INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

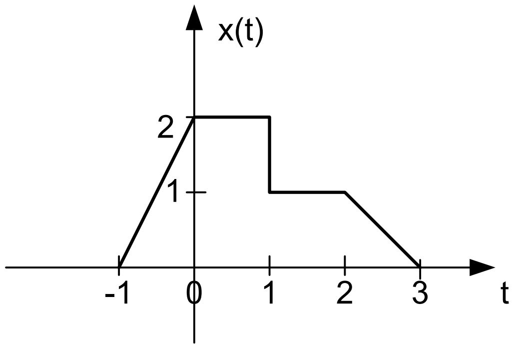
Processamento (Digital) de Sinal

Caderno de exercícios para as horas não presenciais

João Paulo Teixeira
ESTiG, 2014

Capítulo 1 – Sinais

1. Considere o Considere o seguinte sinal contínuo:



a. Represente y1(t)=2x(t+1).

b. Represente y2(t)=x(2t).

c. Represente y3(t)=x(-t-1).

d. Represente a componente par do sinal x(t).

e. Represente a componente ímpar do sinal x(t).

2. Considere o sinal x(t) representado na figura 1. Desenhe com rigor, recorrendo a representações intermédias se necessário, os seguintes sinais:

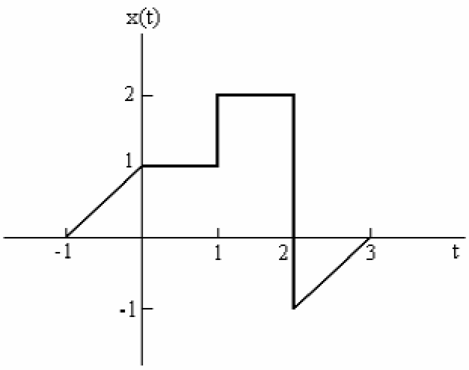


Fig. 1 – Sinal $x(t)$.

a. y(t)=0.5x(t-2)

b. y(t)=x(1-t)

c. y(t)=x(t)+x(t-1)

d. Determine as componentes par e ímpar do sinal.

3. Represente graficamente os seguintes sinais:

a. $a(t) = 2u(-t+3)$

b. $b(t) = u(t+1) + u(t) - 2u(t-1)$

c. $c(t) = a(t) + b(t)$

d. $d(t) = [u(t+2) - u(t)].t - t.[u(t) - u(t-2)]$

4. Considere o sinal contínuo:

$$x(t) = 2u(t+1) - u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3)$$

a. Represente graficamente o sinal x(t).

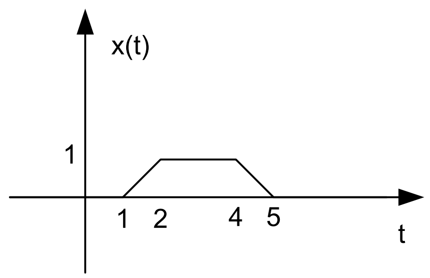
b. Represente $g(t) = x(\frac{1}{2}t)$.

c. Represente $v(t) = x(2t+1)$.

d. Determine e represente a componente par de x(t).

e. Determine e represente a componente ímpar de x(t).

5. Considere o seguinte sinal x(t)



a. Represente a(t)=x(-t+1)

b. Represente b(t)=-x(2t)

c. Represente c(t)=x(t)+u(t)-u(t-5)

d. Escreve x(t) usando uma única expressão matemática

6. Represente os seguintes sinais:

a. a(t)=u(t+2)-2u(t)+u(t-2)

b. b(t)=(t+2).[u(t+2)-u(t+1)]-t.[u(t+1)-u(t-1)]+(t-2)[u(t-1)-u(t-2)]

c. c(t)=3.a(-2t)

d. d(t)=a(t)+b(t)

e. Diga quais dos sinais representados são pares ou ímpares.

7. Represente os seguintes sinais:

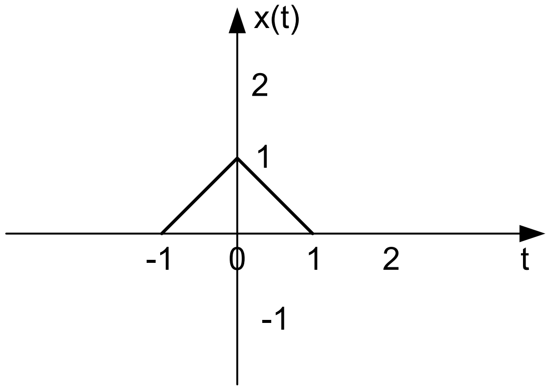
a. a(t)=δ(t+1)+2δ(t-0.5)-3δ(t-1.5)+δ(t-3).

b. b(t)=u(t)+u(t-1)+u(t-2)-4u(t-2.5).

c. $c(n)=\delta(n+2)-\delta(n+1)+2\delta(n-1)-2\delta(n-2)$.

d. $d(n)=u(n+2)+u(n-1)-2u(n-3)$.

8. Considere o seguinte sinal x(t) e realize as seguintes operações:



a. Desenhe os sinal $a(t)=x(-1-t)$.

b. Desenhe o sinal $b(t)=-2x(t-1)$.

c. Desenhe o sinal $c(t)=x(t)+a(t)$.

d. Escreva a expressão analítica para o sinal x(t).

Capítulo 2 – Sistemas

2. Verifique as seguintes condições para o sistema:

$$T\left\{x[n]\right\} = g[n]x[n]$$

a. O sistema é causal?

b. O sistema é linear?

c. O sistema é invariante no tempo?

d. O sistema é sem memória?

3. Considere o sistema:

$$y(n) = T\left\{x(n)\right\} = x(n-5)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

e. Verifique se o sistema é sem memória.

4. Considere o sistema:

$$y(n) = T\left\{x(n)\right\} = 2^n x(n)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

e. Verifique se o sistema é sem memória.

5. Considere o sistema:

$$y(n) = T\left\{x(n)\right\} = x(n) + u(n-1)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

6. Considere o sistema:

$$y(n) = T\left\{x(n)\right\} = sen(\pi.x(n))$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

7. Verifique as seguintes condições:

a. O sinal $x[n]=\cos(\pi n/4)$ é periódico?

b. O sistema $y[n]=x[-n]$ é invariante no tempo?

c. O sistema $y[n]=2^n x[n]$ é linear?

8. Considere a associação em série H de dois sistemas discretos H_1 e H_2. Sabendo que a resposta impulsional $h_1(n)$ de H_1 é

$$h_1(n)=u(n) - u(n-3)$$

e que a resposta impulsional h(n) de H é

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-3)$$

calcule:

a. a resposta impulsional $h_2(n)$ de H_2;

b. a resposta de y(n) de H à entrada $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

9. Considere o sistema discreto:

$$y[n] = - x[n-1] + x[n-2]$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

10. Considere o sistema discreto:

$$y[n] = x[n-1] - x[n-3]$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

11. Considere o sistema discreto com a seguinte resposta impulsional h[n]=[1, 0, 2]:

a. Determine a resposta do sistema y[n], à entrada x[n]= [1, 0, 1], pelo método da convolução.

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Qual seria a resposta do sistema à entrada x[n]= [1, 2, 3], usando a equação às diferenças?

12. Considere o sistema discreto:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)}{4}$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

d. Escreva o código em Matlab para fazer a representação gráfica (módulo e fase) de $H(e^{jw})$.

Capítulo 3 – Amostragem de Sinais Contínuos

1. Considere o sinal contínuo:

$$x_c(t) = 2\sin(2\pi.200t + \frac{\pi}{4})$$

- **a.** Indique um valor razoável para a frequência de amostragem do sinal, próximo da frequência mínima de amostragem. Justifique.
- **b.** Escreva a expressão do sinal x[n], amostrado à frequência indicada na alínea anterior.
- **c.** Verifique se o sinal resultante x[n], é periódico, e em caso afirmativo, qual o período.

2. Considere o sinal contínuo $x_c(t) = sen(5000\pi t)$

- **a.** Indique o valor da frequência, f_0, do sinal.
- **b.** Indique o valor da frequência angular do sinal, Ω_0.
- **c.** O sinal é amostrado com um período de amostragem de 1/6000 s. Qual a frequência angular de amostragem, Ω_s?
- **d.** Qual a expressão do sinal amostrado resultante?
- **e.** Diga se foi cumprido o teorema da amostragem e porquê.
- **f.** Explique o fenómeno de aliasing, indicando quando ocorre e em que consiste.

Capítulo 4 – Transformada Z

1. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2)}{2}$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n) e a sua transformada z, H(z).

b. Determine e represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

2. Considere o seguinte sistema discreto

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.1z^{-3}}$$

a. Escreva a equação às diferenças que implementa o sistema.

b. Determine a resposta y(n) (com n até 10) à entrada x(n) = [2 –1 0 1 –1]

3. A resposta de um sistema discreto à entrada x(n)=[1 0 1] é y(n)=[1 2 2 2 1].

a. Determine a sua resposta em frequência H(z).

b. Determine a sua resposta impulsional h(n).

c. Determine a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente $H(e^{jw})$ em módulo e fase.

4. Considere o sistema com a seguinte resposta impulsional: h(n) = [1 0 0 2 0]

a. Determine a resposta do sistema à entrada x(n) = [1 0 0 1].

b. Determine a transformada z H(z).

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

5. Considere a seguinte função

$$x(n) = 0.9^n \cos(n\frac{\pi}{4})u(n)$$

a. Determine a sua transformada z, X(z) e respectiva região de convergência.

b. Determine e represente graficamente no plano z os pólos e zeros da função. Represente também a região de convergência.

c. Diga, justificando, como se comporta a função relativamente à estabilidade e à causalidade.

6. Considere o seguinte sistema discreto

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine e represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

c. Determine a sua função de transferência H(z) e localize no plano z os seus pólos e zeros.

7. Considere o sistema com a seguinte resposta impulsional: h(n) = [1 1 0 2 2]

a. Determine a resposta do sistema à entrada x(n) = [1 0 0 1].

b. Determine a transformada z H(z).

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

8. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{0.5}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Indique um algoritmo, ou as linhas de código em Matlab, que implementam o sistema.

9. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{0.5}{z^2 - \frac{5}{6}z - \frac{1}{6}}$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Este sistema tem Transformada de Fourier? Justifique.

10. A resposta de um sistema à entrada x[n]=[1, 1] é y[n]=[1, 1, 1, 1].

a. Determine a função de transferência do sistema H[z].

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Determine a resposta em frequência do sistema $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente, módulo e fase, de $H(e^{jw})$.

11. Considere o sistema discreto

$$y(n) = 2x(n-1) - 2x(n-5)$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine a sua transformada z, H(z).

c. Determine a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

12. Considere o seguinte sistema estável:

$$H(z) = \frac{2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

a. Represente no plano z os seus polos e a respectiva região de convergência (justifique).

b. Determine a sua resposta impulsional, h(n), pelo método da decomposição em fracções simples.

c. Diga, justificando, se o sistema é causal.

13. Considere o seguinte sistema discreto

$$H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.4z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$

a. Escreva a equação às diferenças que implementa o sistema.

b. Determine a resposta y(n) (com n=0 até 5) à entrada: x(n) = [2 –1 0 1]

14. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{2z^{-1}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

a. Represente no plano z os pólos, zeros e ROC do sistema. Diga se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Indique um algoritmo, ou as linhas de código em Matlab, que implementam o sistema.

Capítulo 5 – DFT – Transformada Discreta de Fourier

1. Considere o sinal discreto de comprimento 4.

x(n) = [1 1 0 0]

a. Determine a sua DFT, X(k) e represente-a graficamente em módulo e fase.

b. A partir de X(k) e <u>usando as propriedades da DFT</u>, determine a DFT Y(k) do sinal discreto de comprimento 8: y(n) = [0 0 0 1 1 0 0 0]

2. Um dos métodos usados para o cálculo da Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT) faz uso da seguinte relação:

$$x_i(n) + jx_r(n) = N^{-1} DFT(X_I(k) + jX_R(k))$$

a. Prove a veracidade da relação.

b. Dispondo do programa de cálculo da DFT diga como procederia para determinar a IDFT usando a relação anterior.

3. Considere os sinais:

x(n)=[1 0 –1 0]
y(n)=[0 2 0 -2]

a. Determine a DFT de x(n), X(k).

b. Determine a DTF de y(n) a partir da DFT de x(n) e das propriedades da DFT (sem aplicar a expressão da DFT ao sinal y(n)).

c. Determine a DFT da convolução circular dos sinais x(n) e y(n).

4. Considere os sinais:

x(n)=[1 1 0 0]

y(n)=[0 0 2 2]

a. Determine a DFT de x(n), X(k).

b. Determine a DTF de y(n) a partir da DFT de x(n) e das propriedades da DFT (sem aplicar a expressão da DFT ao sinal y(n)).

c. Determine a DFT da convolução circular dos sinais x(n) e y(n). Se não determinou as alíneas anteriores considere que $X[k] = [2, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}]$ e $Y[k] = [4, 2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}, 0, 2\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}]$.

5. Considere os sinais:

h(n)=[0 0 2 3]

x(n)=[1 1]

a. Determine a convolução linear dos dois sinais, y(n)=h(n)*x(n), recorrendo à operação convolução. (Faça a representação gráfica).

b. Determine a convolução circular dos dois sinais com N=4, y(n)=h(n)$\circledast$x(n), recorrendo à operação convolução circular. (Faça a representação gráfica).

c. Compare os dois resultados e justifique as eventuais diferenças.

d. Sabendo que a multiplicação das DFT's corresponde à convolução circular dos respectivos sinais, como poderia realizar a convolução linear recorrendo às DFT's?

6. O algoritmo raiz 2, decimação no tempo, baseia-se na consideração do sinal x(n), de comprimento par, decomposto em g(n) e h(n) da seguinte forma:

g(n)=x(2n)
h(n)=x(2n+1), n=0...N/2-1

resultando

X(k)=G(k)+W_N^k H(k)

X(k+N/2)=G(k)- W_N^k H(k) com k=0...N/2-1

Em que G(k) e H(k) são as DFT de comprimento N/2 de g(n) e h(n), respectivamente.

a. Mostre, recorrendo-se de borboletas, como é realizado o cálculo de uma DFT de comprimento 8 (não precisa mostrar o diagrama de borboletas para o cálculo das DFT de comprimentos 4 e 2).

b. No caso anterior, mas, considerando agora as DFT de comprimento 4 e 2, determine, justificando, o numero de adições e multiplicações necessárias.

c. Compare, do ponto de vista do número de adições e multiplicações, os algoritmos de raiz 2, raiz 4 e raiz dupla.

d. Escreva o código em Matlab para determinar e representar módulo e fase da FFT de comprimento 1024, do sinal x com comprimento 900 amostras.

7. Pretende-se calcular a convolução linear de um sinal de comprimento 60 com um sinal de comprimento 1242, usando a DFT e iDFT de comprimento 128.

a. Determine o número de DFT e iDFT necessárias, se usar o método overlap-add.

b. Determine o número de adições e de multiplicações realizadas neste cálculo, sabendo que foi usado um algoritmo raiz 2 na determinação das DFT. A iDFT é determinada com o mesmo número de adições e multiplicações que a DFT.

8. Pretende-se filtrar um sinal discreto x(n), de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 65, utilizando a convolução rápida, pelo método "overlap add".

a. Indique as operações que estão envolvidas neste processo e mostre, recorrendo-se de uma figura, a sobreposição usada neste método.

b. Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações a realizar por amostra do sinal de saída. Considere que N não pode exceder 512 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

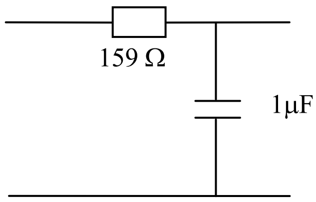
9. Pretende-se usar DFT e DFT inversas de comprimento 128 para efectuar, através do método *overlap-save*, a convolução linear entre um sinal de comprimento 320 e um filtro de comprimento 49.

a. Supondo que a transformada do filtro é conhecida, diga justificando, qual o número de DFT e DFT inversas necessário para implementar a convolução desejada.

b. Supondo que as DFT e DFT inversas são determinadas com o mesmo número de operações de multiplicação e adição, e que são determinadas com um algoritmo raiz 2, quantas adições e multiplicações serão realizadas nesta filtragem?

Capítulo 6 – Filtros

1. Considere o seguinte filtro RC passa-baixo.



a. Indique a frequência de corte, f_c, do filtro analógico.

b. Indique a frequência angular de corte, Ω_c, do mesmo filtro.

c. Determine a função de transferência, H(s), do filtro analógico.

d. Usando o método da Invariância da Resposta Impulsional, obtenha H(z) do filtro, supondo que a frequência de amostragem é de 20 kHz.

e. Escreva a equação às diferenças y(n) que implementa o filtro pretendido (Se não resolveu a alínea anterior suponha $H(z) = \dfrac{0.1\pi}{1 - e^{-0.1\pi} z^{-1}}$).

f. Escreva o código em matlab que implementaria o filtro projectado.

2. Compare dos pontos de vista da função do sistema, da resposta impulsional, características da fase, estabilidade, complexidade e estrutura os filtros FIR com os filtros IIR.

3. Indique sucintamente as diferentes etapas por que deve passar o processo de projecto de um filtro sendo dadas as suas especificações.

4. Pretende-se amostrar um sinal analógico à frequência de amostragem de 20 Khz e realizar uma filtragem digital passa baixo com frequência de corte de 1 Khz com um filtro obtido, pelo método da transformação bilinear, a partir de um filtro analógico RC elementar.

a. Qual deverá ser a frequência de corte do filtro analógico Ω_C.

b. Escreva a função de transferência $H_a(s)$ do filtro analógico.

c. Obtenha a transformada z, H(z) do filtro digital pretendido.

d. Escreva a equação às diferenças que implementa o filtro.

5. Apresente as linhas de código em MATLAB necessárias para realizar as seguintes tarefas:

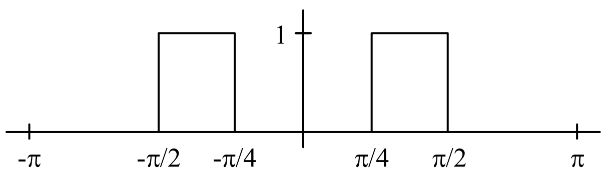
   a. Criar uma amostragem do sinal x(t)=5sen(Ωt)+3sen(3Ωt) com Ω=2pi*10 rad/s, com uma frequência de amostragem de 1000Hz.

   b. Determinar e representar a DFT, com comprimento 1024, do sinal x. Use o eixo horizontal para indicar os valores da frequência.

   c. Filtre o sinal x com o filtro causal dado e represente o sinal à saída do filtro.

   y(n)= x(n)+2x(n-1)-y(n-1)-0.5y(n-2)

6. Pretende-se projectar um filtro digital com a resposta em frequência indicada.



   a. Determine a resposta impulsional $h_d(n)$ do filtro pretendido.

   b. Utilizando uma janela de Hamming, projecte um filtro FIR, causal, de fase linear, com comprimento 5, que aproxime o filtro pretendido.

   c. Represente graficamente a amplitude da resposta em frequência do filtro obtido.

7. Pretende-se amostrar um sinal analógico com fa=50KHz, e realizar uma filtragem passa baixo com frequência de corte fc=2KHz com um filtro de 1ª ordem obtido a partir de um filtro RC analógico.

   a. Implemente o referido filtro utilizando o método da invariância da resposta impulsional.

   b. Represente graficamente o módulo da resposta em frequência, $|H(e^{jw})|$. Comente o resultado.

   c. Utilizando as transformações no domínio das frequências, determine, a partir do filtro passa baixo anterior, um filtro passa alto com fc=8KHz.

8. Pretende-se filtrar um sinal x[n], amostrado a uma frequência de 11025 Hz, com um filtro passa-baixo, sendo dadas as seguintes especificações:

Limite da banda de passagem – f_c=1000 Hz

Limite da banda de rejeição – f_p=2500 Hz

Ripple admitido na banda de passagem – A_M=3 dB

Ripple admitido na banda de rejeição – A_m=40 dB

a. Indique as linhas de código que usaria em Matlab para determinar os coeficientes deste filtro e a posterior filtragem do sinal x.

b. Suponha que no vector B=[B_1, B_2, B_3,..] tem os coeficientes do numerador do filtro e que no vector A=[1, A_2, A_3,...]tem os coeficientes do denominador do filtro. Escreva a equação às diferenças que lhe permite implementar o filtro. (Suponha que o filtro tem ordem 4).

c. Escreva as linhas de código em Matlab que lhe permitem implementar o filtro usando a equação às diferenças.

9. Pretende-se gravar um sinal de fala x(t). Esse sinal deve ser amostrado a uma frequência de amostragem de 22.050 kHz.

a. Para se evitar a ocorrência de *aliasing*, o sinal será previamente filtrado com um filtro anti-*aliasing*. Indique as características desse filtro (tipo de filtro e frequência de corte).

b. Suponha agora que já dispõe do sinal amostrado, x(n). Pretende-se remover de x(n) as componentes de frequência acima de 3400 Hz (a 3 dB). A atenuação mínima a 6800 Hz deverá ser de 40 dB. Represente graficamente a especificação do filtro.

c. Usando o nomograma em anexo determine a ordem mínima do filtro de Butterworth que garante as especificações.

d. Escreva as linhas de código em matlab que implementariam o filtro projectado.

10. Filtros FIR

a. Diga quais as técnicas que conhece para o projecto de filtros digitais do tipo FIR.

b. Refira-se à importância da escolha da janela para projecto destes filtros. Refira as principais janelas.

c. Projecte e escreva as linhas de código em Matlab que implementam o seguinte filtro passa baixo : A_M=3dB, A_m=60 dB, limite da banda de passagem Fp=5 KHz, limite da banda de corte, Fc=7 KHz. Sabendo que a frequência de amostragem foi de 25 KHz.