INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Processamento (Digital) de Sinal

Caderno de exercícios para as aulas

João Paulo Teixeira
ESTiG, 2014

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
Matlab

1. Identificar no ambiente Matlab o 'Command Window', o 'Workspace', o 'Current Directory' (caixa de visualização dos ficheiros e a caixa com o caminho) e o 'Command History'.

2. Criar variáveis na linha de comandos: a=5; b=3+2i; c=[1 2 3 4]; d=[1;2;3;4];

   e= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3+i \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2i \end{bmatrix}$; Ver a utilização do ; no final da linha de comandos, ver as variáveis no workspace.

   Altere o valor e(2,2)=10.

3. Realizar as seguintes operações e verificar as diferenças:
   a. f=c*d
   b. g=d*c
   c. h=c.*d'

4. Criar e representar os seguintes sinais.

   a. Na linha de comandos criar o sinal x como uma onda sinusoidal contínua com t entre 0 e 0.1 segundos com espaçamento de 1 ms. O sinal deve ter uma amplitude de 4 e uma frequência de 50 Hz. [x=A*sin(2*pi*f*t+fase)]

   b. Usando o comando *plot* represente o sinal x. Use os comandos *xlabel*, *ylabel*, *title* e *grid* para dar nomes aos eixos, ao título e colocar uma grelha na figura.

5. Abra um ficheiro .m para escrever o código (script) para realizar as seguintes operações:

   a. Coloque em comentário (%) nas primeiras linhas do programa alguma informação sobre o que faz o programa, a identificação do autor e a data

   b. Criar o sinal x1 como uma onda sinusoidal contínua com t entre 0 e 0.1 segundos com espaçamento de 1 ms. O sinal deve ter uma amplitude de 4 e uma frequência de 50 Hz.

   c. Crie o sinal x2 como sendo o harmónico de ordem 3 do sinal x1, com amplitude 2.

   d. Crie os sinais y e z como sendo a soma e a subtração, respetivamente dos dois anteriores.

   e. Represente em quatro subfiguras os 4 sinais criados, usando os comandos *plot* e *subplot*.

6. Num script use um ciclo *for* para determinar o seguinte somatório:

$$S = \sum_{i=5}^{35} i^2$$

7. Determine o somatório anterior usando um ciclo *while*.

8. Determine o somatório anterior apenas para os valores de i ímpares, usando um ciclo *for*, a condicionante *if* e a função *mod* (resto da divisão).

9. Crie uma função para gerar ondas sinusoidais. A função deve receber como parâmetros de entrada o vetor tempo t, a amplitude A, a frequência f e a fase phi.

10. A partir da linha de comandos invoque a função criada no exercício anterior para gerar uma onda sinusoidal com t entre -2 e 2 segundo com intervalos de 1 ms, amplitude 3, frequência 16 Hz e fase $\pi/2$ rad. Represente a onda gerada e verifique se a onda corresponde aos parâmetros usados.

11. Crie uma função que determina a amplitude média deslizante de um sinal. A função deve receber como parâmetros de entrada o sinal e o comprimento da janela N e devolver o sinal com a amplitude media deslizante. A amplitude média deslizante é dada pela seguinte função (use a função *mean* para determinar a média):

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x(i)$$

12. Crie um script em que gera uma onda sinusoidal (invocando a função criada no exercício 9) com t entre -1 e 1, espaçamento de 1 ms, A=3, f=10 Hz. Adicione um sinal com o mesmo comprimento do anterior composto por ruído com amplitude entre -1 e 1 (use a função rand). Filtre o sinal resultante com a média deslizante (função criada no exercício 11) usando um comprimento de janela N=10. Verifique que a função de media deslizante permite alisar o sinal com ruído removendo parte do ruído e ficando a onda sinusoidal. Experimente outros valores de N que melhor alisam o sinal.

13. Crie uma função que determina a média deslizante do módulo do sinal. Aplique esta função para alisar o sinal do exercício anterior. Identifique as diferenças.

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} |x(i)|$$

14. Verifique que o resultado é diferente da aplicação do módulo da média deslizante, consoante a expressão seguinte:

$$M(n) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x(i) \right|$$

15. Crie uma função que determina a energia média deslizante do sinal. Aplique esta função para alisar o sinal do exercício anterior. Identifique as diferenças.

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x^2(i)$$

16. Na linha de comandos, crie um vetor de tempo t entre -1 e 1 segundos com 1 ms de espaçamento. Crie e represente impulsos de dirac [δ(t-t0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de t0:
    - x=(dirac(t-t0))~=0;
    - x=t==t0;

17. Na linha de comandos, crie um vetor n entre -20 e 20. Crie e represente impulsos unitários discretos [δ(n-n0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de n0:
    - x=(dirac(n-n0))~=0;
    - x=n==n0;

18. Na linha de comandos, crie um vetor de tempo t entre -1 e 1 segundos com 1 ms de espaçamento. Crie e represente degraus de heaviside [u(t-t0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de t0:
    - x=heaviside(t-t0);
    - x=(heaviside(t-t0)~=0);
    - x=t>=t0;

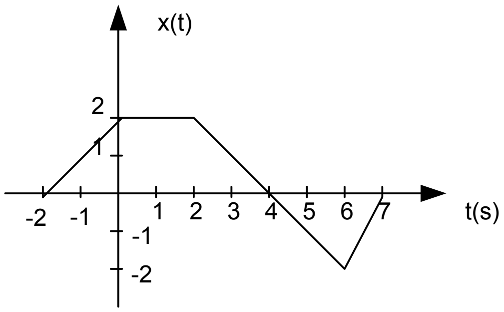
19. Na linha de comandos, crie um vetor n entre -20 e 20. Crie e represente degraus unitários discretos [u(n-n0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de n0:
    - x=heaviside(n-n0);
    - x=(heaviside(n-n0)~=0);
    - x=n>=n0;

20. Usando as funções *dirac* e *heaviside* crie e represente os seguintes sinais (com t=-1:0.001:1; e n=-30:30):
    a. a(t)=-δ(t+0.4)+δ(t)+2δ(t-0.5)
    b. b(t)=u(t+0.5)-2u(t)+u(t-0.5)
    c. c(t)=u(-t-0.5)+u(t-0.5)
    d. d(n)=2δ(n+5)-δ(n+2)+4δ(n)-δ(n-2)+2δ(n-5)
    e. e(n)=u(n+15)+u(n+10)+u(n+5)-4u(n)-u(n-10)
    f. f(n)=-u(-n+5)+u(n-5)
    g. g(n)=-u(-n+5)+u(n+5)
    h. h(n)=-u(-n-5)+u(n-6)

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
Sinais e Sistemas

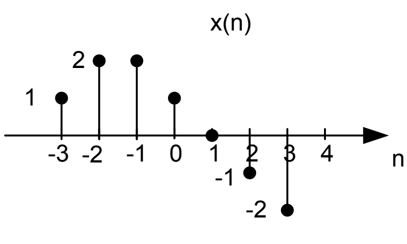
Sinais

1. Considere o seguinte sinal contínuo x(t):



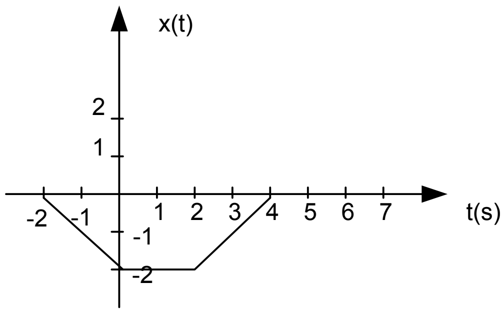
   a. Represente $y(t)=\frac{1}{2}x(t)$
   b. Represente $y(t)=2x(t+3)$
   c. Represente $y(t)=x(2t)$
   d. Represente $y(t)=x(2t+2)$
   e. Represente $y(t)=\frac{1}{2}x(-t+4)$
   f. Represente $y(t)=\frac{1}{2}x(t)+x(2t+2)$
   g. Represente $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$

2. Considere o seguinte sinal discreto x(n):

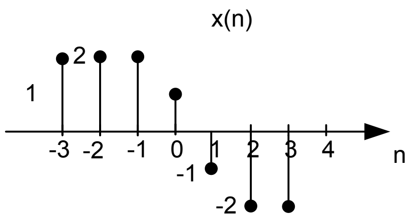


   a. Represente $y(n)=1.5x(n)$
   b. Represente $y(n)=2x(n-3)$
   c. Represente $y(n)=x(3n)$
   d. Represente $y(n)=2x(3-n)$
   e. Represente $y(n)=2x(n)-2x(3-n)$

3. Determine as componentes par e ímpar dos seguintes sinais:
   a.



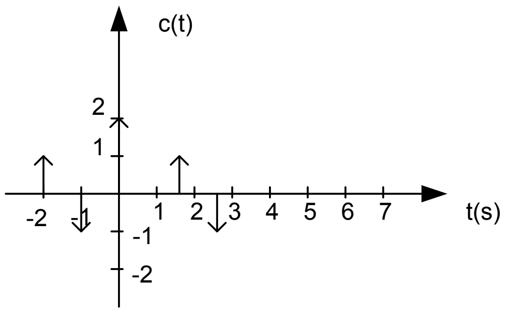
   b.



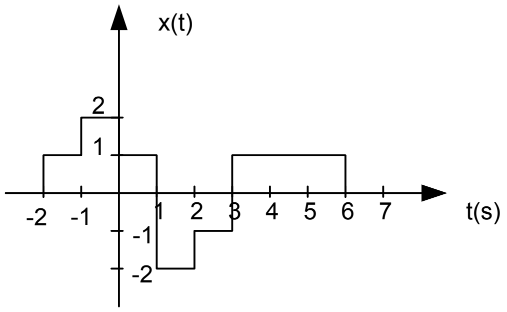
4. Verifique se os seguintes sinais são periódicos. Em caso afirmativo, indique o período N.
   a. $q(n) = 21\cos(32\pi n)$
   b. $w(n) = 10\sin(\frac{12}{5}\pi n + \frac{\pi}{2})$
   c. $e(n) = 2\sin(1.5n)$

5. Represente os seguintes sinais:
   a. $r(t) = u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-4) - u(t-6)$
   b. $y(t) = 2\sin(2\pi t).[u(t) - u(t-1)]$
   c. $i(t) = 2u(2-t)$
   d. $o(t) = 2u(-2-t) - 2u(t+2)$
   e. $p(t) = 2\delta(t+1) - \delta(t) + \delta(t-0.75)$
6. Represente os seguintes sinais:
   a. $a(n) = 2u(n+2) - 2u(n) + 2u(n-2) - 2u(n-4)$
   b. $s(n) = 2\sin(\frac{\pi}{3}n)[u(n) - u(n-7)]$
   c. $d(n) = -2u(4-n)$
   d. $f(n) = -\delta(n+2) - 0.5\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1) + \delta(n-2)$

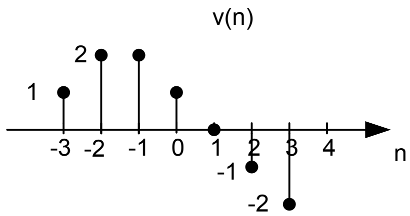
7. Escreva as equações dos seguintes sinais:
   a.



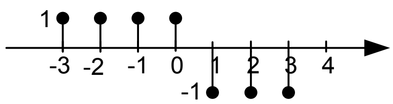
   b.



   c.



   d.



Sistemas

8. Considere o sistema discreto

$$y[n] = \frac{x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]}{4}$$

   a. Determine a sua resposta impulsional h[n].
   b. Determine a sua resposta y[n] à entrada x[n]=[0.5, 1, 1, 0.5].

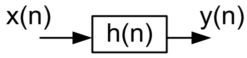
9. A resposta impulsional de um sistema discreto H é

$$h[n] = 2^{-n} u[n]$$

Determine e represente graficamente a sua resposta y[n] à entrada

$$x[n] = u[n] - u[n-10]$$

10. Considere um sistema contínuo LIT com resposta impulsional h(n)=u(n-1)-u(n-4). Determine a resposta do sistema à entrada: x(n)=δ(n)+2δ(n-1)+3δ(n-2).



11. Considere o filtro de média de comprimento 5

$$y[n] = \frac{x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3]+x[n-4]}{5}$$

   a. Determine a sua resposta impulsional h[n].
   b. Determine e resposta em frequência $H(e^{jw})$.
   c. Represente graficamente o módulo e fase de $H(e^{jw})$.
   d. Faça agora a representação da alínea anterior em Matlab.

12. Considere um filtro passa baixo ideal com frequência de corte w=0.5 rad.

   a. Represente $H(e^{jw})$.
   b. Determine a resposta impulsional h[n].
   c. Represente graficamente em Matlab a resposta impulsiona com n entre -20 e 20.

13. Para cada um dos seguintes sistemas verifique se é: estável, causal, linear, invariante no tempo e sem memória.
   a. $T(x[n]) = g[n]x[n]$
   b. $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$
   c. $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
   d. $T(x[n]) = x[n-n_0]$
   e. $T(x[n]) = e^{x[n]}$
   f. $T(x[n]) = ax[n]+b$
   g. $T(x[n]) = x[-n]$
   h. $T(x[n]) = x[n]+3u[n+1]$

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
AMOSTRAGEM DE SINAIS CONTÍNUOS

1. Enuncie em que condições um sinal contínuo $x_c(t)$ pode ser representado por um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de $x_c(t)$.

2. Considere o sinal contínuo $x_c(t)=\cos(4000\pi t)$, que foi amostrado com um período de amostragem Ta=1/6000 s.

   a. Qual a frequência angular do sinal Ω_0
   b. Qual a frequência angular digital do sinal w_0
   c. Qual a frequência angular de amostragem Ω_s
   d. Foi cumprido o teorema da amostragem?
   e. Qual o expressão do sinal amostrado resultante x[n]?

3. O sinal contínuo $x_c(t)=\sin(2\pi*100t)$ foi amostrado com o período de amostragem T=1/400 s. Qual a expressão do sinal discreto resultante da amostragem x[n]?

4. A sequência $x[n]=\cos(\pi n/4)$, $-\infty<n<\infty$, foi obtida por amostragem do sinal

   $$x_c(t)=\cos(\Omega_0 t) \quad -\infty<t<\infty$$

   à frequência de amostragem de 1000 amostras/s. Quais são os valores positivos possíveis de Ω_0 que podem ter resultado em x[n]?

5. O sinal contínuo $x_c(t)=\cos(4000\pi t)$ foi a mostrado com um período de amostragem Ta, tendo resultado

   $$x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

   a. Determine um Ta consistente.
   b. A escolha de Ta da alínea anterior é única? Se sim explique porquê, senão determine outro valor para Ta também consistente.

6. Considere os sinais discretos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tais que:

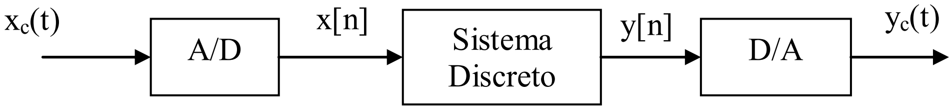
   $$|\Omega|>\Omega_1 \Rightarrow X_1(j\Omega)=0$$
   $$|\Omega|>\Omega_2 \Rightarrow X_2(j\Omega)=0$$
   $$\Omega_2>\Omega_1$$

   Determine a frequência de amostragem mínima necessária para representar x(t) nos casos:

   a. $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

b. $x(t)= x_1(t).x_2(t)$
c. $x(t)=x_1(t)*x_2(t)$

7. Considere o sistema da figura sendo o sistema discreto um filtro passa baixo ideal com frequência de corte $\pi/8$ rad/s.



a. Se $x_c(t)$ é limitado à frequência de 5 kHz, qual o valor máximo de Ta para evitar aliasing no conversor A/D?
b. Se 1/Ta=10 kHz qual deverá ser a frequência de corte efectiva do filtro?

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
Transformada z

1. Calcule as transformadas z das seguintes sequências, especificando as suas regiões de convergência:

   a. $x(n) = k2^n u(n)$
   b. $x(n) = u(-n+1)$
   c. $x(n) = -k2^n u(-n-1)$
   d. $x(n) = 0.5^n u(n) + 3^n u(-n)$
   e. $x(n) = 4^{-n} u(n) + 5^{-n} u(n+1)$

2. Considere o sistema discreto causal

   $$y[n] = 2x[n] + 0.7y[n-1] - 0.1y[n-2]$$

   a. Determine a sua função de transferência H(z).
   b. Calcule a resposta impulsional h[n].
   c. Represente em Matlab (fazendo uso da função *freqz*) a amplitude e fase de $H(e^{jw})$. (Use também a função *roots* para determinar as raízes do polinómio).

3. Determine a transformada inversa pelo método da decomposição em fracções simples, considerando o sistema causal:

   $$H(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+0.8)}$$

4. Considere o sistema discreto causal com a função de transferência

   $$H(z) = \frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.64z^{-2}}$$

   a. Localize no plano z os pólos e zeros deste sistema e a região de convergência de H(z).
   b. Recorrendo à função *zplane* do Matlab, localize no plano z os pólos e zeros deste sistema.
   c. Determine a sua resposta impulsional h[n] pelo método da decomposição em fracções simples.
   d. Determine a sua resposta impulsional h[n] pelo método dos resíduos.
   e. Determine a equação às diferenças que rege o sistema.

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
DFT

1. Calcule a DFT do sinal discreto:

   a. x[n]=[0, 1, 1, 0].
   b. x_1[n]=[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0]. Recorra ao resultado da alínea anterior.

2. Implemente em Matlab uma script que:

   - cria os sinais x[n]=[1,1,1,1,1,1,1,0,0,1] e h[1,1,1,0,1]
   - faz a convolução entre os dois sinais usando a função *conv* e retornando o sinal y[n]. Meça o tempo que demora esta operação recorrendo às funções *tic* e *toc*. Se a operação é realizada num tempo não medido por essas funções faça um ciclo em que realiza a mesma operação N vezes.
   - faz a convolução recorrendo à função *fft*, em que realiza as DFT dos sinais x[n] e h[n] com os comprimentos originais. Meça também o tempo que demora esta operação. Verifique que realizou uma convolução circular.
   - faz a convolução linear recorrendo à função *fft*. Meça também o tempo que demora esta operação.
   - Apresente os resultados das 3 convoluções num mesmo gráfico.
   - Que conclui em relação aos tempos de processamento de cada operação?

3. Faça uma função em Matlab que implemente a convolução de um sinal de comprimento indeterminado, recorrendo à função *fft*, pelo método:
   a. 'Overlap-add'.
   b. 'Overlap-save'

4. Faça um script em Matlab que realize as seguintes operações:
   - cria um sinal sinusoidal com uma frequência de 50 Hz, uma amplitude 2, com uma frequência de amostragem Fa=1000 Hz.
   - represente 0.4 segundos desse sinal numa janela com 4 sub-figuras.
   - filtre esse sinal com um filtro de média de comprimento 5 definido pela equação às diferenças:

$$y[n]=\frac{x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3]+x[n-4]}{5}$$

   - usando a própria equação às diferenças. Represente o sinal filtrado noutra das 4 sub-figuras.
   - supondo que o sinal sinusoidal de entrada é de comprimento indefinido, use a convolução com a fft de comprimento 64, pelo método "overlap-add". Represente o sinal filtrado noutra das 4 sub-figuras.

- supondo que o sinal sinusoidal de entrada é de comprimento indefinido, use a convolução com a fft de comprimento 64, pelo método "overlap-save". Represente o sinal filtrado na outra sub-figura.

5. Pretende-se filtrar um sinal discreto x[n], de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 71, utilizando a convolução rápida, pelo método 'Overlap-add'.
   Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações a realizar por amostra à saída. Considere que N não pode exceder 2048 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

6. Faça um fluxograma para um programa para a FFT, algoritmo de decimação na frequência, entradas ordenadas.

Processamento (Digital) de Sinal
ESTiG - IPB
Exercícios
Filtros

1. Projecte um filtro digital passa banda, do tipo FIR, tal que

$$H(e^{j\Omega T}) \approx \begin{cases} 0 & |\Omega| < 400 \ \ rad/s \\ 1 & 400 \le |\Omega| \le 600 \ \ rad/s \\ 0 & 600 \le |\Omega| \le 1000 \ \ rad/s \end{cases}$$

Para a frequência angular de amostragem $\Omega s=2\pi/T=2000$ rad/s.

   a. Determine a resposta impulsional do filtro analógico protótipo.
   b. Determine os coeficientes do filtro digital, utilizando uma janela de Hanning de comprimento 7.
   c. Represente graficamente em Matlab a resposta em frequência do filtro digital.

2. Considere o filtro analógico passa-baixo

$$H_a(s) = \frac{1}{1+0.08s}$$

   a. Determine a frequência de corte Ωc (atenuação de 3 dB) desse filtro.
   b. Determine o filtro digital que se obtém de $H_a(s)$ pelo método da invariância da resposta impulsional, para uma frequência de amostragem de 10 Hz.
   c. Represente graficamente em Matlab a amplitude da resposta em frequência deste filtro digital e a do filtro analógico original. Explique as eventuais diferenças entre ambas.

3. Pretende-se projectar um filtro digital passa baixo, usando o método da transformação bilinear, a partir de um filtro Butterworth de 3ª ordem, de tal modo que à frequência de amostragem de 10 kHz a sua frequência superior de corte seja de 1 kHz.
   a. Determine a frequência superior de corte do filtro analógico protótipo.
   b. Localize no plano z os pólos do filtro digital.
   c. Determine a partir de que frequência a atenuação do filtro digital é melhor que 60 dB.

4. Considere um filtro analógico passa baixo elementar do tipo RC, com R=10 kΩ e C=2 μF.

   a. Determine a sua resposta em frequência $H_c(j\Omega)$.
   b. Determine a resposta impulsional $h_c(t)$.

c. Determine a resposta em frequência do sistema discreto cuja resposta impulsional é uma amostragem de $h_c(t)$ a uma frequência igual a 10 vezes a frequência de corte do filtro analógico.
d. Determine a respectiva equação às diferenças.

5. Crie um sinal discreto x com comprimento 512 amostras, com duas componentes de frequência: 50 Hz com amplitude 2 e 300 Hz com amplitude 1. Considere uma frequência de amostragem de 1000 Hz.
   a) Subdivida uma figura em 4 com o subplot. Represente na primeira sub-figura a sinal x, e por baixo, na 3ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
   b) Projecte e implemente um filtro passa baixo FIR que deixe passar a componente de 50 Hz e que atenue a componente de 300 Hz pelo menos 1000 vezes. Optimize a ordem do filtro.
   c) Numa nova figura verifique que o filtro projectado corresponde às especificações da alínea anterior.
   d) Na figura inicial, represente na 2ª sub.figura o sinal filtrado, e na 4ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
   e) Verifique se o resultado é o esperado. Qual foi a menor ordem do filtro que satisfez a especificação?

6. Considere o sinal x com comprimento 512 amostras com 3 componentes de frequência: 1 kHz com amplitude 2; 2,5 kHz com amplitude 3; 4 kHz com amplitude 4. Considere uma frequência de amostragem de 10 kHz.
   a) Subdivida uma figura em 4 com o subplot. Represente na primeira sub-figura a sinal x, e por baixo, na 3ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
   b) Projecte um filtro IIR passa banda de Butterworth com as seguintes especificações: fc_{inf}= 1.5 kHz, fc_{sup}= 3.5 kHz; fp_{inf}= 2 kHz, fp_{sup}= 3 kHz; AM=3 dB; Am=50 dB.
   c) Numa nova figura verifique que o filtro projectado corresponde às especificações da alínea anterior.
   d) Na figura inicial, represente na 2ª sub.figura o sinal filtrado, e na 4ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
   e) Verifique se o resultado é o esperado. Qual foi a menor ordem do filtro que satisfez a especificação?