.

JPT - PS

Filtros IIR Butterworth – Em Matlab

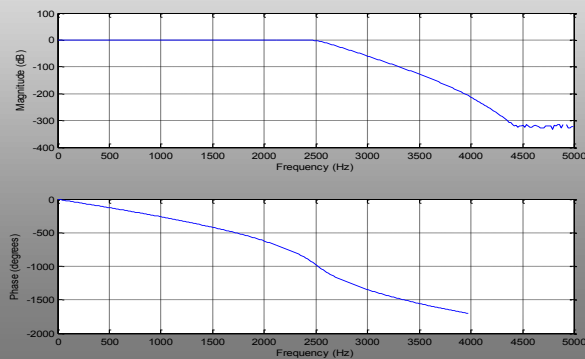
- **Filtro IIR com $F_a=10000$ Hz, $F_c=2500$ Hz.**

```
[N,Wn]=buttord(2500/5000,3000/5000,3,60);
```

```
[B,A]=butter(N,Wn);
```

```
freqz(B,A,300,10000);
```

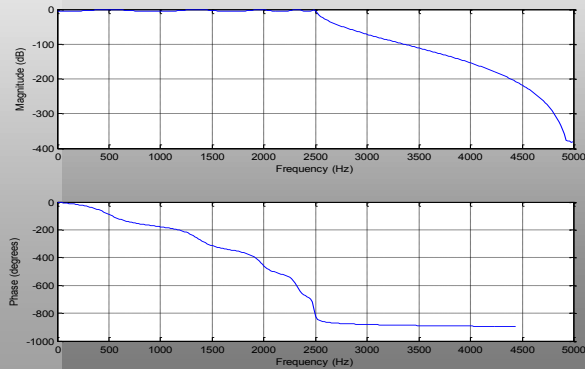
```
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



JPT - PS

Filtros IIR Chebyshev I – Em Matlab

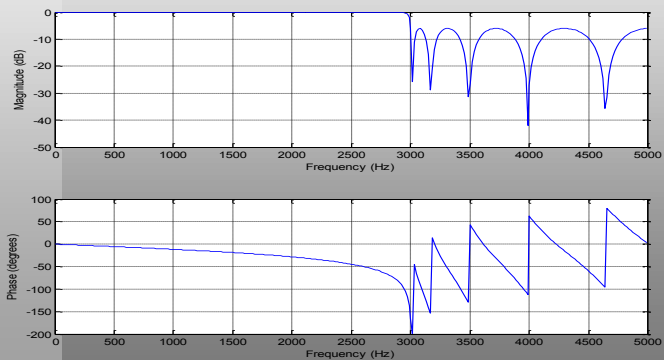
```
[N,Wn]=cheb1ord(2500/5000,3000/5000,3,60);  
[B,A]=cheby1(N,6,Wn);  
freqz(B,A,300,10000);  
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



JPT - PS

Filtros IIR Chebyshev II – Em Matlab

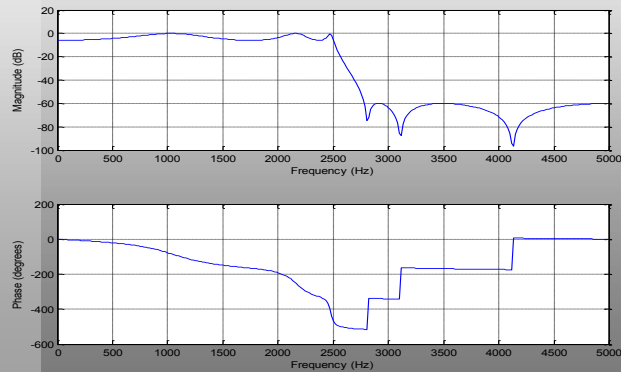
```
[N,Wn]=cheb2ord(2500/5000,3000/5000,3,60);  
[B,A]=cheby2(N,6,Wn);  
freqz(B,A,300,10000);  
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



JPT - PS

Filtros IIR Elíptico – Em Matlab

```
[N,Wn]=ellipord(2500/5000,3000/5000,3,60);  
[B,A]=ellip(N,6,60,Wn);  
freqz(B,A,300,10000);  
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



JPT - PS

Projecto de filtros analógicos

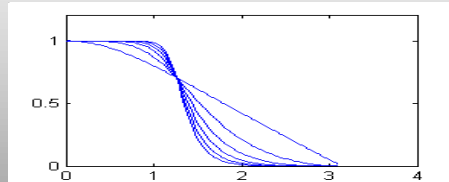
- Os filtros digitais são projectados a partir de filtros analógicos.
- Para o projecto de filtros analógicos aproveita-se o conhecimentos sobre os filtros:
 - Butterworth
 - Chebyshev
 - tipo I
 - tipo II

Porque é possível a partir do conhecimento da frequência de corte e da ordem do filtro, obter a função de transferência (pólos).

JPT - PS

Filtros de Butterworth

- Resposta em frequência monotónica (sem *ripple*).
- Exemplos da resposta em frequência para filtros de ordem 1 a 6:



- Módulo da resposta em frequência (com Ω_c - frequência angular de corte e N - ordem do filtro):
- $$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

JPT - PS

Filtros de Butterworth

- Determinação dos pólos:
 - resolvendo a equação:

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$
 - que admite $2N$ soluções igualmente espaçadas sobre uma circunferência de raio Ω_c e centrada na origem do plano s :

$$s_k = j\Omega_c e^{-j\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{2\pi}{2N}\right)}, \quad k=0..2N-1$$
 ou rodando em sentido contrário:

$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)}, \quad k=0..2N-1$$
 - e retendo apenas os N pólos situados no semi-plano esquerdo do plano s .

JPT - PS

Filtros de Butterworth

- A função de transferência dos filtros de Butterworth é do tipo:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + a_1 \frac{s}{j\Omega_c} + \dots + a_N \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)^N}$$

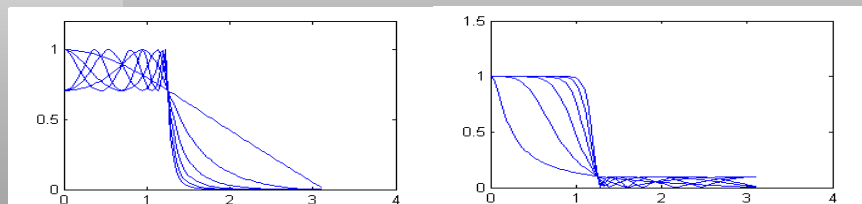
- os coeficientes $a_1 \dots a_N$ são retirados de uma tabela.
- A ordem N do filtro pode ser obtida pelo nomograma recorrendo às especificações do filtro, ou pela expressão:

$$N \geq \frac{\log \left(\sqrt{10^{0.1Am}} - 1 \right)}{\log w_c}$$

- A função de transferência é obtida em Matlab usando a função *butter*.

Filtros de Chebyshev

- Apresentam ripple numa das bandas, de passagem (tipo I) ou de bloqueio (tipo II), mas levam a soluções mais económicas em termos da ordem do filtro.
- Exemplos da resposta em frequência para filtros de ordem 1 a 6:



Filtros de Chebyshev

● Do tipo I

- apresentam *ripple* na banda de passagem (ϵ – atenuação na banda de bloqueio):

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}, \text{ em que}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & \text{se } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & \text{se não} \end{cases}$$

– Do tipo II

- apresentam *ripple* na banda de bloqueio:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega_c}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)}}$$

Filtro Passa Tudo

- Um filtro passa tudo tem a resposta em frequência constante para todas as frequências. A sua principal aplicação é a modificação da fase da resposta em frequência sem alterar a amplitude.
- Um sistema com um pólo em α e um zero em α^{*-1} é um filtro passa tudo.

$$H(z) = \frac{z - \alpha^{*-1}}{z - \alpha}$$

então

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|\alpha|}$$

Transformações no Domínio das Frequências

- **Através de uma mudança de variável adequadamente definida e com uma escolha correcta de um parâmetro é possível transformar um filtro passa baixo noutro tipo de filtro:**
 - passa baixo → passa baixo
 - passa baixo → passa alto
 - passa baixo → passa banda
 - passa baixo → rejeita banda (tampão)

Passa Baixo → Passa Baixo

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

- **em que**

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_p - \omega_p}{2}}{\sin \frac{\theta_p + \omega_p}{2}}$$

- **com**

θ_p - frequência de corte do filtro original

ω_p - frequência de corte do filtro pretendido

Passa Baixo → Passa Alto

- Mudança de variável:

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

- em que

$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\omega_p + \theta_p}{2}}{\cos \frac{\omega_p - \theta_p}{2}}$$

- com

θ_p - frequência de corte do filtro original

ω_p - frequência de corte do filtro pretendido

Passa Baixo → Passa Banda

- Mudança de variável:

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}$$

- em que

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

- com

$$k = \cot g \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$$

θ_p - frequência de corte do filtro original

ω_1 - frequência inferior de corte do filtro pretendido

ω_2 - frequência superior de corte do filtro pretendido

Passa Baixo → Rejeita Banda (Tampão)

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2k}{1+k} Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + 1}$$

- **em que**

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

- **com**

$$k = \operatorname{tg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$$

θ_p - frequência de corte do filtro original

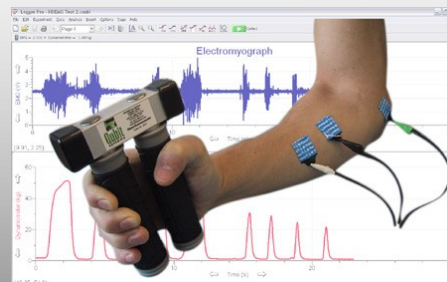
ω_1 - frequência inferior de corte do filtro pretendido

ω_2 - frequência superior de corte do filtro pretendido

Sinais Biológicos

- **ECG**
- **EEG**
- **EMG**
- **EOG**
- **Fala**
- **Etc...**

- Apresentação de trabalhos dos alunos sobre os diversos sinais biológicos.



Processamento de Sinal



FIM