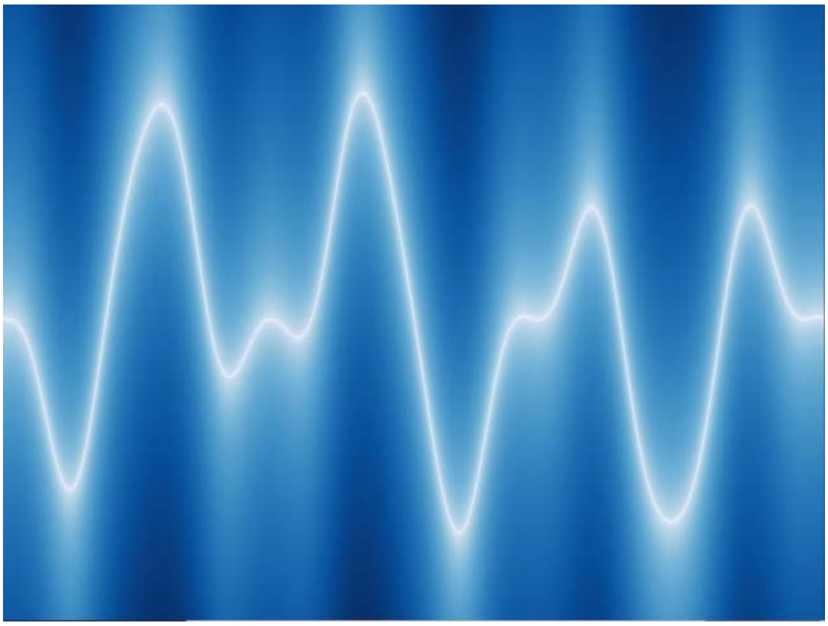
LICENCIATURA EM ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

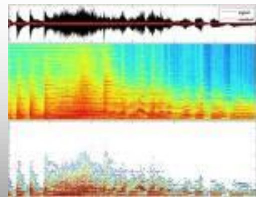
PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAL



João Paulo Teixeira

2016

Processamento Digital de Sinal



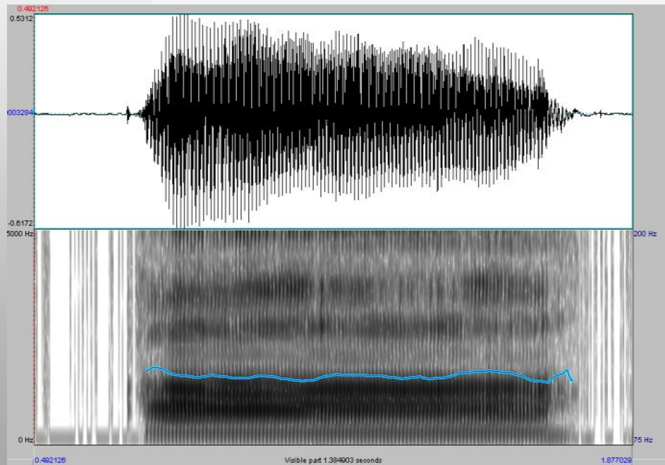
João Paulo Teixeira - JPT

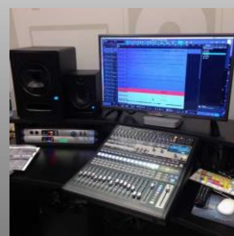
Edição 2016

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

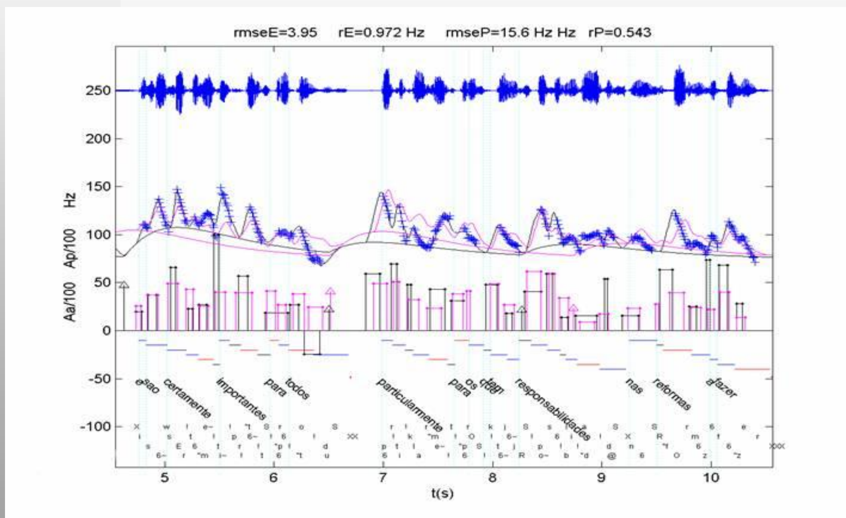
Introdução ao PDS - Exemplos de Sinais

Sinais de Fala

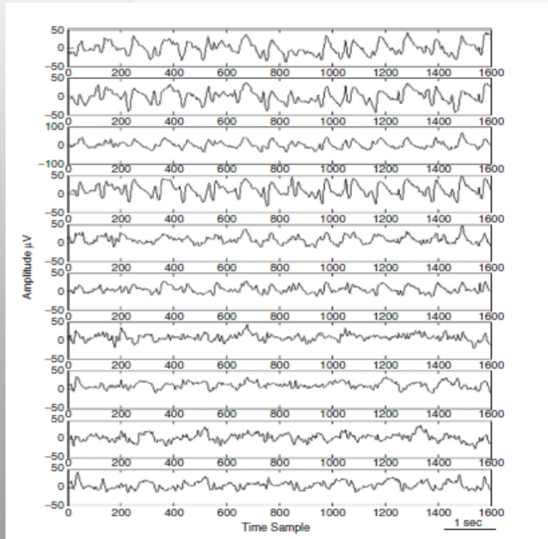




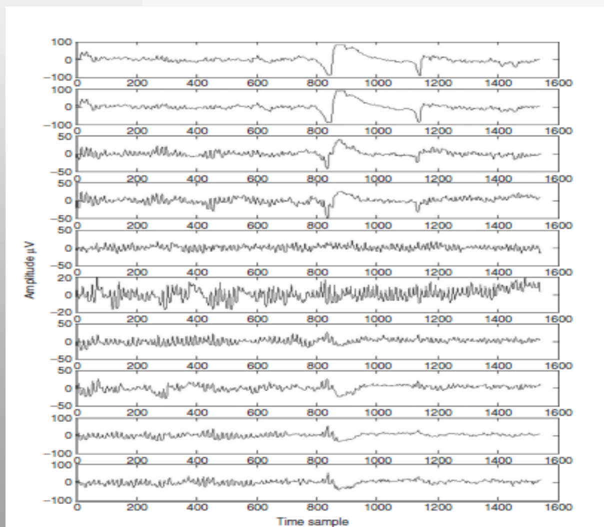
Sinais de Fala

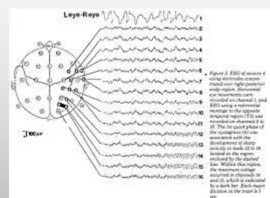


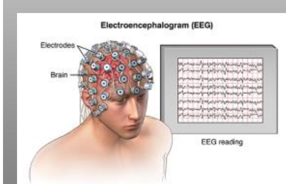
EEG


Amplitude µV
Time Sample
1 sec

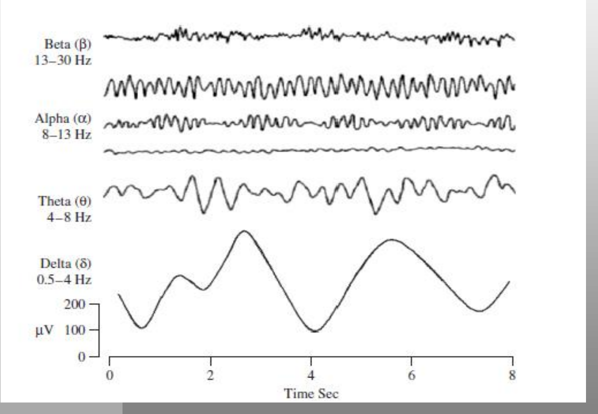
EEG

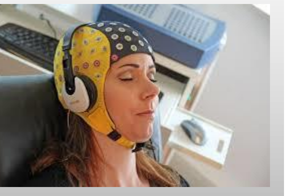

Amplitude µV
Time sample


Leye-Reye

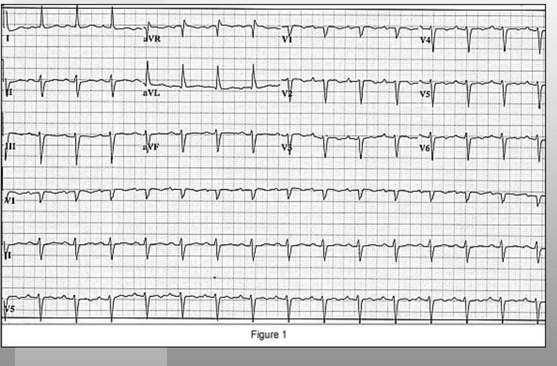

Electroencephalogram (EEG)
Electrodes
Brain
EEG reading

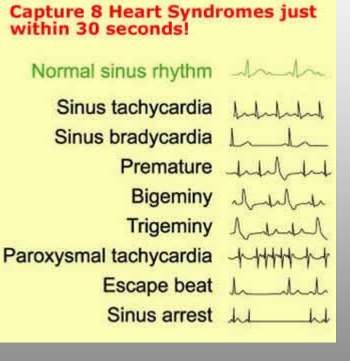
EEG


Beta (β)
13–30 Hz
Alpha (α)
8–13 Hz
Theta (θ)
4–8 Hz
Delta (δ)
0.5–4 Hz
200
μV 100
0
0
2
4
6
8
Time Sec

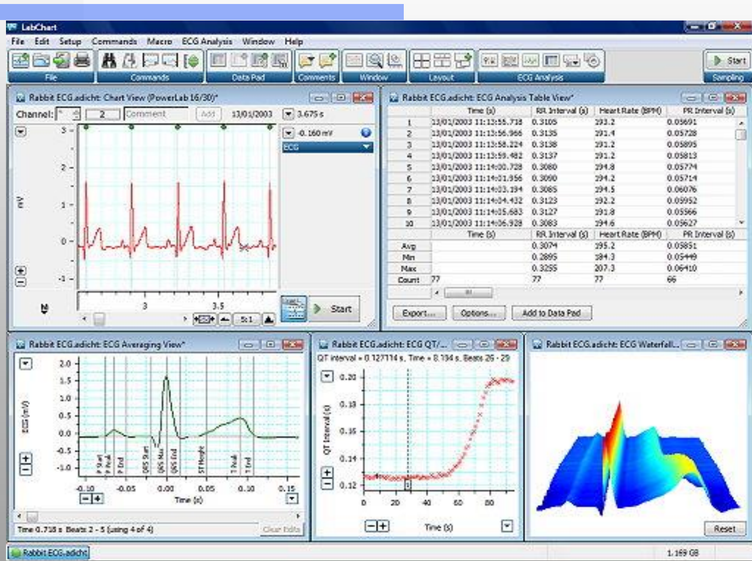


ECG


I
aVR
V1
V4
II
aVL
V2
V5
III
aVF
V3
V6
V1
II
V5
Figure 1

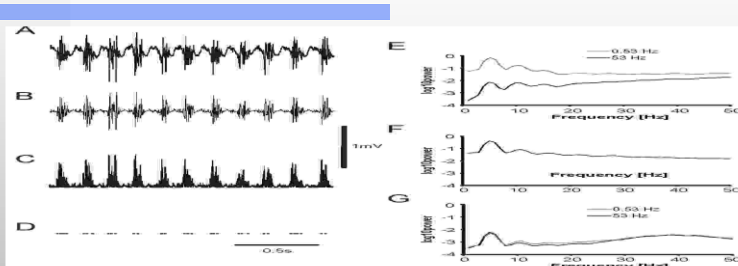

Capture 8 Heart Syndromes just within 30 seconds!
Normal sinus rhythm
Sinus tachycardia
Sinus bradycardia
Premature
Bigeminy
Trigeminy
Paroxysmal tachycardia
Escape beat
Sinus arrest

ECG

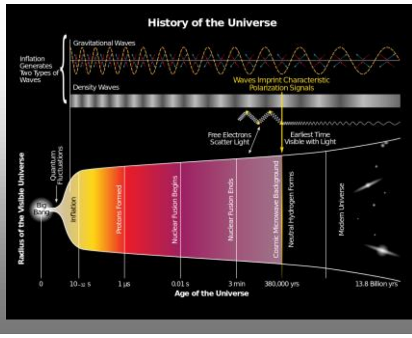


INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

EMG



Capítulo 2 - Sinais



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

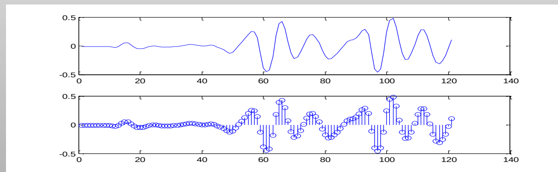
Sinais

- **Distinguir sinais contínuos de sinais discretos.**
- **Operações sobre sinais:**
  - **Escalonamento na amplitude;**
  - **Escalonamento no tempo;**
  - **Reflexão;**
  - **Deslocamento;**
  - **Regra de precedência para deslocamento e escalonamento no tempo**
  - **Adição e subtracção de sinais;**
- **Propriedades de sinais:**
  - **Pares**
  - **Ímpares**
  - **Periodicidade**
- **Exemplos de Alguns Sinais:**
  - **Sinusoidal**
  - **Exponencial complexo**
  - **Degrau unitário**
  - **Impulso unitário**

Sinais

- **Sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação acerca do comportamento e características de determinados fenómenos físicos. São representados matematicamente como função de uma ou mais variáveis independentes.**

- ## Contínuo/Discreto



  - **x(t)=A*sin(2*pi*f*t) - contínuo – O domínio é um subconjunto dos números reais;**
  - **x(n)=A*sin(2*pi*f*n/Fa); - discreto – O domínio é um subconjunto dos números inteiros;**

- **Em ambos os casos o contradomínio pode ser contínuo ou discreto.**

Sinais Discretos por amostragem de Sinais Contínuos

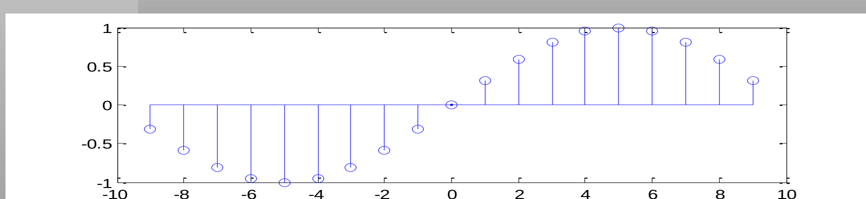
•Sinal discreto por amostragem de um sinal contínuo:
$x(n)=x_a(nT_a)$,

- •T_a – período de amostragem
- •$F_a=1/T_a$ – Frequência de amostragem

•Representação gráfica de um sinal discreto:

$x(n)=A*sin(2*pi*f*n/F_a)$;

$$-\infty < n < \infty$$



Operações Sobre Sinais

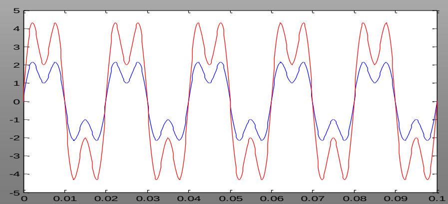
- **Escalonamento da amplitude**

  Operação sobre a variável dependente.

  Ex: y(t)=a.x(t)

  y(n)=a.x(n)

  $y(t)$=2x(t)



Operações Sobre Sinais

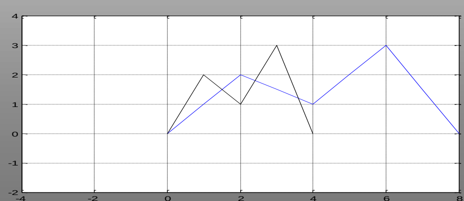
- **Escalonamento no tempo**

  Operação sobre a variável independente.

  Ex: y(t)=x(a.t) - a real positivo

  y(n)=x(a.n) - a inteiro positivo

  y(t)=x(2t)



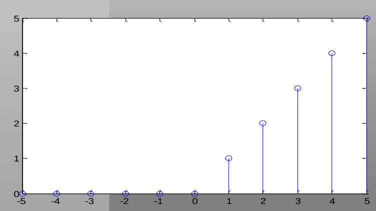
Operações Sobre Sinais

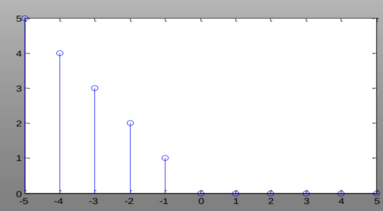
- **Reflexão** **(caso particular de escalonamento no tempo com a=-1) (ESPELHO)**

  y(t)=x(-t)

  y(n)=x(-n)

x(n) **y(n)=x(-n)**





ipb INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

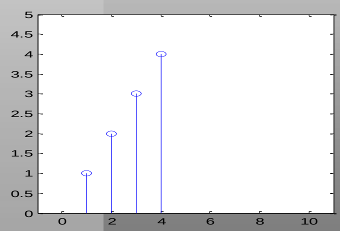
Operações Sobre Sinais

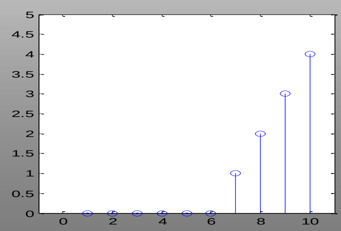
- **Deslocamento**

  y(t)=x(t-t$_0$)

  y(n)=x(n-n$_0$)

x(n) x(n-6)





Operações Sobre Sinais

- **Regra de Precedência para deslocamento e escalonamento no tempo**
  - **Consideremos a relação: y(t)=x(at-b)**
  - **Que satisfaz as seguintes condições: y(0)=x(-b); e y(b/a)=x(0).**
  - **Para se obter correctamente y(t) a partir de x(t), as operações de deslocamento e escalonamento devem ser realizadas na ordem correcta:**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Operações Sobre Sinais

1. **operação de deslocamento no tempo, substituindo *t* por *t-b*:**
   - **v(t)=x(t-b)**
2. **escalonamento no tempo (executada em v(t)), substituindo *t* por *at*:**
   - **y(t)=v(at)**

– **Resultando y(t)=x(at-b)**

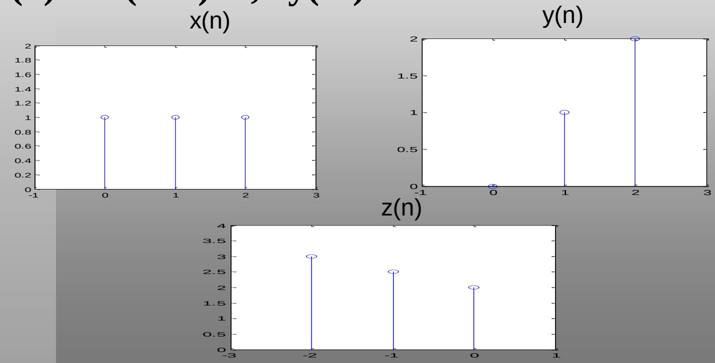
- **Repare-se que *a* pode ser *-1* denotando uma reflexão.**

Operações Sobre Sinais

- **Adição e subtracção de sinais**

  Exemplo:

  z(n)=2.x(n+2)+0,5.y(-n)



Propriedades dos Sinais

- **Sinal Par**

  O sinal é par se

  x(t)=x(-t)

  x(n)=x(-n)

- **Sinal Ímpar**

  O sinal é ímpar se

  x(t)=-x(-t)

  x(n)=-x(-n)

Decomposição de um sinal nas componentes Par e Ímpar

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n)$$

- **Componente Par**

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad x_p(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

- **Componente Ímpar**

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad x_i(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

Propriedades dos Sinais

- **Periodicidade**

Um sinal é periódico se existe um T>0 (ou N>0) tal que

x(t)=x(t+T) **T: período**

x(n)=x(n+N) **N: período**

No <u>tempo contínuo</u> um sinal sinusoidal ou um exponencial complexo são periódicos com período T=2π/w_0.

Periodicidade Para Sinais Discretos

Para o caso sinusoidal:

$$A\cos(w_0 n + \theta) = A\cos(w_0 n + w_0 N + \theta)$$

Requer que

$$w_0 N = 2\pi k \qquad \text{com k inteiro}$$

Para o caso exponencial complexo:

$$e^{jw_0(n+N)} = e^{jw_0 n}$$

Requer que

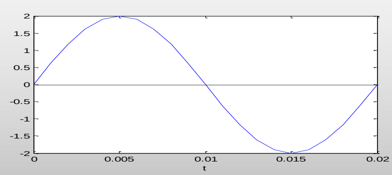
$$w_0 N = 2\pi k \qquad \text{com k inteiro}$$

Assim, as sequencias exponencial complexa e sinusoidal não são necessariamente periódicas com período $2\pi/w_0$, e dependendo do valor de w_0, podem até nunca ser periódicas.

Sinais Básicos

- **Sinusoidal**

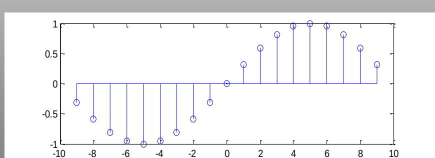
x(t)=Asin(2πft+ϕ)



t – variável independente (tempo)
f – frequência
ϕ - desfasamento
A – Amplitude

- **Discreto**

x(n)=Asin(2πfn/F_a+ϕ)



F_a – frequência de amostragem

Revisão de Números Complexos

- **Qual o resultado de: $X^2 + 1 = 0$**
  - **$X^2 = -1 \therefore X = \sqrt{-1}$**
- **Número imaginário(i ou j)**
  - **$i^2 = -1 \therefore i = \sqrt{-1}$**
  - **Solução: X = i**
- **Potências de i:**

$$\frac{1}{i} = -i$$

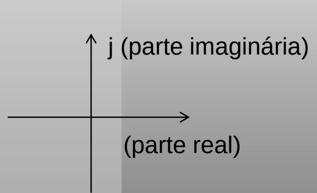
$$i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$$
$$i^1 = i \qquad i^5 = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$$
$$i^3 = -i \qquad i^7 = -i$$

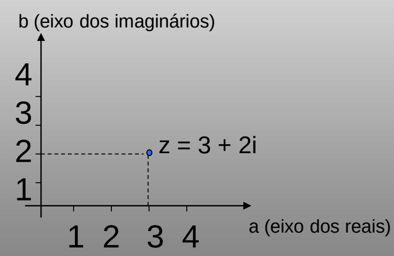
INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Revisão de Números Complexos

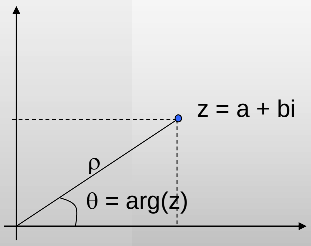
- **Corpo dos números Complexos: a+bj (a – parte real, b – parte imaginária).**
- **Ex: z=3+2i**

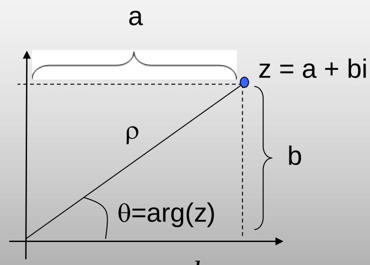
Plano de Argand-Gauss





Revisão de Números Complexos – Módulo e Fase





$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Revisão de Números Complexos – Forma Polar: Módulo e Fase

- **Como:**

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \therefore b = \rho\sin\theta$$

$$z = a + bi$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \therefore a = \rho\cos\theta$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- **Pelas formulas de Euler:**

$$z = \rho e^{j\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Revisão de Números Complexos – formas polar e cartesiana

- **Conversão de:**
  - **Cartesina-polar** $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \arctan \frac{b}{a}$
  - **Polar-cartesiana** $a = \rho \cos \theta$ $b = \rho \sin \theta$
- **Operações:**
  - **Adição (forma cartesiana):**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

  - **Multiplicação (forma polar):**

$$z_1 * z_2 = (\rho_1 e^{j\theta_1}) * (\rho_2 e^{j\theta_2}) = \rho_1 * \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Sinais Básicos

- **Exponencial Complexa**

$$x(t) = Ce^{at}$$

Sendo C e a constantes complexas:

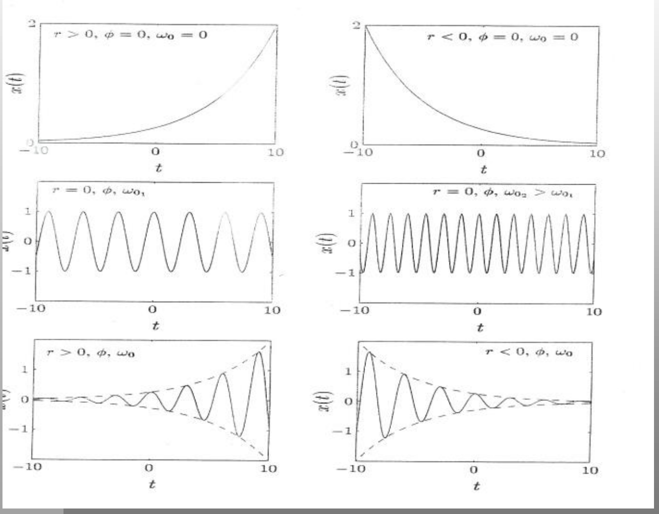
$$C = Ae^{j\phi} \qquad a = r + j\Omega_0$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{j\phi} e^{rt} e^{j\Omega_0 t} = Ae^{rt} e^{j(\Omega_0 t + \phi)}}$$

No caso particular de r=0 e a=jΩ_0

$$x(t) = Ae^{j\Omega_0 t} = A[\cos(\Omega_0 t) + j \sin(\Omega_0 t)]$$

Exponencial Complexa Contínua



Sinais Básicos

- **Exponencial Complexa para sinais discretos**

$$x(n) = Ce^{\beta n} \qquad w_0 = 2\pi \frac{f_0}{F_a}$$

Sendo C e β constantes complexas:

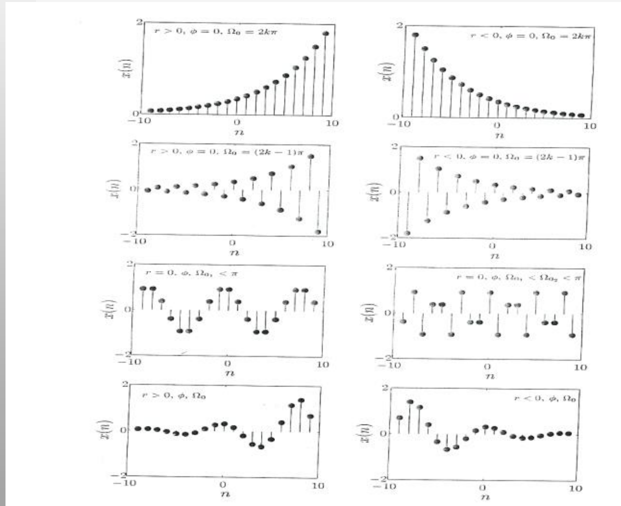
$$C = Ae^{j\phi} \qquad \beta = r + jw_0$$

$$\boxed{x(n) = Ae^{rn}e^{j(w_0 n + \phi)}}$$

No caso particular de r=0 e β=jω$_0$

$$x(n) = Ae^{jw_0 n} = A[\cos(w_0 n) + j\sin(w_0 n)]$$

Exponencial Complexa Discreta

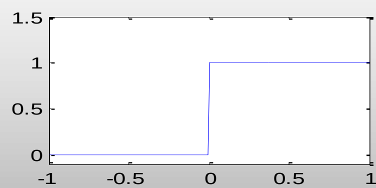


Sinais Básicos

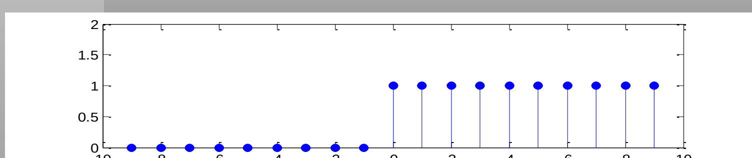
- **Degrau Unitário**

Função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 \;\; ; \;\; t < 0 \\ 1 \;\; ; \;\; t > 0 \end{cases}$$



$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

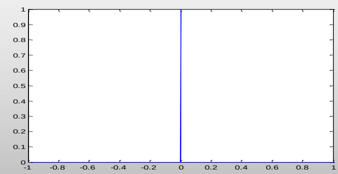


Sinais Básicos

- **Impulso Unitário Contínuo**

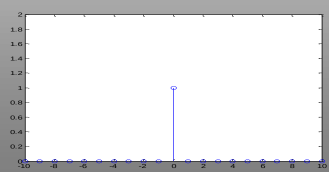
Impulso de Dirac δ(t)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$



- **Impulso Unitário Discreto**

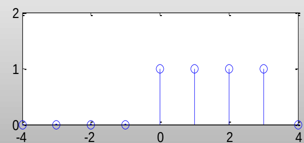
$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



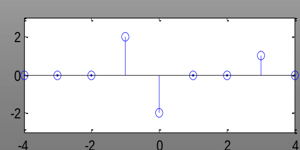
INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Exemplos de Sinais

- **x(n)=u(n)-u(n-4)**



- **v(n)=2δ(n+1)-2δ(n)+δ(n-3)**



x(n) → T → y(n)

Capítulo 3 – Sistemas (Discretos)

Sistemas Discretos

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n]$$

h(n) – resposta impulsional do sistema (LIT) – é a resposta do sistema à entrada δ(n).

Exemplos simples de sistemas:

- **Sistema de atraso ideal**

$$y[n] = x[n - n_d]$$

- **Média deslizante**

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Sistemas Discretos

- **Podem ser definidos por:**
  - **resposta impulsional h(n) (LIT),**

$$h[n]=u[n]-u[n-10]$$

  - **Equação às diferenças**

$y[n]=x[n]+2x[n-1]+0.5x[n-2]$ - forma nao recursiva

ou

$y[n]=x[n]+2y[n-1]+0.5y[n-2]$ - forma recursiva

  - **A partir da forma não recursiva pode-se obter directamente a resposta impulsional (para sistemas LIT):**

$$h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+0.5\delta[n-2]$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Sistemas Discretos

- **Sistemas sem memória:**

A saída y[n], para qualquer valor de n, depende apenas da entrada x[n] para o mesmo valor de n.

Ex: $y[n]=(x[n])^2$

- **Sistemas FIR (Finite Impulse Response) e IIR (Infinite Impulse Response)**

Refere-se ao número de elementos não nulos da h[n].

Sistemas Discretos

Sistemas Recursivos e Não Recursivos

Sistema recursivo: a resposta y[n] é definida recursivamente à custa de respostas anteriores: ex:

$$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$$

Não recursivos: a resposta y[n] pode ser determinada exclusivamente a partir da entrada x[n]:

$$y[n] = 4x[n] - 2x[n-1]$$

- **Um sistema FIR pode sempre ser implementado de forma não recursiva.**
- **Um sistema recursivo, normalmente é do tipo IIR.**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Sistemas Discretos

Tempo Real

Considera-se que um sistema opera em tempo real quando os elementos da saída são determinados à mesma cadência que chegam os elementos de entrada.

Sistema Discreto Causal

Um sistema é causal quando é 'causa' de acontecimentos passados e não depende de acontecimentos futuros.

Condição necessária e suficiente para sistemas LIT

h[n]=0 , n<0

Um sistema que opere em tempo real é causal.

Sistema Discreto Estável

A uma entrada limitada responde sempre com uma saída limitada.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Sistemas Discretos

- **Sistema Linear**

Se

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} \quad \text{e} \quad y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

entao

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

Pode ser aplicado o princípio da sobreposição.

- **Sistema Invariante no Tempo**

Um sistema tem a resposta y[n] à entrada x[n]. Então o sistema é invariante no tempo se à entrada

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

Responde com a saída $y_1[n] = y[n - n_0]$

Sistemas Discretos

- **Linearidade**

$$T[x_1(t)] = y_1(t)$$
$$T[x_2(t)] = y_2(t)$$
O sistema é linear se:
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$$

$$T[x_1(n)] = y_1(n)$$
$$T[x_2(n)] = y_2(n)$$
O sistema é linear se:
$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

- **Ver exemplo para o sistema: y(t)=x(1-t)**

$$T[x(t)] = y(t) = x(1-t)$$
Sendo
$$T[x_1(t)] = y_1(t) = x_1(1-t)$$
$$T[x_2(t)] = y_2(t) = x_2(1-t)$$
O sistema é linear se:
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$$
Ora :
$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$$
$$ay_1(t) + by_2(t) = ax_1(1-t) + bx_2(1-t)$$
Como a igualdade se verifica, o sistema é linear

Sistemas Discretos

- **Invariante no tempo**
  - **Um sistema é invariante no tempo quando uma deslocação no tempo no sinal de entrada conduz à mesma deslocação no tempo no sinal de saída.**

$$T[x(t)] = y(t) \qquad T[x(n)] = y(n)$$

$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \qquad T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

Ver exemplo do sistema:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

$$T[x(n)] = y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$$

Verificar a igualdade

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n-n_0)$$

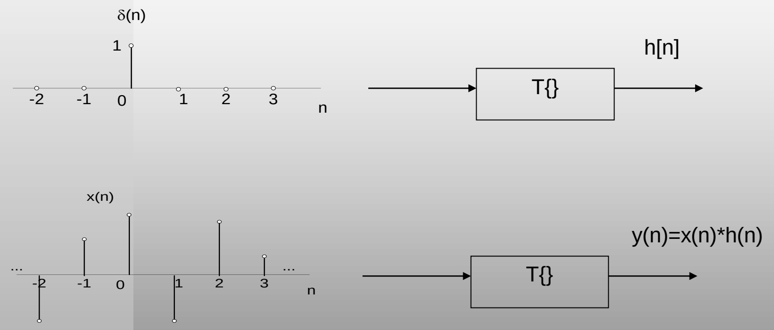
$$y(n-n_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} x(n-n_0)$$

São diferentes, logo não é invariante no tempo

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

- **Juntam as duas características da linearidade e da invariância no tempo.**
- **Completamente caracterizados pela h(n).**
- **A resposta do sistema é dada por: y(n)=x(n)*h(n) – convolução discreta**
- **Muitos sistemas são LIT**

Resposta impulsional



$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Convolução Discreta (Somatório de Convolução)

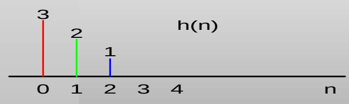
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

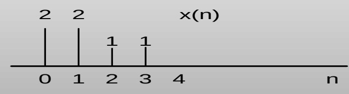
- **É a convolução de x(n) com h(n). Pode ser representada por: y(n)=x(n)*h(n).**
- **Goza da propriedade comutativa: x(n)*h(n)=h(n)*x(n)**
  - *Para que serve?*

R: Para determinar a resposta de um sistema LIT, y(n), sendo conhecidos a resposta impulsional, h(n), e a entrada x(n).

Convolução Linear

- **y(n)=x(n)*h(n)**





Comprimento M=3

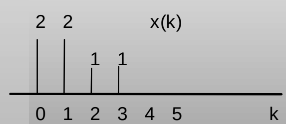
Comprimento L=4

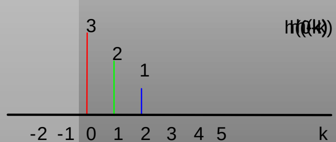
Convolução Linear

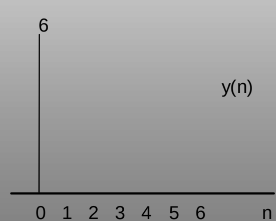
Para n=0

y(0)=2x3=6

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$





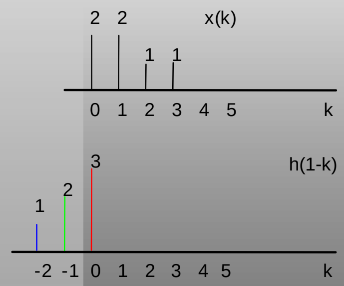


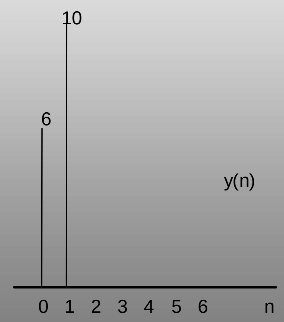
Convolução Linear

Para n=1

y(1)=2x2+2x3=10

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$





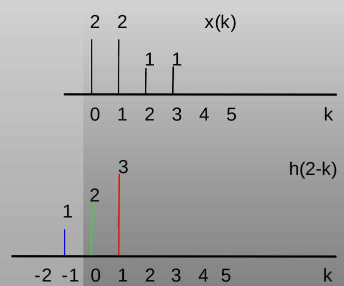
INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

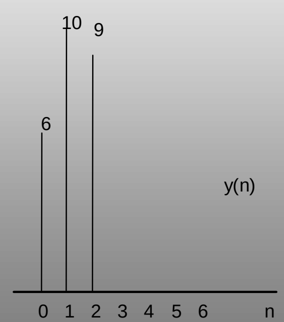
Convolução Linear

Para n=2

y(2)=2x1+2x2+1x3=9

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$



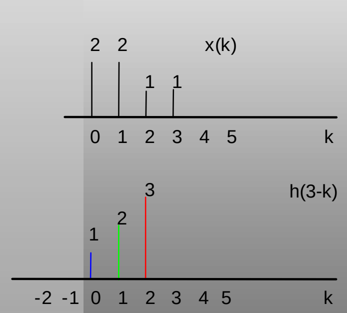


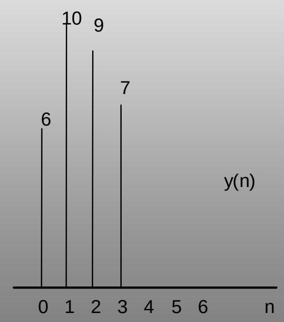
Convolução Linear

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Para n=3

y(3)=2x1+1x2+1x3=7



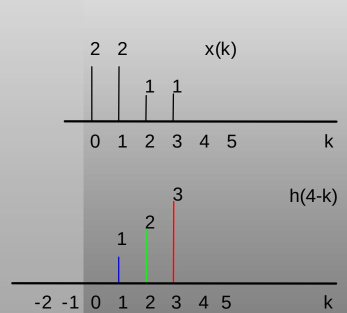


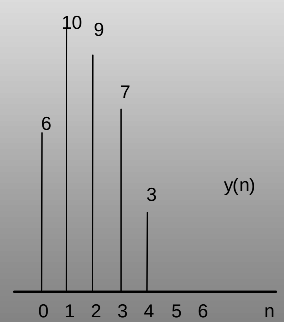
Convolução Linear

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Para n=4

y(4)=1x1+1x2=3

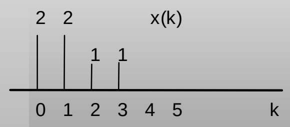


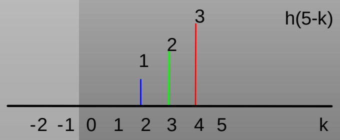


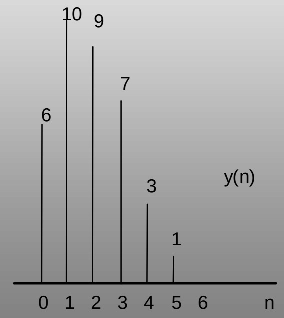
Convolução Linear

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

Para n=5 y(5)=1x1=1





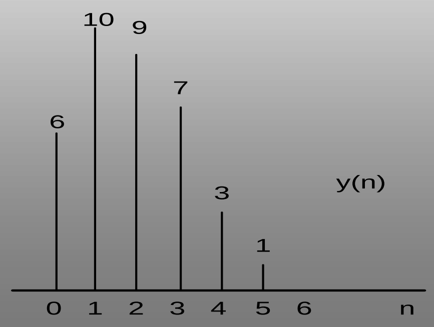


INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Convolução Linear

Comprimento de y(n) N=L+M-1=6

L – comprimento de x(n)
M – comprimento de h(n)

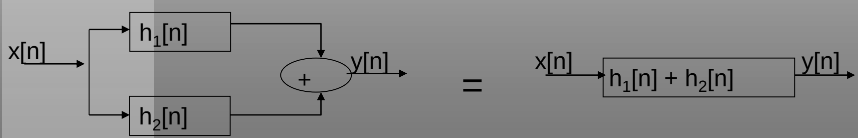


INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Propriedades dos sistemas LIT

- **São as mesmas que as da convolução discreta:**
  - **Comutativa**
  - **Distributiva na adição:**

$$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Representação no Domínio das Frequências de Sinais e Sistemas Discretos

- **Resposta em Frequência do Sistema: (Transformada de Fourier)**

$$H(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jwk}$$

- **Neste caso (ao contrário dos sistemas de tempo contínuo) a resposta em frequência é periódica de período 2π.**

$$H(e^{j(w+2\pi)})=H(e^{jw})$$

- **Então basta especificar:**

$$0\le w\le 2\pi \qquad\qquad -\pi\le w\le \pi$$

Transformada Inversa

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{jw}\right) e^{jwn} dw$$

Qualquer intervalo de 2π pode ser escolhido.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linear
- Se a TF de x[n] é $X(e^{jw})$, então a TF de x[n-k] é:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jw(n+k)} = e^{-jwk} X(e^{jw})$$

Propriedades/Teoremas da Transformada de Fourier

Sinal	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{jw})$
$y[n]$	$Y(e^{jw})$
$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{jw})+bY(e^{jw})$
$x[n-n_a]$	$X(e^{jw})e^{-jwn_a}$
$e^{jw_0 n}x[n]$	$X(e^{j(w-w_0)})$
$x[-n]$	$X(e^{-jw})$
	$X^*(e^{jw})$ se x[n] é real
$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$
$x[n]*y[n]$	$X(e^{jw})Y(e^{jw})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(w-\theta)})d\theta$

Teorema de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})Y^*(e^{jw})dw$$

Propriedades de simetria da Transformada de Fourier

$$x[n] \rightarrow X(e^{jw})$$
$$x^*[n] \rightarrow X^*(e^{-jw})$$

sinal	Transf. de Fourier
puramente real	parte real par, parte imaginária ímpar
puramente imaginário	parte real ímpar, parte imaginária par
parte real par, parte imaginária ímpar	puramente real
parte real ímpar, parte imaginária par	puramente imaginário

- **x[n] real e par tem X(e^{jw}) real e par**

Pares de Transformadas de Fourier

Sinal	Transformada de Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	e^{-jwn_0}
$1 \quad (-\infty<n<\infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w+2\pi k)$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-jw}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(w+2\pi k)$
$a^n u[n] \; (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{1-ae^{-jw}}$
$\frac{\sin w_c n}{\pi n}$	$X(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & \lvert w\rvert < w_c \\ 0, & w_c < \lvert w\rvert \le \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & outro\ n \end{cases}$	$\frac{\sin\left[w(M+1)/2\right]}{\sin(w/2)} e^{-jwM/2}$

Equação às Diferenças e Resposta em Frequência

Equação às diferenças

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k x(n-k)+\sum_{k=1}^{N-1}b_k y(n-k)$$

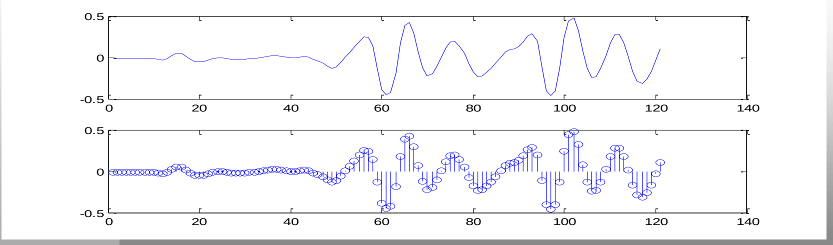
Com a resposta em frequência

$$H(e^{jw})=\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{-jwk}}{1-\sum_{k=1}^{N-1}b_k e^{-jwk}}$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

$$x[n]=x_c(n\Delta t)$$

Capítulo 4 – Amostragem de Sinais Contínuos



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Amostragem de Sinais Contínuos

$$x[n] = x_c(n\Delta t)$$

$x[n]$ - sinal discreto

$x_c(t)$ - sinal contínuo

Δt - período de amostragem

$\Omega_a = \frac{2\pi}{\Delta t}$ frequência angular de amostragem

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Relação entre as transformadas de Fourier dos sinais contínuo e discreto:

$X_c(j\Omega)$ - Transformada de Fourier do sinal contínuo

$X(e^{jw})$ - Transformada de Fourier do sinal discreto

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(w+2r\pi)}{\Delta t}\right)$$

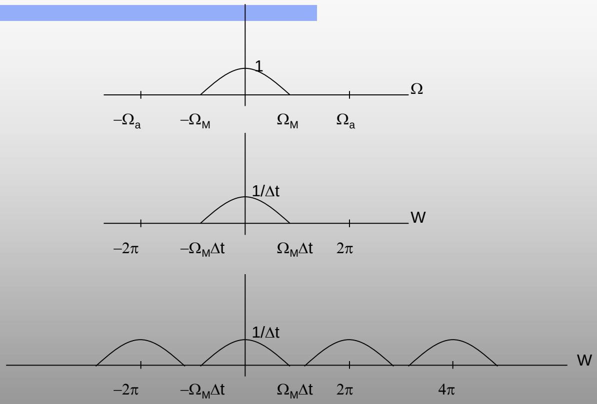
Mudança de variável linear:

$\Omega \Rightarrow \frac{w+2r\pi}{\Delta t}$ para r=0 $\Omega \Rightarrow \frac{\text{w}}{\Delta t}$

Ω (rad/s)

w (rad)

Amostragem de Sinais Contínuos (exemplo)



$\Omega_a = \frac{2\pi}{\Delta t}$ corresponde $w = 2\pi$ $\qquad w = \Omega\Delta t$

Frequência de amostragem

Frequência angular

Teorema da Amostragem

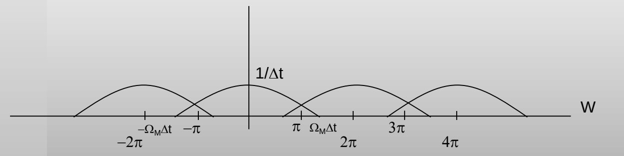
- **Para que um sinal seja recuperável as diferentes regiões de $H(e^{jw})$ não se podem sobrepor.**
- **Então $X_c(j\Omega)$ tem de ocupar uma região limitada de Ω. Ou seja, $x_c(t)$ tem de ter um espectro de banda limitada (Ω_M).**
- **E $\Omega a > 2\,\Omega_M$**
- **Ω_M – frequência limite superior de banda do sinal (rad/s)**
- **Ωa/2 – Frequência (angular) de Nyquist**

Teorema da Amostragem (Nyquist)

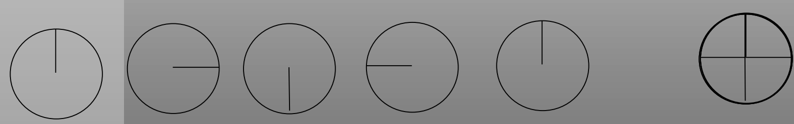
<u>Um sinal contínuo com espectro de banda limitada ao intervalo [$-\Omega_M$, Ω_M] deve ser amostrado a uma frequência angular igual ou superior a $2\Omega_M$, para ser possível a sua reconstrução exacta a partir do sinal discreto resultante.</u>

Aliasing

- **Ocorre quando não se verificam as condições do teorema da amostragem.**
- **Resulta da sobreposição das diferentes parcelas de $X(e^{jw})$.**



- **Exemplo:**
- **Na seguinte sequência de imagens, em que sentido gira a roda?**



- **E se souber que entre duas amostragens a roda não pode girar mais do que 180º?**

Reconstrução de um Sinal Amostrado

- **Faz-se determinando $X_c(j\Omega)$ a partir de $X(e^{jw})$, apenas no intervalo $[-\pi, \pi]$ e fazendo a mudança de variável $w \rightarrow \Omega\Delta t$.**
- **E depois determinando a transforma de Fourier inversa.**

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn}$$

$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} \Delta t X(e^{j\Omega\Delta t}), \text{ se } -\frac{\pi}{\Delta t} < \Omega < \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0, \text{ se nao} \end{cases}$$

e calculando a transformada de Fourier inversa

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]senc\left(\frac{\pi(t - n\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

É um sinal de banda limitada, e cada componente

$$x[n]senc\left(\frac{\pi(t - n\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

É de banda limitada e toma o valor zero em todos os pontos de amostragem, excepto no ponto $t=n\Delta t$, onde toma o valor $x[n]$.

Interpolação

- É o <u>aumento da frequência de amostragem</u> do sinal contínuo. (Sem re-amostrar o sinal contínuo)
- Só é possível se a amostragem tiver sido feita respeitando o teorema da amostragem.
- Realiza-se <u>intercalando zeros</u> entre as amostras:
  - Para uma interpolação de ordem M:

em que $x_0[n]$ é o sinal resultante da interpolação M do sinal x[n]:

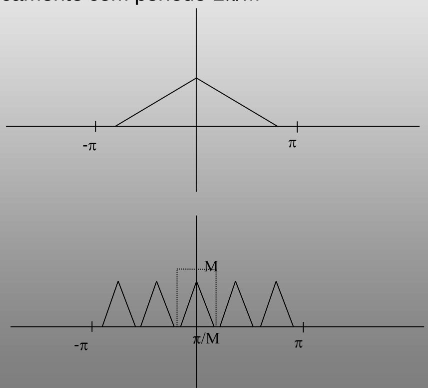
$$x_0[n] = \begin{cases} x(n/M), & \text{se n é multiplo de M} \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

E depois, <u>x_0[n] é filtrado</u> por um filtro passa baixo com frequência de corte π/M e ganho M.

Interpolação (domínio da frequências)

$$X_0(e^{jw}) = X(e^{jwM})$$

A transformada de Fourier $X(e^{jw})$ como que é comprimida no intervalo [-π/M, π/M] e depois repetida periodicamente com período 2π/M



Decimação

- **É a <u>redução da frequência de amostragem</u> do sinal contínuo.** **(Sem re-amostrar o sinal contínuo)**
- **É necessário verificar a possível ocorrência de *aliasing*.**
- **O sinal $x_d[n]$ é obtido por decimação de M:1 do sinal x[n]:**

  $x_d[n]=x(Mn)$, M inteiro

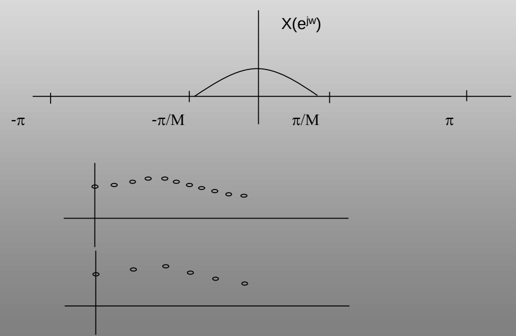
- **A decimação é uma operação reversível (sem perda de informação) se $X(e^{jw})$ for zero fora do intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$, portanto de banda limitada.**
- **Então esta operação é normalmente precedida de uma filtragem passa baixo digital, para que esta situação seja garantida.**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Decimação

Em resumo:

- **1^a - filtragem passa baixo**
- **2^o - $x_d[n]=x(Mn)$, M inteiro**

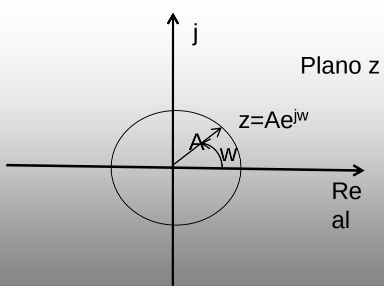


Conversão Fraccionária da Frequência de Amostragem

- **É a multiplicação da frequência de amostragem por uma fracção M/N.**
- **Realiza-se fazendo um interpolação de 1:M e uma decimação de N:1.**
- **Como nas duas operações é necessário uma filtragem passa baixo (na interpolação a fc=π/M e na decimação fc=π/N), faz-se a filtragem apenas uma vez com a menor das fc (frequencia de corte).**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Capítulo 5 – Transformada z



Transformada em z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- **Em que z é a frequência complexa e pertencente a C.**
- **Esta definição permite que muitos sinais que não têm transformada de Fourier tenham transformada z.**
- **Desempenha um papel semelhante ao da transformada de Laplace para sinais contínuos.**
- **Tem uma notação mais conveniente que a transformada de Fourier.**

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Transformada em z

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn}$$

$$z = re^{jw}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Para

$$z = e^{jw}$$

A transformada z é igual à transformada de Fourier

Equação às diferenças e Transformada z

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N-1} b_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k z^{-k}}$$

Alguns somatórios de séries geométricas

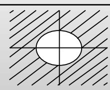
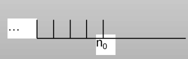
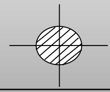
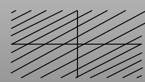
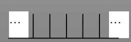
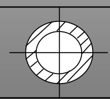
$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}; |a| < 1 \qquad \sum_{k=n1}^{\infty} a^k = \frac{a^{n1}}{1-a}; |a| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{n1} a^k = \frac{1-a^{n1+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}; a < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} = \frac{1}{1-a^{-1}}; |a| > 1$$

Região de Convergência (ROC)

- **É a região do plano z onde existe transformada z.**
- **<u>A indicação da região de convergência é absolutamente necessária na transformada z</u>**
- **Pode ser facilmente determinada já que, diferentes regiões do sinal discreto impõem diferentes ROC.**
- **Quando a Tz é dada por uma fracção cujos numerador e denominador são polinómios em z ou em z^{-1}:**
  - **os zeros do denominador são os pólos da Tz;**
  - **os zeros do numerador são os zeros da Tz;**
  - **os <u>pólos limitam sempre a ROC</u>;**
  - **os <u>pólos situam-se sempre fora da ROC</u>.**

Região de Convergência (ROC)

x[n]		**convergência de X(z)**	**plano z**
limitado à esquerda		zona exterior de um circulo	
limitado à direita		zona interior de um circulo	
comprimento finito		todo o z (excepto possivelmente z=0 e z=∞)	
não limitado		região entre dois circulos	

Propriedades da ROC da Tz

- **P_1 – A ROC de X(z) é um anel ou um disco no plano z centrado na origem.**
- **P_2 – A TF de x[n] só existe se a ROC de X(z) inclui o circulo unitário.**
- **P_3 – A ROC de X(z) não contém nenhum pólo.**
- **P_4 – Se x[n] é de duração finita (limitado à esquerda e à direita) então a ROC de X(z) é todo o plano z, excepto, possivelmente z=0 ou z=∞.**
- **P_5 – Se x[n] é limitado à esquerda, então a ROC de X(z) é o exterior do circulo limitado pelo pólo finito de maior magnitude.**
- **P_6 – Se x[n] é limitado à direita, então a ROC de X(z) é o interior do circulo limitado pelo pólo não nulo de menor magnitude.**
- **P_7 – Se x[n] não é limitado à esquerda nem à direita então a ROC de X(z) será um anel do plano z limitado no exterior e no interior por pólos e não contendo nenhum pólo.**
- **P_8 – A ROC deve ser uma região contígua.**

Pares de Transformadas z comuns

$x[n]$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	ROC
$\delta[n]$	1	todo z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	todo o z excepto 0(se m>0) ou ∞ (se m<0)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Relação da Tz com a TF

- **Se a circunferência de raio unitário z=e^{jw}, pertencer à ROC de X(z), então a TF pode obter-se:**

$$X(e^{jw}) = X(z) \quad \text{para z=e}^{jw}$$

- **Alguns sinais discretos têm Tz e não têm TF.**
- **Para se obter a Tz a partir da TF:**

$$X(e^{jw}) \Rightarrow x[n] \Rightarrow X(z)$$

Propriedades da Tz

- **A Tz é linear**
- **Deslocação em n**

$$x[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

- **Multiplicação por a^n**

$$a^n x[n] \Leftrightarrow X(z/a) \qquad \text{com ROC=aROC}$$

- **x[-n]**

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}) \qquad \text{com ROC=ROC}^{-1}$$

- **Convolução**

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

Com ROC=intercepção(ROCx com ROCh)

Estabilidade e Causalidade

- **Um sistema discreto é estável se a ROC de X(z) contiver a circunferência unitária do plano z.**
- **Um sistema discreto é causal se a ROC de X(z) for o exterior de um circulo.**
- **Um sistema discreto causal e estável tem todos os seus pólos no interior da circunferência unitária do plano z.**
- **A circunferência unitária desempenha o mesmo papel que o eixo jw do plano s relativamente à Transformada de Laplace.**

Inversão da Transformada z

- **1. X(z) é expressa como um polinómio em z:**
  - **Directa:**

$$X(z) = 1 - 2z^{-1}$$
$$entao$$
$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

- **2. X(z) é expressa como um quociente de dois polinómios em z:**
  - **a) <u>Método da divisão</u>: consiste na divisão dos polinómios.**
    - **segundo as potências decrescentes para sistemas causais**
    - **segundo as potências crescentes para sistemas não causais**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Inversão da Transformada z

- **b) <u>Método da decomposição em fracções simples</u>. Consiste em decompor X(z) em parcelas cuja transformada inversa é conhecida, e invocar a propriedade da linearidade da Tz.**
  - **importante conhecer algumas transformadas e algumas propriedades**

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ;|z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ;|z| < |a|$$

$$x[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}) \quad \text{com ROC ROC}^{-1}$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Inversão da Transformada z

Método do Integral de Linha (forma geral)

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

- **Com o integral calculado ao longo de um contorno C desenhado à volta da origem do plano z e na <u>região de convergência</u> de X(z).**
- **O integral pode ser calculado pelo <u>método dos resíduos</u>:**
  - **o integral é igual à soma dos resíduos da função integranda nos seus pólos situados no interior do contorno, suposto percorrido no sentido directo.**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Resíduos

- **Resíduo de uma função F(z) num pólo simples:**

$$(z-a)F(z)\big|_{z=a}$$

- **Resíduo de uma função F(z) num pólo com multiplicidade m:**

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m F(z)\right]\Big|_{z=a}$$

(Parece complicado, mas é simples para pólos de multiplicidade 2)

Convolução Complexa (em z)

- **A transformada z da multiplicação de dois sinais discretos é a convolução complexa da transformada z dos respectivos sinais.**

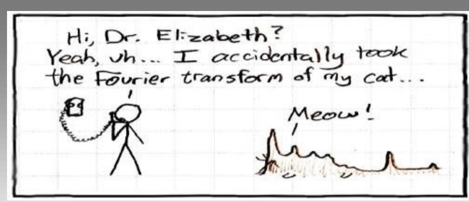
$$x[n]\times w[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]z^{-n} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)W\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

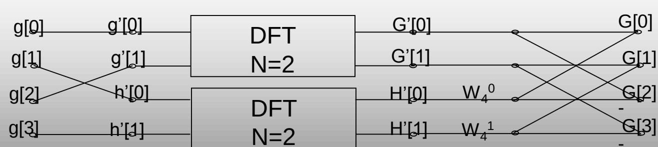
Convolução

- **Importante para avaliar o efeito no domínio das frequências, da multiplicação de dois sinais discretos.**
- **Por exemplo no caso da aplicação de uma janela.**
  - **Aplicação de uma janela rectangular a uma resposta impulsional:**

$$h_a[n] = h[n](u[n+n_0] - u[n-n_0-1])$$



Capítulo 6 – Transformada de Fourier Discreta **DFT**



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- **O que é?**
  - **A DFT é uma sequência e não uma função de variável contínua;**
  - **Corresponde a amostras igualmente espaçadas na frequência da Transformada de Fourier do sinal;**
  - **É aplicada a sequências finitas (sinais discretos de comprimento limitado, N).**
  - **A DFT desempenha um papel fundamental nos algoritmos de PDS – algoritmos eficientes para o seu cálculo – FFT.**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

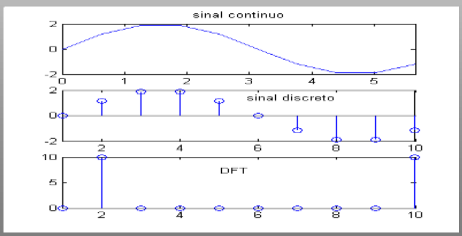
- **Vários caminhos para se chegar à DFT:**
  - **Estudar a TF de sinais discretos → representação contínua com w entre –π e π. Depois, amostrar no domínio das frequências (w).**
  - **Ver a representação no domínio das frequências através da Série de Fourier de sequências periódicas. Estudar as suas propriedades. E aplicar a Série de Fourier a sequências limitadas (abordagem seguida em 'Discrete-Time Signal Processing').**
  - **…**

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- **A Transformada de Fourier de um sinal discreto x[n], $X(e^{jw})$, é uma função de variável contínua w, que é periódica de período 2π.**
- **Em que condições se pode representar $X(e^{jw})$ por uma amostragem X(k)?**
  - **x[n] deve ser de comprimento limitado N;**
  - **A sua transformada $X(e^{jw})$ deve ser amostrada em, pelo menos, N pontos num período;**
  - **+ condições de amostragem**

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- **Nas condições enunciadas: um sinal de banda limitada e duração limitada pode ser representado por N amostras de:**
  - **sinal**
  - **Transformada de Fourier**

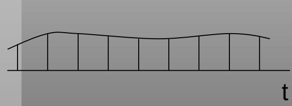


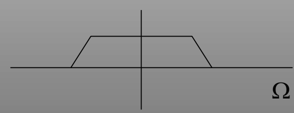
Amostragem nos domínios do Tempo e da Frequência

- **Quando se amostra um sinal contínuo $x_c(t)$,**

  $$x(n)=x_c(n\Delta t)$$

- **A sua transformada de Fourier $X_c(\Omega)$ tem que ser de banda limitada a um intervalo de largura igual ou inferior a $2\pi/\Delta t$ (senão ocorre *aliasing*).**





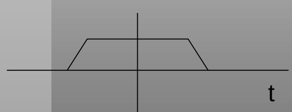
INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

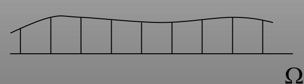
Amostragem nos domínios do Tempo e da Frequência

- **Quando se amostra a Transformada de Fourier $X_c(\Omega)$,**

  $$X(k)= X_c(k\Delta\Omega)$$

- **O sinal contínuo $x_c(t)$ tem de ser de duração limitada a um intervalo $2\pi/\Delta\Omega$ (senão ocorre *aliasing*).**





Transformada de Fourier Discreta

- **A transformada de Fourier discreta (DFT) de um sinal discreto x[n] de comprimento N é uma amostragem da sua transformada de Fourier X(e^{jw}) em N pontos igualmente espaçados do intervalo[0, 2π[.**

$$w_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0 \ldots N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2nk\pi}{N}}, \quad k = 0 \ldots N-1.$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2nk\pi}{N}}, \quad n = 0 \ldots N-1.$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Transformada de Fourier Discreta - FÓRMULAS

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} - j\sin\frac{2\pi}{N}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0 \ldots N-1.$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0 \ldots N-1.$$

Propriedades da DFT

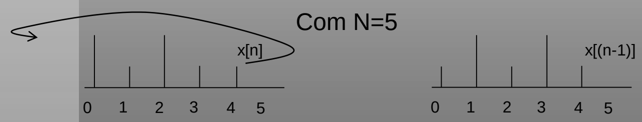
- **A DFT goza da propriedade da linearidade.**

$$DFT(ax_1[n]+bx_2[n]) = aDFT(x_1[n]) + bDFT(x_2[n])$$

- **Deslocamento no sinal discreto:**
  – **deslocar x[n] de m, x[n-m], corresponde a multiplicar X[k] por W_N^{mk}**

$$x[(n-m)] \rightarrow W_N^{mk}\, X[k]$$

Sendo o deslocamento <u>circular</u> ((.)):



Propriedades da DFT

- **A DFT tem a propriedade da convolução circular ou periódica:**
  – **Ao produto de duas DFT de comprimento N corresponde a convolução circular dos respectivos sinais discretos originais.**
    - **A convolução circular ou periódica é entendida como um período da convolução de um deles por um período do outro (ver exemplo).**

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]$$

    - **A convolução circular introduz *aliasing* se o comprimento do sinal resultante da convolução linear excede o comprimento da DFT**
      – **Senão, a convolução circular é igual à convolução linear.**

Propriedades da DFT

A dualidade entre os domínios original e transformado da DFT, confirmada pela semelhança entre as expressões da DFT e da iDFT, conduz a propriedades duais:

- **Um deslocamento circular de m em X[k], X[k-m], corresponde a multiplicar o sinal original por W_N^{-mk}**

$$x[n]W_N^{-mk} \rightarrow X[(k-m)]$$

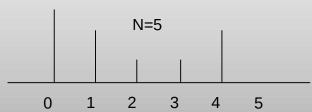
- **À multiplicação dos dois sinais discretos corresponde a convolução circular das duas DFT**

$$y[n] = x[n]h[n]$$
$$Y[k] = X[k] \otimes H[k]$$

Propriedades da DFT

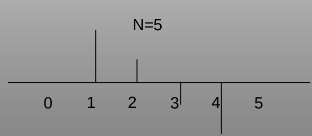
- **A periodicidade subjacente à DFT leva a que um sinal de comprimento N:**
  - **é par se:**

$$x[n] = x[N-n]$$



  - **é impar se:**

$$x[n] = -x[N-n]$$



Relação da DFT com a Tz

- **A DFT pode ser vista como uma amostragem da Tz em N pontos igualmente espaçados sobre a circunferência de raio unitário.**

$$z_k = W_N^{-k}, \quad k = 0 \ldots N-1$$

- **A Tz pode ser obtida a partir da DFT pela expressão:**

$$H[z] = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

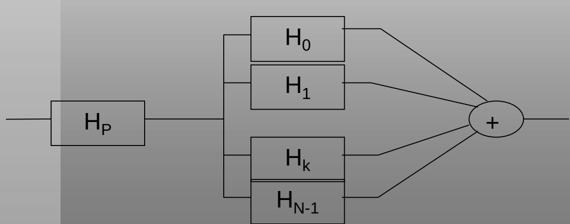
(Método usado no projecto de filtros digitais – 'Amostragem da função de transferência')

Relação da DFT com a Tz

$$H[z] = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

- **Pode ser implementado pela associação em série de um sistema $H_p(z)$ com diversos sistemas em paralelo $H_k(z)$.**

$$H_P[z] = \frac{1 - z^{-N}}{N} \qquad H_k[z] = \frac{H[k]}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}, \quad k = 0..N-1$$



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Convolução Linear Utilizando a DFT

- **A multiplicação de duas DFT corresponde a uma convolução circular.**
- **Mas, os sistemas realizam a convolução linear.**
- **Cabe aos utilizadores fazer a DFT de forma a que o resultado seja a da convolução linear.**

COMO?

- **Realizando a DFT com o comprimento da convolução linear. N=L+M-1.**

N – comprimento da DFT
L – comprimento de x[n]
M – comprimento de h[n]

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Convolução Linear Utilizando a DFT

Qual o interesse de fazer a convolução com a DFT?

$$X[k] = DFT(x[n])$$
$$H[k] = DFT(h[n])$$
$$Y[k] = X[k].H[k]$$
$$y[n] = iDFT(Y[k])$$

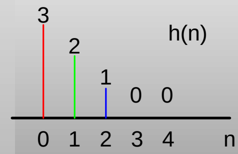
Porque não fazer directamente a convolução?

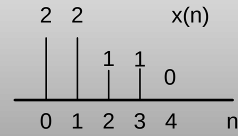
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- **PORQUE fazendo a DFT com algoritmos rápidos (fft) o tempo de processamento é MUITO menor (menor número de operações).**

Convolução Circular ou Periódica

- **y(n)=x(n)⊛h(n)**



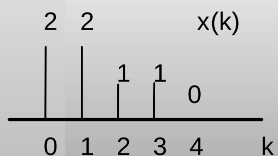


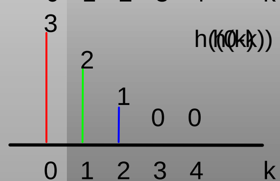
Comprimento N=5

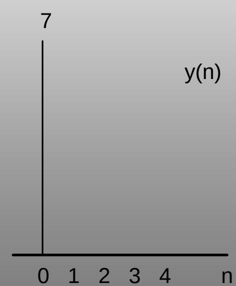
Convolução Circular ou Periódica

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$

Para n=0 y(0)=2x3+1x1=7



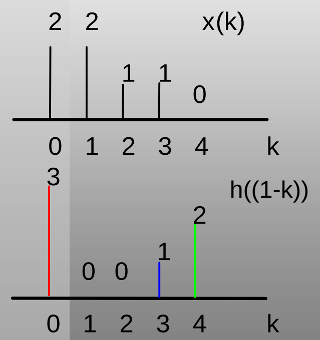


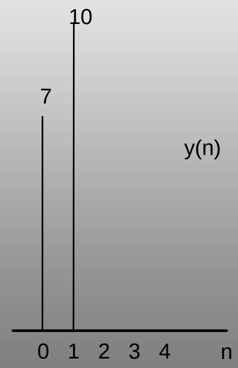


Convolução Circular ou Periódica

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$

Para n=1 y(1)=2x2+2x3=10



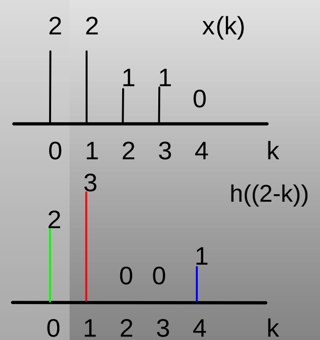


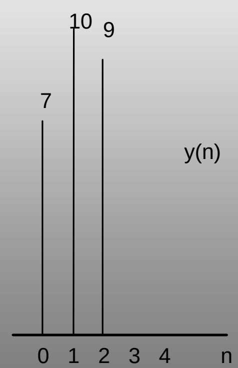
ipb INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Convolução Circular ou Periódica

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$

Para n=2 y(2)=2x1+2x2+1x3=9

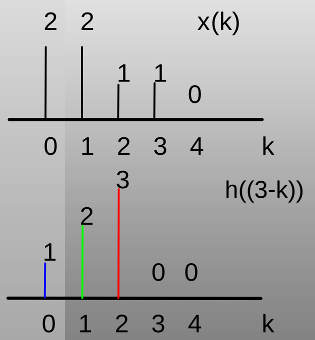


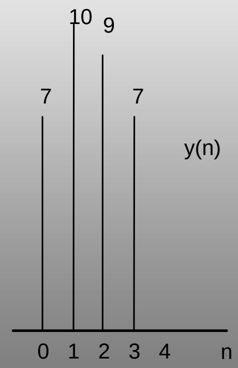


Convolução Circular ou Periódica

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$

Para n=3 y(3)=2x1+1x2+1x3=7

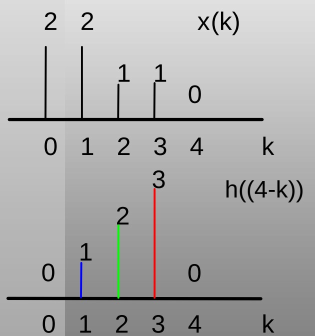


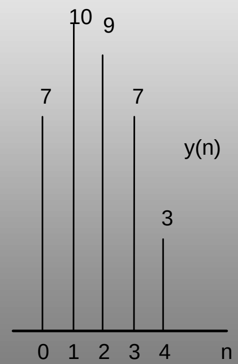


Convolução Circular ou Periódica

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)h((n-k))$$

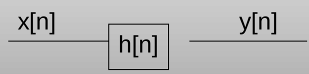
Para n=4 y(4)=1x1+1x2=3





Overlap

- **Como fazer no caso em que o comprimento L do sinal de entrada de um sistema é muito grande ou mesmo de valor indefinido (caso do processamento em tempo real)?**



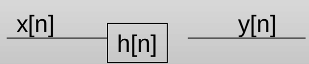
- **Não é possível realizar uma só DFT, é necessário fraccionar x[n] e depois juntar os resultados. Dois Métodos:**
  - **Overlap-Add**
  - **Overlap-Save**

Overlap-Add

- **x[n] é dividido em segmentos justapostos de comprimento L.**

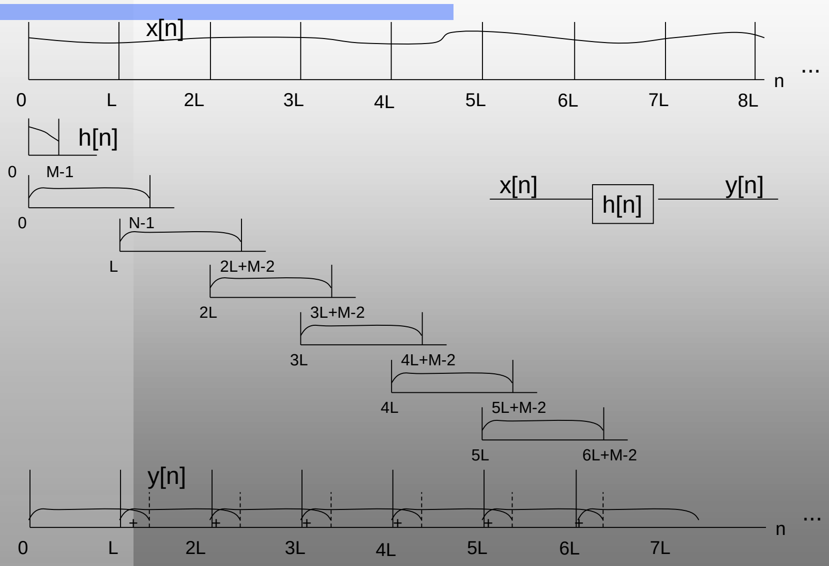
Em que: L=N-M+1 (lembram-se de N=L+M-1?)

N – comprimento da DFT
L – comprimento de x[n]
M – comprimento de h[n]



- **Determina-se a convolução (DFT) segmento a segmento**
- **Justapõem-se os resultados, sendo que em M-1 pontos se adicionam os resultados de dois segmentos consecutivos.**

Overlap-Add

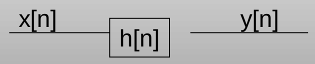


Overlap-Save

- **x[n] é dividido em segmentos justapostos de comprimento N (recrutando os M-1 pontos anteriores ao fim do segmento anterior) (No caso do primeiro segmento, acrescentam-se M-1 zeros no início).**

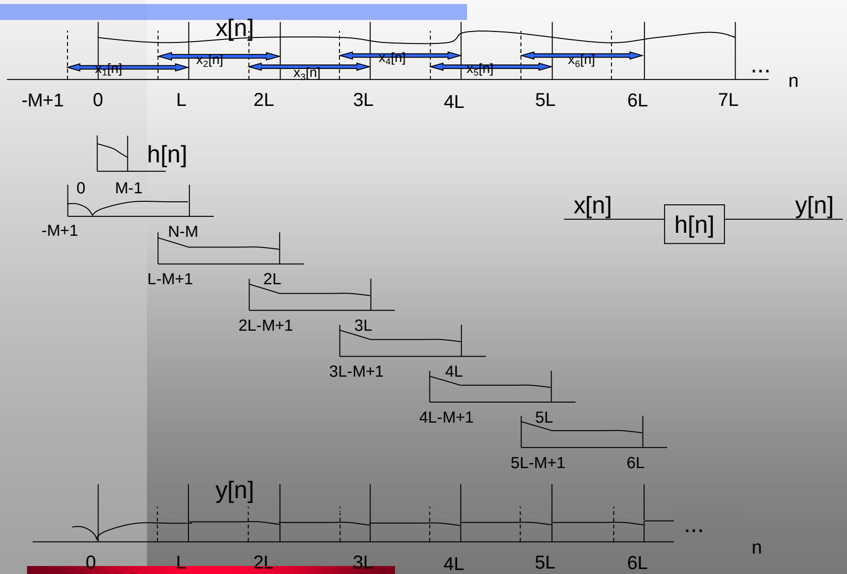
Em que: L=N-M+1 (lembram-se de N=L+M-1?)

N – comprimento da DFT
L – comprimento de x[n]
M – comprimento de h[n]

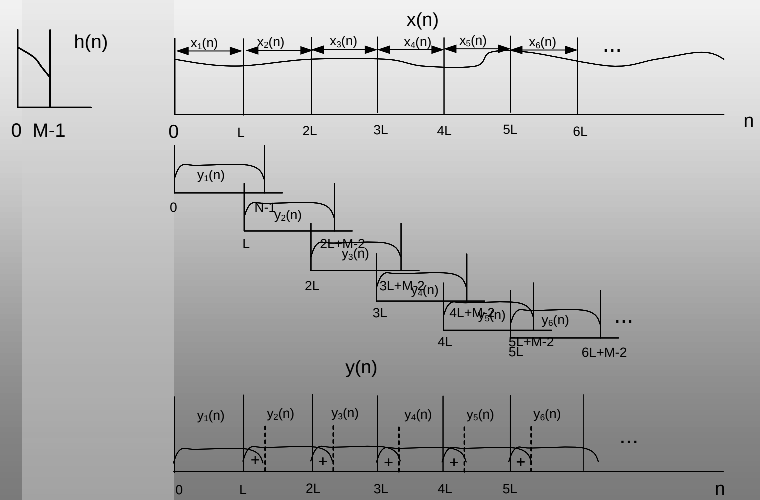


- **Determina-se a DFT comprimento N, segmento a segmento. (Repare-se que os M-1 pontos iniciais são determinados com *aliasing, mas os restantes estão correctos)*.**
- **Justapõem-se os pontos correctos sem necessidade de qualquer adição.**
  (Os M-1 pontos com aliasing, são simplesmente ‘deitados fora’).

Overlap-Save



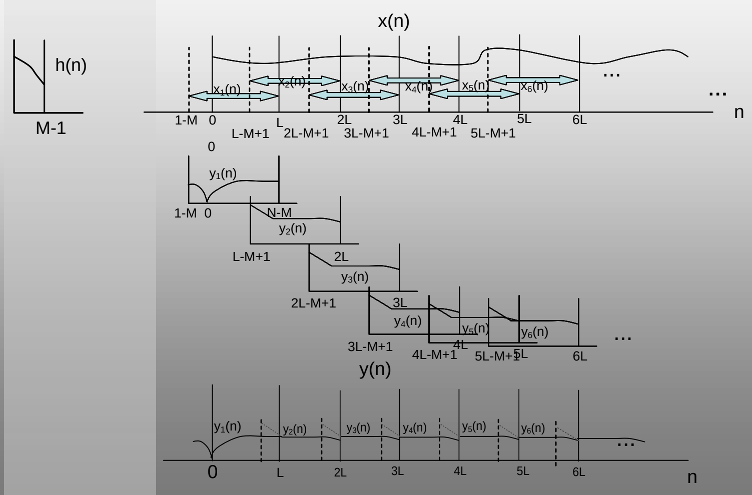
Overlap-add



Implementação Overlap-add

```
function y=overlap_add(x,h,N);
M=length(h);
L=N-M+1;
ya=zeros(1,length(x)+M);
H=fft(h,N);
i=1;
while i<length(x)-L+1
   x1=x(i:i+L-1);
   X1=fft(x1,N);
   Y1=X1.*H;
   y1=ifft(Y1);
   ya(i:i+N-1)=ya(i:i+N-1)+y1;
   i=i+L;
end
y=ya(1:length(x));
```


Overlap-save

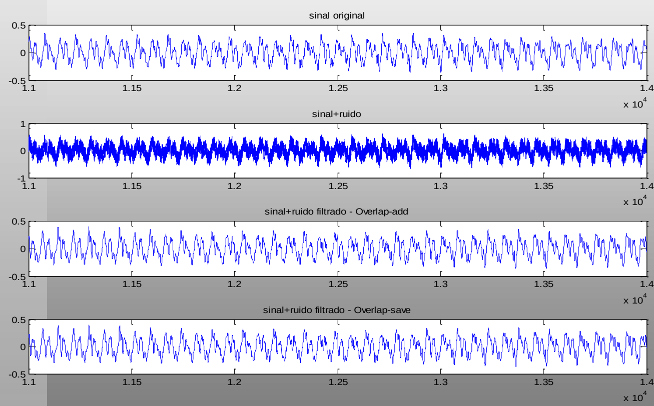


Implementação Overlap-save

```
function y=overlap_save(x,h,N);
M=length(h);
L=N-M+1;
y=zeros(1,length(x));
H=fft(h,N);
i=1;
while i<length(x)-L+1
   if i==1
      x1=[zeros(1,M) x(1:L-1)];
   else
      x1=x(i-M:i+L-2);
   end
   X1=fft(x1,N);
   Y1=X1.*H;
   y1=ifft(Y1);
   y(i:i+L-1)=y(i:i+L-1)+y1(M:N);
   i=i+L;
end
```


INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Exemplo - eliminação de ruído em música



Transformada Rápida de Fourier

FFT – Fast Fourier Transform

- **Trata-se de métodos matemáticos / algoritmos para efectuar a determinação da DFT de uma forma muito eficiente (rápida).**
- **A eficiência resulta da redução significativa do número de adições e multiplicações.**
- **Algoritmos de:**
  - **Decimação no:**
    - **tempo**
    - **frequência**
  - **Raíz:**
    - **2**
    - **4**
    - **Dupla (combinação de 2 e 4)**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 - Cooley & Tukey)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$g[n] = x[2n]$$

$$h[n] = x[2n+1], \quad n = 0..\frac{N}{2}-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- **Fundamentos matemáticos:**

x[n] é dividido nos sinais

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_N^{(2n+1)k}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \qquad k = 0..\frac{N}{2}-1$$

sendo

$$G[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \qquad k = 0..\frac{N}{2}-1$$

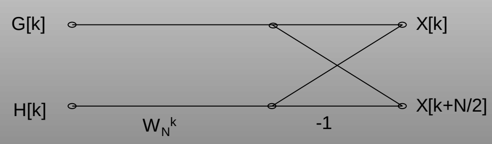
$$H[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \qquad k = 0..\frac{N}{2}-1$$

finalmente

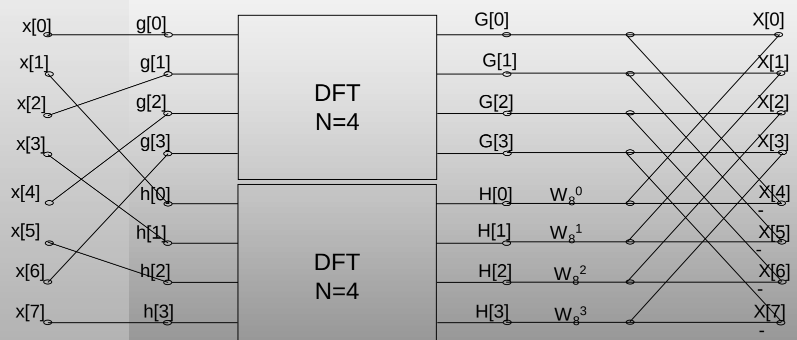
$$\boxed{\begin{aligned} X[k] &= G[k] + W_N^k H[k], \qquad k = 0..\frac{N}{2}-1 \\ X[k+\frac{N}{2}] &= G[k] - W_N^k H[k], \qquad k = 0..\frac{N}{2}-1 \end{aligned}}$$

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 (Cooley & Tukey)

- **Das expressões anteriores pode ver-se que se obtêm dois elementos de X[k] a partir de um elemento de G[k] e outro de H[k], com uma única multiplicação e duas adições.**
- **Borboleta:**

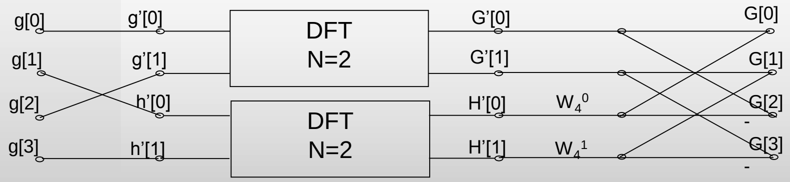


Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2 Exemplo para DFT com N=8

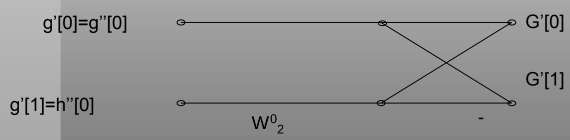


Cada DFT com N=4 é também realizada pelo mesmo processo

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2
Exemplo para DFT com N=8

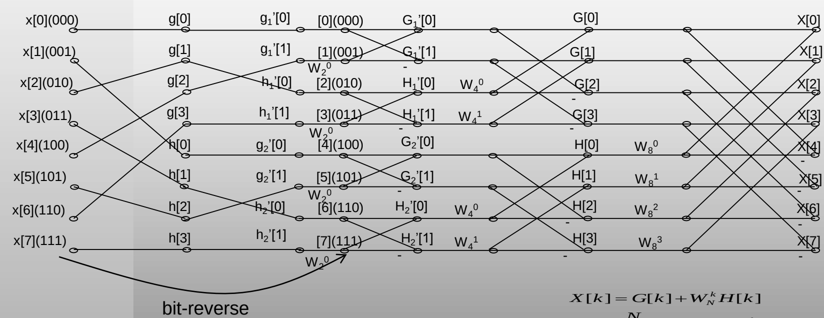


Cada DFT com N=2 é realizada por uma borboleta:



Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2
Exemplo para DFT com N=8

- **Tudo Junto:**



$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k]$$
$$X[k + \frac{N}{2}] = G[k] - W_N^k H[k]$$

- O algoritmo é realizado em duas partes:
  1. os elementos são arranjado segundo uma dada ordem – bit-reverse.
  2. Cálculo das "borboletas".

Algoritmo de Decimação no Tempo Raiz 2

- **Número de operações:**

Comprimento	andares	borboletas	Mult./borb.	adiç./borb.	Total de multiplicações	Total de adições
N	$\log_2 N$	N/2	1	2	$N/2*\log_2 N$	$N*\log_2 N$
1024	10	512	1	2	5120	10240

- **Pelo cálculo directo da DFT**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

Com N=1024:

1024*1024 ~~ 10^6 multiplicações
1024*1023 ~~ 10^6 adições

Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2

- **A DFT de um sinal discreto de comprimento N, par é:**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

- **Pode ser separada nos seus termos de ordem par e de ordem impar:**

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \right) W_{\frac{N}{2}}^{nk}, \qquad k = 0 \,..\, \frac{N}{2}-1$$

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] - x[n+\frac{N}{2}] \right) W_N^{n} W_{\frac{N}{2}}^{nk}, \qquad k = 0 \,..\, \frac{N}{2}-1$$

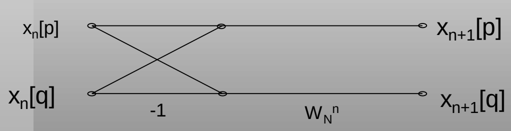
- **Que se podem considerar os sinais G[k] e H[k], DFT dos sinais:**

$$g[n] = x[n] + x[n+\frac{N}{2}], \qquad n = 0 \,..\, \frac{N}{2}-1$$

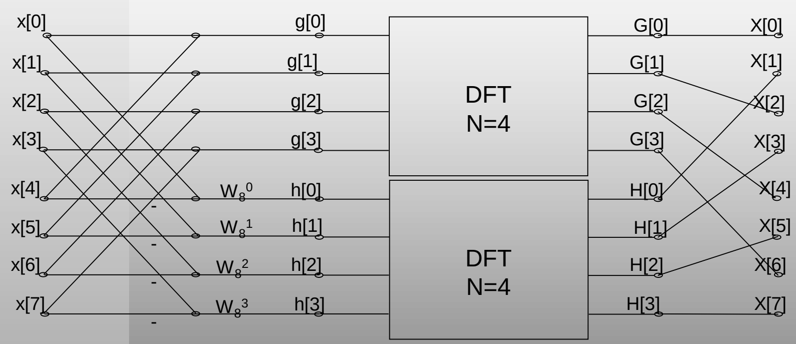
$$h[n] = (x[n] - x[n+\frac{N}{2}]) W_N^{n}, \qquad n = 0 \,..\, \frac{N}{2}-1$$

Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2

- **Podem-se obter 2 elementos de X[k] a partir de um elemento de G[k] e outro de H[k], com uma multiplicação e duas adições:**



Algoritmo de Decimação na Frequência Raiz 2
Exemplo para DFT com N=8



Mesmo número de operações que o algoritmo de decimação no tempo.

Algoritmo Raiz 4 (decimação no tempo)

- **Os algoritmos raiz 2 decompõem o sinal de entrada em 2.**
- **Os algoritmos raiz 4 decompõem o sinal de entrada em 4. Necessitam de menos multiplicações.**

dividindo o sinal x[n] em:

$$x_i[n] = x[4n+i], \quad n = 0 \,..\, \frac{N}{4}-1, \quad i = 0 \,..\, 3$$

De tal modo que:

$$X[k] = \sum_{i=0}^{3} W_N^{ik} X_i[k] \quad \text{em que} \quad X_i[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_i[n] W_N^{4nk}, \quad i=0 \,..\, 3$$

De onde resulta:

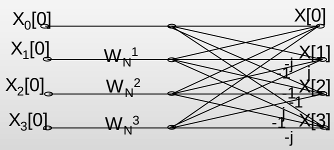
$$X[k] = X_0[k] + W_N^{k} X_1[k] + W_N^{2k} X_2[k] + W_N^{3k} X_3[k]$$

$$X[k+\frac{N}{4}] = X_0[k] - jW_N^{k} X_1[k] - W_N^{2k} X_2[k] + jW_N^{3k} X_3[k]$$

$$X[k+\frac{2N}{4}] = X_0[k] - W_N^{k} X_1[k] + W_N^{2k} X_2[k] - W_N^{3k} X_3[k]$$

$$X[k+\frac{3N}{4}] = X_0[k] + jW_N^{k} X_1[k] - W_N^{2k} X_2[k] - jW_N^{3k} X_3[k]$$

Algoritmo Raiz 4 (decimação no tempo)

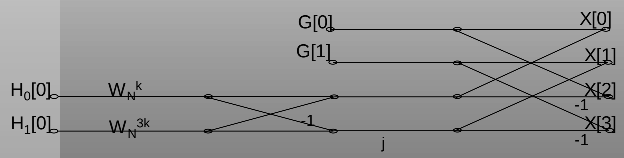


- **Usando 4 valores $X_i[k]$ obtém-se 4 valores de X[k] com 3 multiplicações e 12 adições (considerando as multiplicações por j incluídas nas adições).**
- **São necessários menos andares.**

Raiz	Comprimento	andares	borboletas	Mult./borb.	adiç./borb.	Total de multiplicações	Total de adições
2	N	$\log_2 N$	N/2	1	2	N/2*$\log_2 N$	N*$\log_2 N$
	1024	10	512	1	2	5120	10240
4	N	$(\log_2 N)/2$	N/4	3	12	3N/8*$\log_2 N$	3/2N*$\log_2 N$
	1024	5	256	3	12	3840	15360

Algoritmo Raiz dupla (decimação no tempo)

- **Usam simultaneamente as raízes 2 e 4.**
- **Necessitam ainda menor número de multiplicações que as anteriores (tende para 2/3 do número de multiplicações do algoritmo raiz 2.**
- **Mesmo número de adições que o algoritmo raiz 2.**
- **Uma borboleta requer 2 multiplicações e 6 adições complexas para determinar 4 elementos de X[k].**



Transformada de Fourier Discreta Inversa

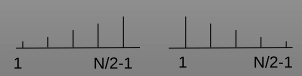
$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}, \quad k=0\ldots N-1.$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-nk}, \quad n=0\ldots N-1.$$

- **Diferem apenas de 1/N e do sinal do expoente nk.**
- **Pode-se usar o algoritmo FFT com uma pequena modificação.**
- **3 Métodos:**
  - **Método 1**

$$x[-n]=\frac{1}{N}DFT[X[k]]$$

  - **A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT**
    - **com os coeficientes X[k],**
    - **Dividindo o resultado por N,**
    - **Re-ordenando as posições dos elementos de ordem n e N-n, para n=1..N/2-1**



Transformada de Fourier Discreta Inversa

– **Método 2**

$$x[n] = \frac{1}{N} DFT[X^*[k]]^*$$

- **A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT**
  - **com os coeficientes X[k] conjugados,**
  - **dividindo o resultado por N,**
  - **determinar os seus conjugados.**

– **Método 3**

$$x_I[n] + jx_R[n] = \frac{1}{N} DFT[X_I[k] + jX_R[k]]$$

- **A iDFT pode ser determinada usando o algoritmo FFT**
  - **com os coeficientes X[k], com as suas partes real e imaginária trocadas,**
  - **dividindo o resultado por N,**
  - **Trocar as partes real e imaginária do resultado.**

Capítulo 7 – Filtros

Filtros

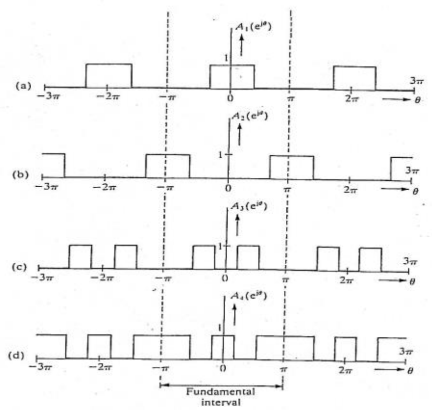
- **Classificação de Filtros:**
  - **Passa-baixo**
  - **Passa-alto**
  - **Passa-banda**
  - **Rejeita-banda**
- **Outros tipos de filtros:**
  - **Diferenciador** $H_D(e^{j\theta}) = j\theta \text{ para } |\theta| \leq \pi$
  - **Integrador** $H_I(e^{j\theta}) = {}^{1}\!/_{j\theta} \text{ para } |\theta| \leq \pi$
  - **Transformada de Hilbert**

$$H_H(e^{j\theta}) = \begin{cases} j \text{ para } 0 \leq \theta < \pi \\ -j \text{ para } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

  - **Passa tudo (phase-shifter)**

$$|H_F(e^{j\theta})| = 1 \text{ para } |\theta| \leq \pi$$

Filtros Ideais



PBaix

PA

PBand

RB

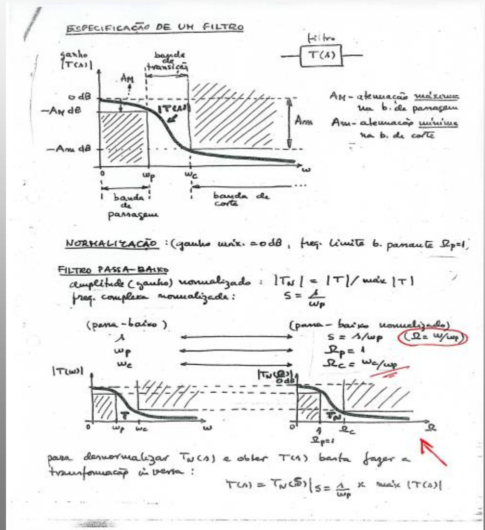
Filtros FIR e IIR

Característica	FIR	IIR
Função de Sistema	Contém apenas zeros	Contém pólos e zeros
Resposta em frequência	O método de projecto normal é bom para respostas em frequência arbitrárias	O método de projecto é bom principalmente para filtros PB, PA, PB e RB.
Características de fase	São possíveis filtros de fase exactamente linear. Não são possíveis phase-shifters	Fase linear só podem ser aproximados. A especificação do filtro só se reporta à amplitude. São possíveis Phase shifter
Estabilidade	Sempre estáveis	Instável se existem pólos fora do circulo unitário.
Complexidade	Proporcional ao comprimento da h(n).	Não existe relação com h(n).
Estrutura	Habitualmente não recursiva. Também pode ser recursiva.	Apenas estrutura recursiva.

Projecto de Filtros Digitais

- **Estados do processo de projecto de filtros digitais a partir das suas especificações:**
  - **Escolha do tipo de filtro FIR ou IIR;**
  - **Determinação (escolha) da ordem do filtro e cálculo dos coeficientes da função do filtro;**
  - **Escolha da estrutura do filtro (tomar em consideração os efeitos de quantificação dos sinais de entrada, de saída e dos coeficientes do filtro);**
  - **Verificar se os resultados do filtro projectado se enquadram nas especificações iniciais. Se não, repetir o processo de projecto com algumas alterações (ordem do filtro, etc).**

Especificação



Filtros Digitais do tipo FIR

- **Estes filtros <u>podem</u> ser de fase linear:**

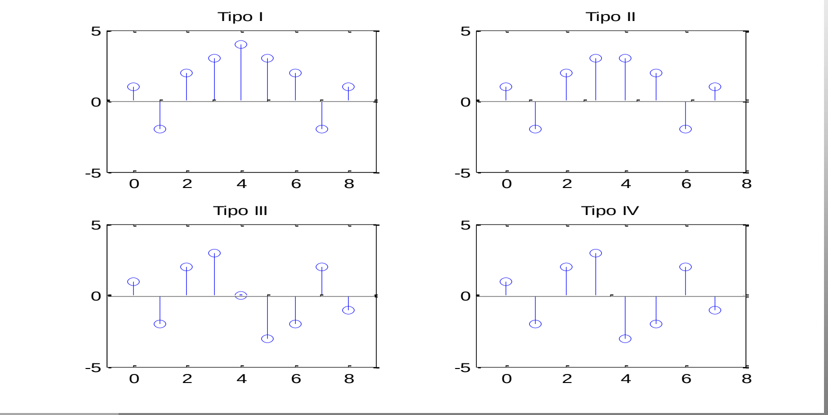
$$h[n] = \begin{cases} \pm h[N-1-n], & se \ 0 \le n \le N-1 \\ 0 \quad se \ nao \end{cases}$$

- **Assim, podem ser classificados como:**

	Comprimento Impar	Comprimento Par
Simetria +	Tipo I	Tipo II
Simetria -	Tipo III	Tipo IV

Tipos de Filtros FIR

h[n]



Tipos de Filtros FIR

Tipo I **(simetria positiva e N ímpar)**

$$h[n] = h[N-1-n] \qquad H(e^{jw}) = A(w)e^{-jw\frac{N-1}{2}}$$

$$A(w) = h\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n]\cos\left(w\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

Tipo II **(simetria positiva e N par)**

$$h[n] = h[N-1-n] \qquad H(e^{jw}) = A(w)e^{-jw\frac{N-1}{2}}$$

$$A(w) = 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\cos\left(w\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

Para w=π, H(e^{jw})=0

Não pode ser um passa-alto.

Tipos de Filtros FIR

Tipo III (simetria negativa e N ímpar)

$$h[n] = -h[N-1-n] \qquad H(e^{jw}) = jB(w)e^{-jw\frac{N-1}{2}}$$

$$B(w) = 2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n]sen\left(w\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right)$$

Para w=0 ou w=π, H(e^{jw})=0

É adequado para diferenciadores ou filtros de Hilbert.

Tipo IV (simetria negativa e N par)

$$h[n] = -h[N-1-n] \qquad H(e^{jw}) = jB(w)e^{-jw\frac{N-1}{2}}$$

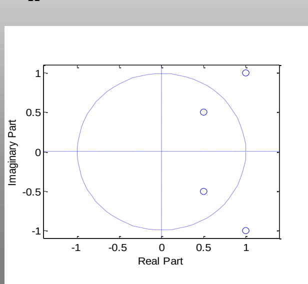
$$B(w) = 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]sen\left(w\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right)$$

Para w=0, H(e^{jw})=0

É adequado para diferenciadores ou filtros de Hilbert.

Relação entre os zeros de filtros FIR de fase linear

- **Quando os coeficientes de um sistema discreto são reais, os pólos e zeros complexos ocorrem aos pares (com os respectivos conjugados).**
- **E, se o sistema for de fase linear, para um zero em z_k ocorre outro em z_k^{-1}.**



Projecto de Filtros Digitais do tipo FIR

- **Métodos de projecto:**
  - **Método da janela – consiste em determinar a $h_d[n]$. Como $h_d[n]$ é normalmente de comprimento infinito, é necessário multiplica-la por uma janela de comprimento finito.**
    - **Janela rectangular**
    - **Janela Hamming generalizada**
      - **Hamming**
      - **Hanning**
    - **Blackman**
  - **Amostragem da função de Transferência – consiste em amostrar a H(z) em N pontos...**
  - **Projecto óptimo – optimização da resposta em frequência do filtro por processo iterativo.**

Filtros FIR - Método da janela

- **Partindo de uma determinada resposta em frequência $H(e^{jw})$, real e par, determina-se a resposta impulsional:**

$$h_n[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw}) e^{jwn} dw$$

- **que é real e par e normalmente de comprimento infinito.**
- **É necessário truncá-la usando uma janela w[n].**

Filtros FIR - Método da janela

- **A janela deve obedecer às condições:**
  - **(supondo N ímpar)**

$$w[n] = w[-n]$$

$$w[n] = 0 \qquad \text{para } n < -\frac{N-1}{2} \quad \text{ou} \quad n > \frac{N-1}{2}$$

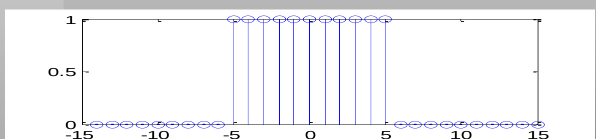
- **resultando: <u>h[n]=w[n]h$_n$[n]</u> com comprimento finito.**
- **Contudo, a resposta em frequência do sistema resultante é:**

$$\boxed{H(e^{jw}) = W(e^{jw}) * H_d(e^{jw})}$$

Filtros FIR - Método da janela

- **Se se pretender um filtro <u>causal</u>, desloca-se a janela para a direita de n=0, através da introdução de um atraso de (N-1)/2.**
- **A w[n] – mais óbvia é a janela rectangular:**

$$w_R(n) = u\left[n + \frac{N-1}{2}\right] - u\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$$



- **Mas introduz um grande 'overshoot' nas descontinuidades de H_d (fenómeno de Gibbs).**

Outras Janelas

- **Hanning**

$$w_N[n]=\left(0.5+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)w_R[n]$$

- **Hamming**

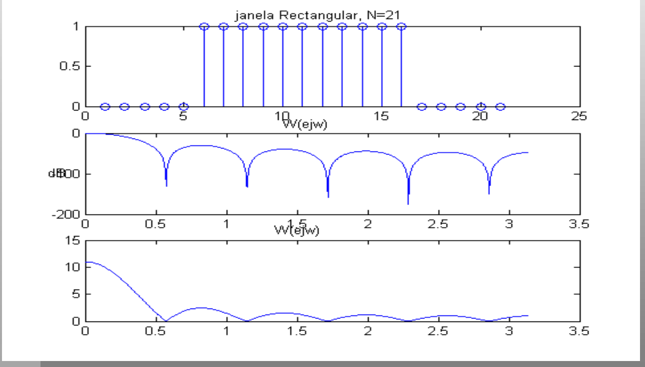
$$w_M[n]=\left(0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)w_R[n]$$

- **Blackman**

$$w_B[n]=\left(0.42+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right)w_R[n]$$

Janelas

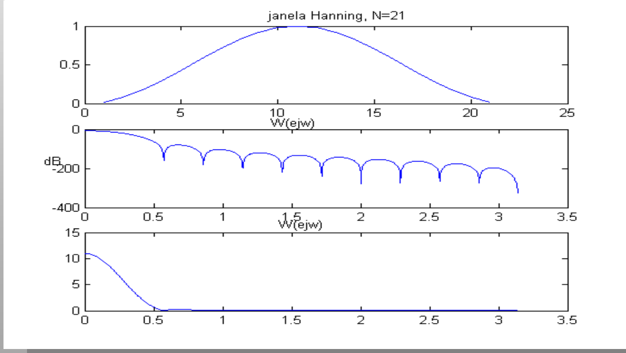
- **Rectangular**



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Janelas

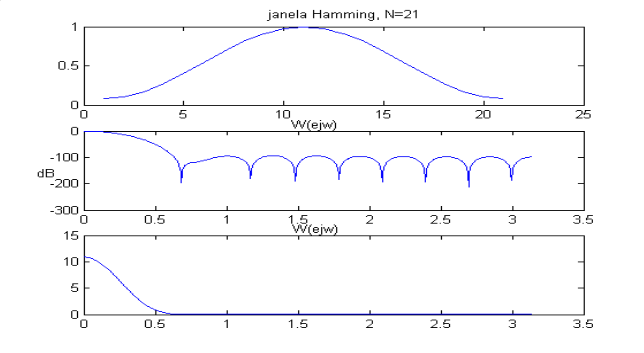
- **Hanning**



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

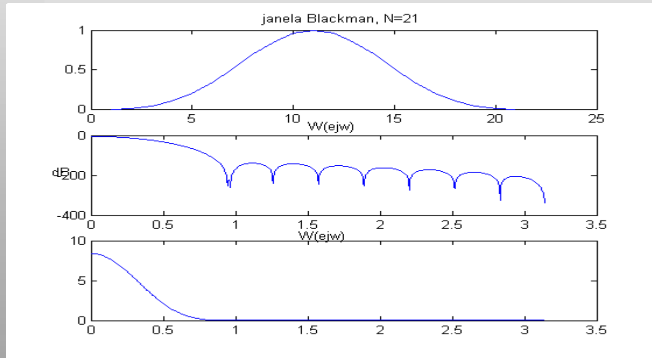
Janelas

- **Hamming**



Janelas

- **Blackman**



Exemplos de Janelas

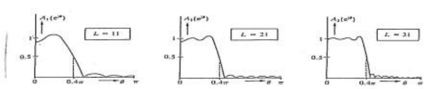


FIGURE 8.5 Approximation of an ideal low-pass filter with impulse responses of length $L = 11$, $L = 21$ and $L = 31$.

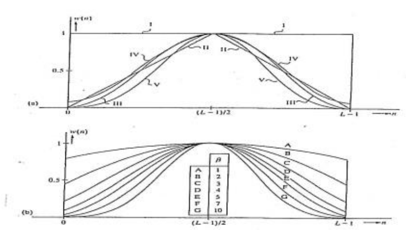


FIGURE 8.7 (a) Five widely used window functions: I. Rectangular, II. Bartlett, III. Hanning, IV. Hamming, V. Blackman. (b) The Kaiser windows for various values of β.

IPB INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Exemplos de Janelas

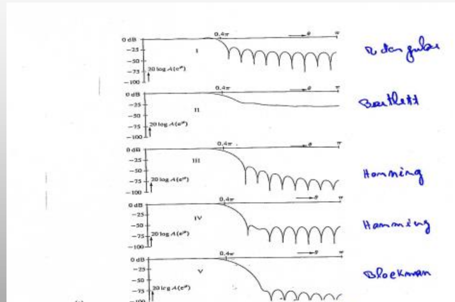
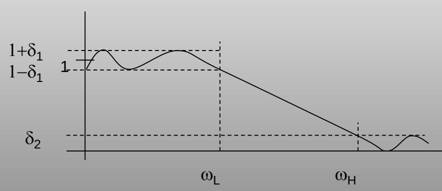


FIGURE 8.8 (a) Effects of five windows on the example of Fig. 8.4 when $L = 31$. I. Rectangular window. II. Bartlett window. III. Hanning window. IV. Hamming window. V. Blackman window. (b) Effects of the Kaiser window (with $\beta = 1$, $\beta = 6$ and $\beta = 10$) on the example of Fig. 8.4 when $L = 31$.

IPB INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Filtros FIR – Projecto Óptimo

- **A ordem do filtro é minimizada num processo iterativo. Para isso procura-se explorar ao máximo o *ripple* admitido nas bandas de passagem e de rejeição.**



$$N \approx \frac{15 - 10\log_{10}(\delta_1 \delta_2)}{14\Delta f} + 1$$

$$\Delta f = \frac{(w_H - w_L)}{2\pi}$$

Filtros FIR – Em Matlab

B = FIR1(N,Wn) designs an N'th order lowpass FIR digital filter
and returns the filter coefficients in length N+1 vector B.
The cut-off frequency Wn must be between 0 < Wn < 1.0, with 1.0
corresponding to half the sample rate. The filter B is real and
has linear phase. The normalized gain of the filter at Wn is
-6 dB.

A=1;

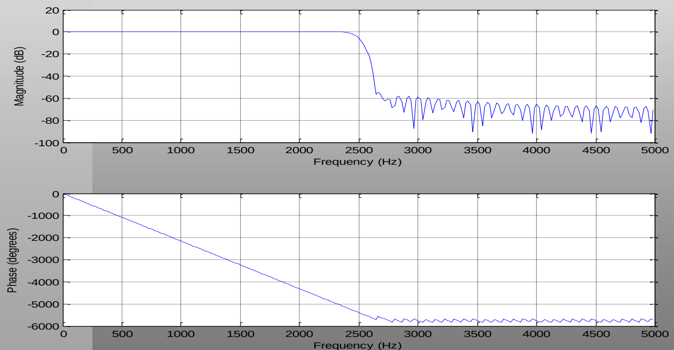
Y = FILTER(B,A,X) filters the data in vector X with the filter described by vectors A and B to create the filtered data Y. The filter is a "Direct Form II Transposed" implementation of the standard difference equation:

a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... + b(nb+1)*x(n-nb)
- a(2)*y(n-1) - ... - a(na+1)*y(n-na)

Filtros FIR – Em Matlab

- **Filtro FIR de ordem 120, com Fa=10000 Hz e Fc=2500 Hz.**

```
A=1;
B=fir1(120,2500/5000);
freqz(B,A,300,10000)
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



Filtros Digitais IIR

- **São projectados a partir de filtros analógicos.**
- **Transformados em filtros digitais por um dos métodos:**
  - **Invariância da Resposta impulsional;**
  - **Transformação bilinear.**
- **Os filtros analógicos originais podem ser projectados tirando partido dos filtros de Butterworth, de Chebyshev e elípticos.**

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- **Consiste em impor que a resposta impulsional do filtro digital é uma amostragem da resposta impulsional do filtro analógico.**

$$h[n] = Th_a(nT)$$

- **O factor T garante que a energia da resposta em frequência dos dois filtros é a mesma.**

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- **O método corresponde a um mapeamento dos pólos de $H_a(s)$ do plano s sobre o plano z:**

$$z_k = e^{s_k T}$$

- **Para a função de transferência do filtro analógico só com pólos simples:**

$$H_a(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k}$$

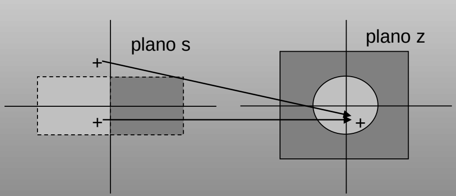
- **resulta a função de transferência do filtro digital:**

$$H(z) = T \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Filtros IIR – Método da Invariância da Resposta Impulsional

- **O mapeamento não é biunívoco, já que todos os pólos** $s_k + j\dfrac{2\pi r}{T}$, com r inteiro

correspondem ao mesmo pólo z_k.



- **dando origem à ocorrência de aliasing.**

Filtros IIR – Método da Transformação Bilinear

- **Permite passar directamente da função de transferência do filtro analógico para a função de transferência do filtro digital, pela substituição:**

$$s \Rightarrow \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

- **que define um mapeamento biunívoco.**
- **Um sistema contínuo causal e estável, dá origem a um sistema discreto causal e estável, porque todo o semiplano esquerdo de s é mapeado no interior da circunferência de raio unitário em z.**

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Filtros IIR – Método da Transformação Bilinear

- **O eixo jΩ do plano s corresponde à circunferência unitária do plano z.**

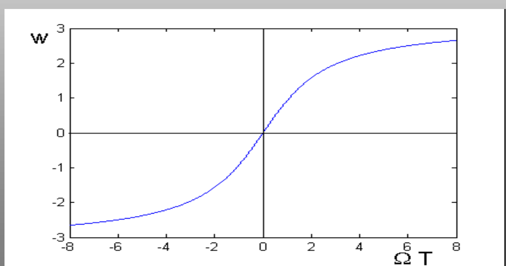
$$z = e^{j2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}$$

- **Relação entre as frequências analógica Ω e digital ω:**

$$w = 2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$w_c = \frac{f_c}{f_a}2\pi$$



Filtros IIR – Método da Transformação Bilinear

- **Etapas no projeto de filtros digitais IIR pelo método da transformação bilinear, a partir de um filtro analógico RC de 1ª ordem:**
  1. **Determinação da frequência angular de corte do filtro digital a partir das frequências de corte linear do filtro pretendido e da frequência de amostragem -** $W_c = \frac{f_c}{f_a} 2\pi$
  2. **Determinar a frequência angular do filtro analógico pretendido** $\Omega c = \frac{2}{T} \tan(W_c/2)$
  3. **H(s)=** $\Omega_c/(\Omega_c+s)$
  4. **Obter H(z) substituindo** $s \Rightarrow \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Filtros IIR – Em Matlab
Determinação da Ordem do Filtro

- **Filtros Butterworth**

  [N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws, Rp, Rs) returns the order N of the lowest order digital Butterworth filter that loses no more than Rp dB in the passband and has at least Rs dB of attenuation in the stopband. Wp and Ws are the passband and stopband edge frequencies, normalized from 0 to 1 (where 1 corresponds to pi radians/sample).

  BUTTORD also returns Wn, the Butterworth natural frequency (or, the "3 dB frequency") to use with BUTTER to achieve the specifications.

- **Filtros Chebyshev**

  [N, Wn] = CHEB1ORD(Wp, Ws, Rp, Rs) Chebyshev Type I filter order selection.

  [N, Wn] = CHEB2ORD(Wp, Ws, Rp, Rs) Chebyshev Type II filter order selection

- **Filtros Elípticos**

  [N, Wn] = ELLIPORD(Wp, Ws, Rp, Rs) Elliptic filter order selection

Filtros IIR – Em Matlab
Determinação da H(z)

- **Filtro de Butterworth**

  BUTTER Butterworth digital and analog filter design.

  [B,A] = BUTTER(N,Wn) designs an Nth order lowpass digital Butterworth filter and returns the filter coefficients in length N+1 vectors B (numerator) and A (denominator). The coefficients are listed in descending powers of z. The cutoff frequency Wn must be 0.0 < Wn < 1.0, with 1.0 corresponding to half the sample rate.

- **Filtro de Chebyshev**

  CHEBY1 Chebyshev Type I digital and analog filter design.

  [B,A] = CHEBY1(N,R,Wn) designs an Nth order lowpass digital Chebyshev filter with R decibels of peak-to-peak ripple in the passband.

  CHEBY2 Chebyshev Type II digital and analog filter design.

  [B,A] = CHEBY2(N,R,Wn)

- **Filtro Eliptico**

  ELLIP Elliptic or Cauer digital and analog filter design.

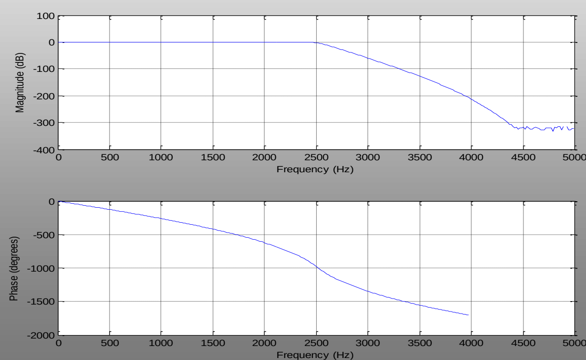
  [B,A] = ELLIP(N,Rp,Rs,Wn) designs an Nth order lowpass digital elliptic filter with Rp decibels of peak-to-peak ripple and a minimum stopband attenuation of Rs decibels.

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Filtros IIR Butterworth – Em Matlab

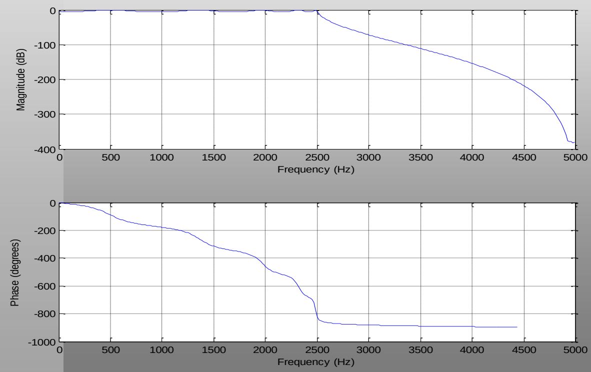
- **Filtro IIR com Fa=10000 Hz, Fc=2500 Hz.**

  [N,Wn]=buttord(2500/5000,3000/5000,3,60);
  [B,A]=butter(N,Wn);
  freqz(B,A,300,10000);
  y=filter(B,A,x); % implementação do filtro



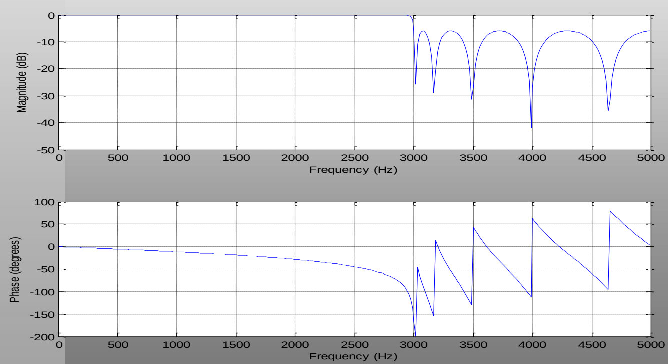
Filtros IIR Chebyshev I – Em Matlab

[N,Wn]=cheb1ord(2500/5000,3000/5000,3,60);
[B,A]=cheby1(N,6,Wn);
freqz(B,A,300,10000);
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro



Filtros IIR Chebyshev II – Em Matlab

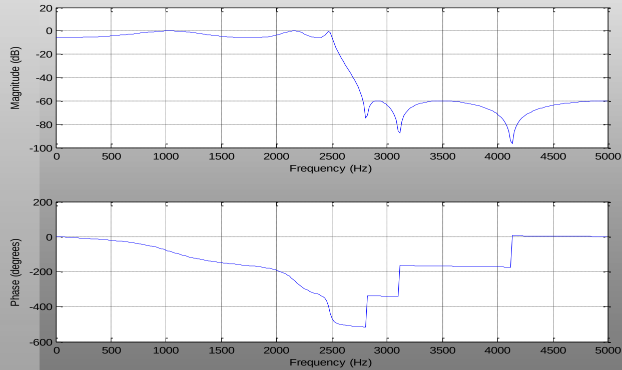
[N,Wn]=cheb2ord(2500/5000,3000/5000,3,60);
[B,A]=cheby2(N,6,Wn);
freqz(B,A,300,10000);
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Filtros IIR Elíptico – Em Matlab

```
[N,Wn]=ellipord(2500/5000,3000/5000,3,60);
[B,A]=ellip(N,6,60,Wn);
freqz(B,A,300,10000);
y=filter(B,A,x); % implementação do filtro
```



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

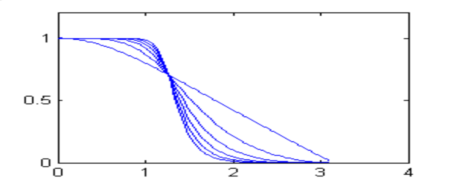
Projecto de filtros analógicos

- **Os filtros digitais são projectados a partir de filtros analógicos.**
- **Para o projecto de filtros analógicos aproveita-se o conhecimentos sobre os filtros:**
  - **Butterworth**
  - **Chebyshev**
    - **tipo I**
    - **tipo II**

Porque é possível a partir do conhecimento da frequência de corte e da ordem do filtro, obter a função de transferência (pólos).

Filtros de Butterworth

- **Resposta em frequência monotónica (sem *ripple*).**
- **Exemplos da resposta em frequência para filtros de ordem 1 a 6:**



- **Módulo da resposta em frequência (com Ω_c - frequência angular de corte e N – ordem do filtro):**

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Filtros de Butterworth

- **Determinação dos pólos:**
  - **resolvendo a equação:**

$$1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

  - **que admite 2N soluções igualmente espaçadas sobre uma circunferência de raio Ω_c e centrada na origem do plano s:**

$$s_k = j\Omega_c e^{-j\left(\frac{\pi}{2N}+k\frac{2\pi}{2N}\right)} \text{ , k=0..2N-1}$$

ou rodando em sentido contrário:

$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1)} \text{ , k=0..2N-1}$$

  - **e retendo apenas os N pólos situados no semi-plano esquerdo do plano s.**

Filtros de Butterworth

- **A função de transferência dos filtros de Butterworth é do tipo:**

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + a_1 \frac{s}{j\Omega_c} + \ldots + a_N \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)^N}$$

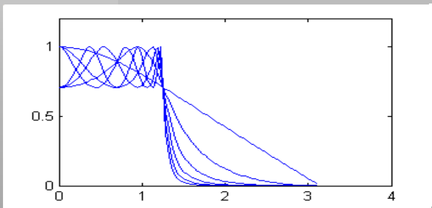
- **os coeficientes $a_1 \ldots a_N$ são retirados de uma tabela.**
- **A ordem N do filtro pode ser obtida pelo nomograma recorrendo às especificações do filtro, ou pela expressão:**

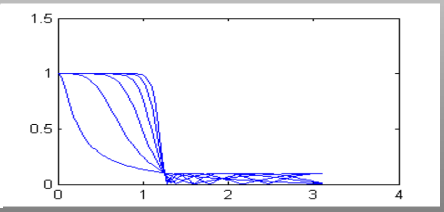
$$N \geq \frac{\log\left(\sqrt{10^{0.1Am} - 1}\right)}{\log w_c}$$

- **A função de transferência é obtida em Matlab usando a função *butter*.**

Filtros de Chebyshev

- **Apresentam ripple numa das bandas, de passagem (tipo I) ou de bloqueio (tipo II), mas levam a soluções mais económicas em termos da ordem do filtro.**
- **Exemplos da resposta em frequência para filtros de ordem 1 a 6:**





Filtros de Chebyshev

- **Do tipo I**
  - **apresentam *ripple* na banda de passagem (ε – atenuação na banda de bloqueio):**

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}, \text{ em que}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos\left(N\cos^{-1}(x)\right), & \text{se } |x| \le 1 \\ \cosh\left(N\cosh^{-1}(x)\right), & \text{se não} \end{cases}$$

  - **Do tipo II**
  - **apresentam ripple na banda de bloqueio:**

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega_c}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)}}$$

Filtro Passa Tudo

- **Um filtro passa tudo tem a resposta em frequência constante para todas as frequências. A sua principal aplicação é a modificação da fase da resposta em frequência sem alterar a amplitude.**
- **Um sistema com um pólo em α e um zero em α^{*-1} é um filtro passa tudo.**

$$H(z) = \frac{z-\alpha^{*-1}}{z-\alpha}$$

então

$$\left|H(e^{jw})\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

Transformações no Domínio das Frequências

- **Através de uma mudança de variável adequadamente definida e com uma escolha correcta de um parâmetro é possível transformar um filtro passa baixo noutro tipo de filtro:**
  - **passa baixo → passa baixo**
  - **passa baixo → passa alto**
  - **passa baixo → passa banda**
  - **passa baixo → rejeita banda (tampão)**

Passa Baixo → Passa Baixo

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

- **em que**

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_p - \omega_p}{2}}{\sin \frac{\theta_p + \omega_p}{2}}$$

- **com**

θ_p - frequência de corte do filtro original

ω_p - frequência de corte do filtro pretendido

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Passa Baixo → Passa Alto

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

- **em que**

$$\alpha = -\frac{\cos\dfrac{\omega_p + \theta_p}{2}}{\cos\dfrac{\omega_p - \theta_p}{2}}$$

- **com**

  θ_p - frequência de corte do filtro original

  ω_p - frequência de corte do filtro pretendido

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Passa Baixo → Passa Banda

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \dfrac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \dfrac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}$$

- **em que**

$$\alpha = \frac{\cos\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

$$k = \cot g\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, tg\,\frac{\theta_p}{2}$$

- **com**

  θ_p - frequência de corte do filtro original

  ω_1 - frequência inferior de corte do filtro pretendido

  ω_2 - frequência superior de corte do filtro pretendido

Passa Baixo → Rejeita Banda (Tampão)

- **Mudança de variável:**

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2k}{1+k} Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + 1}$$

- **em que**

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

$$k = tg \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \, tg \frac{\theta_p}{2}$$

- **com**

θ_p - frequência de corte do filtro original

ω_1 - frequência inferior de corte do filtro pretendido

ω_2 - frequência superior de corte do filtro pretendido

Processamento Digital de Sinal

FIM

Processamento Digital de Sinal

Caderno de exercícios
PARA AS AULAS

João Paulo Teixeira
ESTiG, 2016

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 1 – Introdução ao Matlab

1. Identificar no ambiente Matlab o 'Command Window', o 'Workspace', o 'Current Directory' (caixa de visualização dos ficheiros e a caixa com o caminho) e o 'Command History'.

2. Criar variáveis na linha de comandos: a=5; b=3+2i; c=[1 2 3 4]; d=[1;2;3;4];

   e=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3+i \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2i \end{bmatrix}$; Ver a utilização do ; no final da linha de comandos, ver as variáveis no workspace.

   Altere o valor e(2,2)=10.

3. Realizar as seguintes operações e verificar as diferenças:
   a. f=c*d
   b. g=d*c
   c. h=c.*d'

4. Criar e representar os seguintes sinais.

   a. Na linha de comandos criar o sinal x como uma onda sinusoidal contínua com t entre 0 e 0.1 segundos com espaçamento de 1 ms. O sinal deve ter uma amplitude de 4 e uma frequência de 50 Hz. [x=A*sin(2*pi*f*t+fase)]

   b. Usando o comando *plot* represente o sinal x. Use os comandos *xlabel*, *ylabel*, *title* e *grid* para dar nomes aos eixos, ao título e colocar uma grelha na figura.

5. Abra um ficheiro .m para escrever o código (script) para realizar as seguintes operações:

   a. Coloque em comentário (%) nas primeiras linhas do programa alguma informação sobre o que faz o programa, a identificação do autor e a data

   b. Criar o sinal x1 como uma onda sinusoidal contínua com t entre 0 e 0.1 segundos com espaçamento de 1 ms. O sinal deve ter uma amplitude de 4 e uma frequência de 50 Hz.

   c. Crie o sinal x2 como sendo o harmónico de ordem 3 do sinal x1, com amplitude 2.

   d. Crie os sinais y e z como sendo a soma e a subtração, respetivamente dos dois anteriores.

   e. Represente em quatro subfiguras os 4 sinais criados, usando os comandos *plot* e *subplot*.

6. Num script use um ciclo *for* para determinar o seguinte somatório:

$$S = \sum_{i=5}^{35} i^2$$

7. Determine o somatório anterior usando um ciclo *while*.

8. Determine o somatório anterior apenas para os valores de i ímpares, usando um ciclo *for*, a condicionante *if* e a função *mod* (resto da divisão).

9. Crie uma função para gerar ondas sinusoidais. A função deve receber como parâmetros de entrada o vetor tempo t, a amplitude A, a frequência f e a fase phi.

10. A partir da linha de comandos invoque a função criada no exercício anterior para gerar uma onda sinusoidal com t entre -2 e 2 segundo com intervalos de 1 ms, amplitude 3, frequência 16 Hz e fase π/2 rad. Represente a onda gerada e verifique se a onda corresponde aos parâmetros usados.

11. Crie uma função que determina a amplitude média deslizante de um sinal. A função deve receber como parâmetros de entrada o sinal e o comprimento da janela N e devolver o sinal com a amplitude media deslizante. A amplitude média deslizante é dada pela seguinte função (use a função *mean* para determinar a média):

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x(i)$$

12. Crie um script em que gera uma onda sinusoidal (invocando a função criada no exercício 9) com t entre -1 e 1, espaçamento de 1 ms, A=3, f=10 Hz. Adicione um sinal com o mesmo comprimento do anterior composto por ruído com amplitude entre -1 e 1 (use a função rand). Filtre o sinal resultante com a média deslizante (função criada no exercício 11) usando um comprimento de janela N=10. Verifique que a função de media deslizante permite alisar o sinal com ruído removendo parte do ruído e ficando a onda sinusoidal. Experimente outros valores de N que melhor alisam o sinal.

13. Crie uma função que determina a média deslizante do módulo do sinal. Aplique esta função para alisar o sinal do exercício anterior. Identifique as diferenças.

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} | x(i) |$$

14. Verifique que o resultado é diferente da aplicação do módulo da média deslizante, consoante a expressão seguinte:

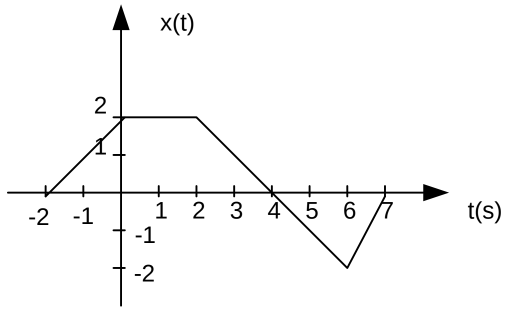
$$M(n) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x(i) \right|$$

15. Crie uma função que determina a energia média deslizante do sinal. Aplique esta função para alisar o sinal do exercício anterior. Identifique as diferenças.

$$M(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-\frac{N}{2}}^{n+\frac{N}{2}} x^2(i)$$

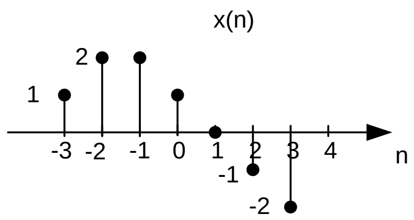
Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 2 – Sinais

1. Considere o seguinte sinal contínuo x(t):



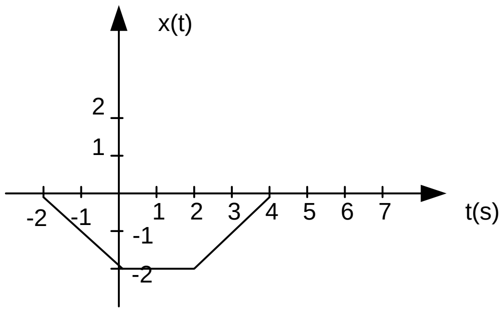
   a. Represente $y(t) = \frac{1}{2}x(t)$
   b. Represente $y(t) = 2x(t+3)$
   c. Represente $y(t) = x(2t)$
   d. Represente $y(t) = x(2t+2)$
   e. Represente $y(t) = \frac{1}{2}x(-t+4)$
   f. Represente $y(t) = \frac{1}{2}x(t) + x(2t+2)$
   g. Represente $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

2. Considere o seguinte sinal discreto x(n):

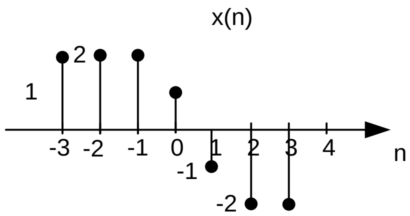


   a. Represente $y(n) = 1.5x(n)$
   b. Represente $y(n) = 2x(n-3)$
   c. Represente $y(n) = x(3n)$
   d. Represente $y(n) = 2x(3-n)$
   e. Represente $y(n) = 2x(n) - 2x(3-n)$

3. Determine as componentes par e ímpar dos seguintes sinais:
   a.



   b.

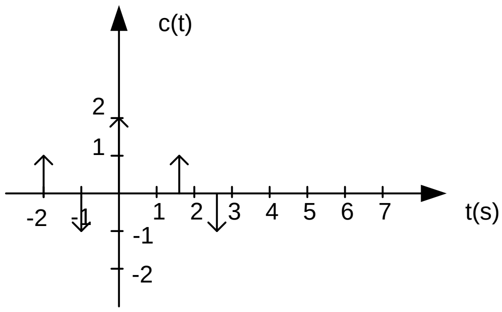


4. Verifique se os seguintes sinais são periódicos. Em caso afirmativo, indique o período N.
   a. $q(n) = 21\cos(32\pi n)$
   b. $w(n) = 10\sin(\frac{12}{5}\pi n + \frac{\pi}{2})$
   c. $e(n) = 2\sin(1.5n)$

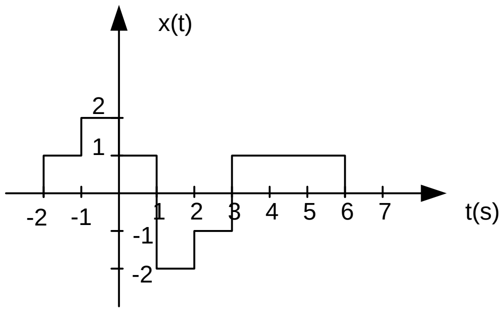
5. Represente os seguintes sinais:
   a. $r(t) = u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-4) - u(t-6)$
   b. $y(t) = 2\sin(2\pi t).[u(t) - u(t-1)]$
   c. $i(t) = 2u(2-t)$
   d. $o(t) = 2u(-2-t) - 2u(t+2)$
   e. $p(t) = 2\delta(t+1) - \delta(t) + \delta(t-0.75)$
6. Represente os seguintes sinais:
   a. $a(n) = 2u(n+2) - 2u(n) + 2u(n-2) - 2u(n-4)$
   b. $s(n) = 2\sin(\frac{\pi}{3}n)[u(n) - u(n-7)]$
   c. $d(n) = -2u(4-n)$
   d. $f(n) = -\delta(n+2) - 0.5\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1) + \delta(n-2)$

7. Escreva as equações dos seguintes sinais:

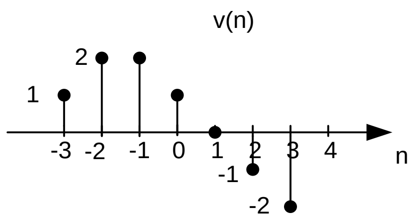
a.



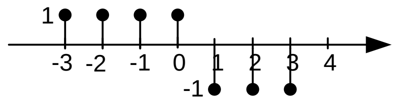
b.



c.



d.



Sinais em Matlab

8. Na linha de comandos, crie um vetor de tempo t entre -1 e 1 segundos com 1 ms de espaçamento. Crie e represente impulsos de dirac [δ(t-t0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de t0:
   - x=(dirac(t-t0))~=0;
   - x=t==t0;

9. Na linha de comandos, crie um vetor n entre -20 e 20. Crie e represente impulsos unitários discretos [δ(n-n0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de n0:
   - x=(dirac(n-n0))~=0;
   - x=n==n0;

10. Na linha de comandos, crie um vetor de tempo t entre -1 e 1 segundos com 1 ms de espaçamento. Crie e represente degraus de heaviside [u(t-t0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de t0:
    - x=heaviside(t-t0);
    - x=(heaviside(t-t0)~=0);
    - x=t>=t0;

11. Na linha de comandos, crie um vetor n entre -20 e 20. Crie e represente degraus unitários discretos [u(n-n0)] usando os seguintes comandos para diferentes valores de n0:
    - x=heaviside(n-n0);
    - x=(heaviside(n-n0)~=0);
    - x=n>=n0;

12. Usando as funções *dirac* e *heaviside* crie e represente os seguintes sinais (com t=-1:0.001:1; e n=-30:30):
    a. a(t)=-δ(t+0.4)+δ(t)+2δ(t-0.5)
    b. b(t)=u(t+0.5)-2u(t)+u(t-0.5)
    c. c(t)=u(-t-0.5)+u(t-0.5)
    d. d(n)=2δ(n+5)-δ(n+2)+4δ(n)-δ(n-2)+2δ(n-5)
    e. e(n)=u(n+15)+u(n+10)+u(n+5)-4u(n)-u(n-10)
    f. f(n)=-u(-n+5)+u(n-5)
    g. g(n)=-u(-n+5)+u(n+5)
    h. h(n)=-u(-n-5)+u(n-6)

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 3 – Sistemas

1. Considere o sistema discreto

$$y[n] = \frac{x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]}{4}$$

   a. Determine a sua resposta impulsional h[n].
   b. Determine a sua resposta y[n] à entrada x[n]=[0.5, 1, 1, 0.5].

2. Considere um sistema contínuo LIT com resposta impulsional h(n)=u(n-1)-u(n-4).
   Determine a resposta do sistema à entrada: x(n)=δ(n)+2δ(n-1)+3δ(n-2).

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

3. Considere o filtro de média de comprimento 5

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]}{5}$$

   a. Determine a sua resposta impulsional h[n].
   b. Determine e resposta em frequência $H(e^{jw})$.
   c. Represente graficamente o módulo e fase de $H(e^{jw})$.
   d. Faça agora a representação da alínea anterior em Matlab.

4. Considere um filtro passa baixo ideal com frequência de corte w=0.5 rad.

   a. Represente $H(e^{jw})$.
   b. Determine a resposta impulsional h[n].
   c. Represente graficamente em Matlab a resposta impulsiona com n entre -20 e 20.

5. Para cada um dos seguintes sistemas verifique se é: estável, causal, linear, invariante no tempo e sem memória.
   a. $T\left(x[n]\right) = g[n]x[n]$
   b. $T\left(x[n]\right) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$
   c. $T\left(x[n]\right) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
   d. $T\left(x[n]\right) = x[n-n_0]$
   e. $T\left(x[n]\right) = e^{x[n]}$
   f. $T\left(x[n]\right) = ax[n] + b$
   g. $T\left(x[n]\right) = x[-n]$

h. $T\left(x[n]\right) = x[n] + 3u[n+1]$

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 4 – Amostragem de Sinais Contínuos

1. Enuncie em que condições um sinal contínuo $x_c(t)$ pode ser representado por um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de $x_c(t)$.

2. Considere o sinal contínuo $x_c(t)=\cos(4000\pi t)$, que foi amostrado com um período de amostragem Ta=1/6000 s.

   a. Qual a frequência angular do sinal Ω_0
   b. Qual a frequência angular digital do sinal w_0
   c. Qual a frequência angular de amostragem Ω_s
   d. Foi cumprido o teorema da amostragem?
   e. Qual o expressão do sinal amostrado resultante x[n]?

3. O sinal contínuo $x_c(t)=\sin(2\pi*100t)$ foi amostrado com o período de amostragem T=1/400 s. Qual a expressão do sinal discreto resultante da amostragem x[n]?

4. A sequência $x[n]=\cos(\pi n/4)$, $-\infty < n < \infty$, foi obtida por amostragem do sinal

   $$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) \qquad -\infty < t < \infty$$

   à frequência de amostragem de 1000 amostras/s. Quais são os valores positivos possíveis de Ω_0 que podem ter resultado em x[n]?

5. O sinal contínuo $x_c(t)=\cos(4000\pi t)$ foi a mostrado com um período de amostragem Ta, tendo resultado

   $$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

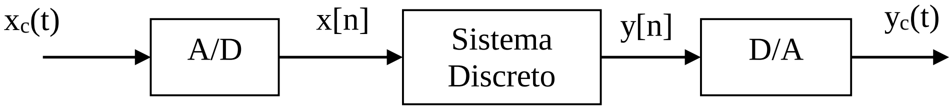
   a. Determine um Ta consistente.
   b. A escolha de Ta da alínea anterior é única? Se sim explique porquê, senão determine outro valor para Ta também consistente.

6. Considere os sinais discretos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tais que:

   $$|\Omega| > \Omega_1 \Rightarrow X_1(j\Omega) = 0$$
   $$|\Omega| > \Omega_2 \Rightarrow X_2(j\Omega) = 0$$
   $$\Omega_2 > \Omega_1$$

   Determine a frequência de amostragem mínima necessária para representar x(t) nos casos:
   a. $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$
   b. $x(t)= x_1(t).x_2(t)$
   c. $x(t)=x_1(t)*x_2(t)$

7. Considere o sistema da figura sendo o sistema discreto um filtro passa baixo ideal com frequência de corte π/8 rad/s.



   a. Se $x_c(t)$ é limitado à frequência de 5 kHz, qual o valor máximo de Ta para evitar aliasing no conversor A/D?
   b. Se 1/Ta=10 kHz qual deverá ser a frequência de corte efectiva do filtro?

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 5 – Transformada z

1. Calcule as transformadas z das seguintes sequências, especificando as suas regiões de convergência:

   a. $x(n) = k2^n u(n)$
   b. $x(n) = u(-n+1)$
   c. $x(n) = -k2^n u(-n-1)$
   d. $x(n) = 0.5^n u(n) + 3^n u(-n)$
   e. $x(n) = 4^{-n} u(n) + 5^{-n} u(n+1)$

2. Considere o sistema discreto causal

   $$y[n] = 2x[n] + 0.7y[n-1] - 0.1y[n-2]$$

   a. Determine a sua função de transferência H(z).
   b. Calcule a resposta impulsional h[n].
   c. Represente em Matlab (fazendo uso da função *freqz*) a amplitude e fase de $H(e^{jw})$. (Use também a função *roots* para determinar as raízes do polinómio).

3. Determine a transformada inversa pelo método da decomposição em frações simples de H(z), para as seguintes situações:

   $$H(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+0.8)}$$

   a. Sistema causal
   b. Sistema estável

4. Considere o sistema discreto causal com a função de transferência

   $$H(z) = \frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.64z^{-2}}$$

   a. Localize no plano z os pólos e zeros deste sistema e a região de convergência de H(z).
   b. Recorrendo à função *zplane* do Matlab, localize no plano z os pólos e zeros deste sistema.
   c. Determine a sua resposta impulsional h[n] pelo método da decomposição em fracções simples.
   d. Determine a sua resposta impulsional h[n] pelo método dos resíduos.
   e. Determine a equação às diferenças que rege o sistema.

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 6 – DFT

1. Calcule a DFT do sinal discreto:

   a. x[n]=[0, 1, 1, 0].
   b. x_1[n]=[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0]. Recorra ao resultado da alínea anterior.

2. Implemente em Matlab uma script que:

   - cria os sinais x[n]=[1,1,1,1,1,1,1,0,0,1] e h[1,1,1,0,1]
   - faz a convolução entre os dois sinais usando a função *conv* e retornando o sinal y[n].
   - faz a convolução recorrendo à função *fft*, em que realiza as DFT dos sinais x[n] e h[n] com os comprimentos originais. (realize DFT's de comprimento igual ao comprimento do maior sinal)
   - faz a convolução linear recorrendo à função *fft*. (Deve usar um comprimento das DFT's respeitando a regra N=L+M-1)
   - Apresente os resultados das 3 convoluções num mesmo gráfico.
   - Que conclui em relação aos resultados de cada operação?

3. Faça uma função em Matlab que implemente a convolução de um sinal de comprimento indeterminado, recorrendo à função *fft*, pelo método:
   a. 'Overlap-add'.
   b. 'Overlap-save'

4. Faça um script em Matlab que realize as seguintes operações:
   a) cria um sinal sinusoidal com uma frequência de 50 Hz, uma amplitude 2, com uma frequência de amostragem Fa=1000 Hz. Adicione um sinal com o mesmo comprimento do anterior composto por ruído com amplitude entre -1 e 1 (use a função rand)
   b) represente 0.4 segundos desse sinal numa janela com 4 sub-figuras.
   c) filtre esse sinal com um filtro de média de comprimento 5 definido pela equação às diferenças, pelos seguintes métodos:

$$y[n]=\frac{x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3]+x[n-4]}{5}$$

      I. usando a própria equação às diferenças. Represente o sinal filtrado noutra das 4 sub-figuras.
      II. supondo que o sinal sinusoidal de entrada é de comprimento indefinido, use a convolução com a fft de comprimento 64, pelo método "overlap-add". Represente o sinal filtrado noutra das 4 sub-figuras. Primeiro necessita de determinar a resposta impulsional deste sistema.

III. supondo que o sinal sinusoidal de entrada é de comprimento indefinido, use a convolução com a fft de comprimento 64, pelo método "overlap-save". Represente o sinal filtrado na outra sub-figura.

5. Pretende-se filtrar um sinal discreto x[n], de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 71, utilizando a convolução rápida, pelo método 'Overlap-add'.
   Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações a realizar por amostra à saída. Considere que N não pode exceder 2048 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

Processamento Digital de Sinal
Exercícios das Aulas
CAPÍTULO 7 – Filtros

1. Projecte um filtro digital passa banda, do tipo FIR, tal que

$$H(e^{j\Omega T}) \approx \begin{cases} 0 & |\Omega| < 400 \ \ rad/s \\ 1 & 400 \leq |\Omega| \leq 600 \ \ rad/s \\ 0 & 600 \leq |\Omega| \leq 1000 \ \ rad/s \end{cases}$$

Para a frequência angular de amostragem $\Omega s=2\pi/T=2000$ rad/s.

   a. Determine a resposta impulsional do filtro analógico protótipo.
   b. Determine os coeficientes do filtro digital, utilizando uma janela de Hanning de comprimento 7.
   c. Represente graficamente em Matlab a resposta em frequência do filtro digital.

2. Considere o filtro analógico passa-baixo

$$H_a(s) = \frac{1}{1+0.08s}$$

   a. Determine a frequência de corte Ωc (atenuação de 3 dB) desse filtro.
   b. Determine o filtro digital que se obtém de $H_a(s)$ pelo método da invariância da resposta impulsional, para uma frequência de amostragem de 10 Hz.
   c. Determine o filtro digital que se obtém de $H_a(s)$ pelo método da transformação bilinear, para uma frequência de amostragem de 10 Hz.
   d. Represente graficamente em Matlab a amplitude da resposta em frequência deste filtro digital e a do filtro analógico original. Explique as eventuais diferenças entre ambas.

3. Considere um filtro analógico passa baixo elementar do tipo RC, com R=10 kΩ e C=2 μF.

   a. Determine a sua resposta em frequência $H_c(j\Omega)$.
   b. Determine a resposta impulsional $h_c(t)$.
   c. Determine a resposta em frequência do sistema discreto cuja resposta impulsional é uma amostragem de $h_c(t)$ a uma frequência igual a 10 vezes a frequência de corte do filtro analógico.
   d. Determine a respectiva equação às diferenças.

4. Crie um sinal discreto x com comprimento 512 amostras, com duas componentes de frequência: 50 Hz com amplitude 2 e 300 Hz com amplitude 1. Considere uma frequência de amostragem de 1000 Hz.

    a. Subdivida uma figura em 4 com o subplot. Represente na primeira sub-figura a sinal x, e por baixo, na 3ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
    b. Projecte e implemente um filtro passa baixo FIR que deixe passar a componente de 50 Hz e que atenue a componente de 300 Hz pelo menos 1000 vezes. Optimize a ordem do filtro.
    c. Numa nova figura verifique que o filtro projectado corresponde às especificações da alínea anterior.
    d. Na figura inicial, represente na 2ª sub.figura o sinal filtrado, e na 4ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
    e. Verifique se o resultado é o esperado. Qual foi a menor ordem do filtro que satisfez a especificação?

5. Considere o sinal x com comprimento 512 amostras com 3 componentes de frequência: 1 kHz com amplitude 2; 2,5 kHz com amplitude 3; 4 kHz com amplitude 4. Considere uma frequência de amostragem de 10 kHz.
    a. Subdivida uma figura em 4 com o subplot. Represente na primeira sub-figura a sinal x, e por baixo, na 3ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
    b. Projecte um filtro IIR passa banda de Butterworth com as seguintes especificações: fc_{inf}= 1.5 kHz, fc_{sup}= 3.5 kHz; fp_{inf}= 2 kHz, fp_{sup}= 3 kHz; AM=3 dB; Am=50 dB.
    c. Numa nova figura verifique que o filtro projectado corresponde às especificações da alínea anterior.
    d. Na figura inicial, represente na 2ª sub.figura o sinal filtrado, e na 4ª sub-figura a respectiva transformada de Fourier.
    e. Verifique se o resultado é o esperado. Qual foi a menor ordem do filtro que satisfez a especificação?

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

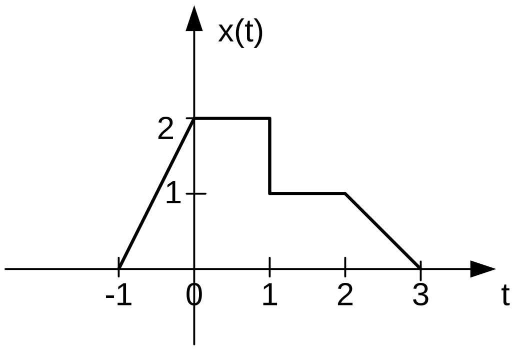
Processamento Digital de Sinal

Caderno de exercícios para as
HORAS NÃO PRESENCIAIS

João Paulo Teixeira
ESTiG, 2016

Capítulo 2 – Sinais

1. Considere o Considere o seguinte sinal contínuo:



a. Represente y1(t)=2x(t+1).

b. Represente y2(t)=x(2t).

c. Represente y3(t)=x(-t-1).

d. Represente a componente par do sinal x(t).

e. Represente a componente ímpar do sinal x(t).

2. Considere o sinal x(t) representado na figura 1. Desenhe com rigor, recorrendo a representações intermédias se necessário, os seguintes sinais:

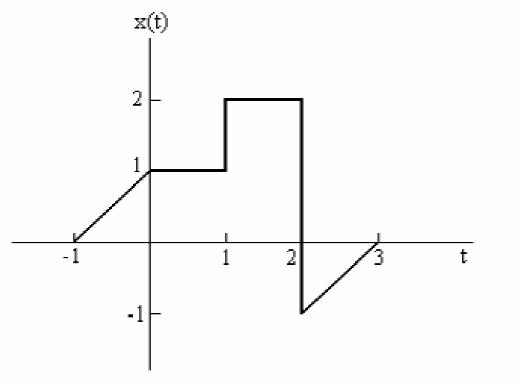


Fig. 1 – Sinal $x(t)$.

a. y(t)=0.5x(t-2)

b. y(t)=x(1-t)

c. y(t)=x(t)+x(t-1)

d. Determine as componentes par e ímpar do sinal.

3. Represente graficamente os seguintes sinais:

a. $a(t) = 2u(-t+3)$

b. $b(t) = u(t+1) + u(t) - 2u(t-1)$

c. $c(t) = a(t) + b(t)$

d. $d(t) = [u(t+2) - u(t)].t - t.[u(t) - u(t-2)]$

4. Considere o sinal contínuo:

$$x(t) = 2u(t+1) - u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3)$$

a. Represente graficamente o sinal x(t).

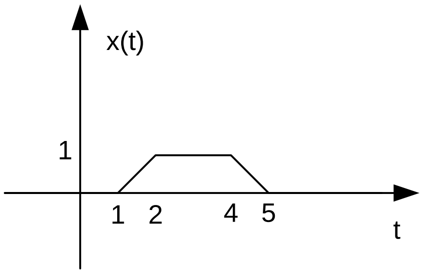
b. Represente $g(t) = x(\frac{1}{2}t)$.

c. Represente $v(t) = x(2t+1)$.

d. Determine e represente a componente par de x(t).

e. Determine e represente a componente ímpar de x(t).

5. Considere o seguinte sinal x(t)



a. Represente a(t)=x(-t+1)

b. Represente b(t)=-x(2t)

c. Represente c(t)=x(t)+u(t)-u(t-5)

d. Escreve x(t) usando uma única expressão matemática

6. Represente os seguintes sinais:

a. a(t)=u(t+2)-2u(t)+u(t-2)

b. b(t)=(t+2).[u(t+2)-u(t+1)]-t.[u(t+1)-u(t-1)]+(t-2)[u(t-1)-u(t-2)]

c. c(t)=3.a(-2t)

d. d(t)=a(t)+b(t)

e. Diga quais dos sinais representados são pares ou ímpares.

7. Represente os seguintes sinais:

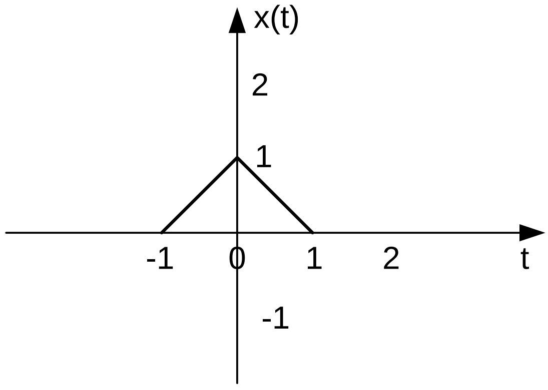
a. a(t)=δ(t+1)+2δ(t-0.5)-3δ(t-1.5)+δ(t-3).

b. b(t)=u(t)+u(t-1)+u(t-2)-4u(t-2.5).

c. c(n)=δ(n+2)-δ(n+1)+2δ(n-1)-2δ(n-2).

d. d(n)=u(n+2)+u(n-1)-2u(n-3).

8. Considere o seguinte sinal x(t) e realize as seguintes operações:



a. Desenhe os sinal a(t)=x(-1-t).

b. Desenhe o sinal b(t)=-2x(t-1).

c. Desenhe o sinal c(t)=x(t)+a(t).

d. Escreva a expressão analítica para o sinal x(t).

9. Represente em Matlab os sinais: 6.a, 6.b, 6.c e 6.d. Use um subplot para representar todos os sinais na mesma figura. Escreva a linha de código usada para cada representação usando a função title. Considere o vetor t= -3:0.001:3.

10. Represente em Matlab os sinais: 7.a, 7.b,7.c e 7.d. Use um subplot para representar todos os sinais na mesma figura. Escreva a linha de código usada para cada representação usando a função title. Considere o vetor t= -4:0.001:4, e o vetor n=-10:10.

Capítulo 3 – Sistemas

1. Verifique as seguintes condições para o sistema:

$$T\{x[n]\} = g[n]x[n]$$

a. O sistema é causal?

b. O sistema é linear?

c. O sistema é invariante no tempo?

d. O sistema é sem memória?

2. Considere o sistema:

$$y(n) = T\{x(n)\} = x(n-5)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

e. Verifique se o sistema é sem memória.

3. Considere o sistema:

$$y(n) = T\{x(n)\} = 2^n x(n)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

e. Verifique se o sistema é sem memória.

4. Considere o sistema:

$$y(n) = T\{x(n)\} = x(n) + u(n-1)$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

5. Considere o sistema:

$$y(n) = T\{x(n)\} = sen(\pi.x(n))$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Verifique se o sistema é causal.

c. Verifique se o sistema é linear.

d. Verifique se o sistema é invariante no tempo.

6. Verifique as seguintes condições:

a. O sinal $x[n]=\cos(\pi n/4)$ é periódico?

b. O sistema $y[n]=x[-n]$ é invariante no tempo?

c. O sistema $y[n]=2^n x[n]$ é linear?

7. Considere o sistema discreto:

$$y[n] = - x[n-1] + x[n-2]$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

8. Considere o sistema discreto:

$$y[n] = x[n-1] – x[n-3]$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

9. Considere o sistema discreto com a seguinte resposta impulsional h[n]=[1, 0, 2]:

a. Determine a resposta do sistema y[n], à entrada x[n]= [1, 0, 1], pelo método da convolução.

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Qual seria a resposta do sistema à entrada x[n]= [1, 2, 3], usando a equação às diferenças?

10. Considere o sistema discreto:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)}{4}$$

a. Determine a sua resposta impulsional h[n].

b. Determine a resposta em frequência $H(e^{jw})$.

c. Represente graficamente (módulo e fase) $H(e^{jw})$.

d. Escreva o código em Matlab para fazer a representação gráfica (módulo e fase) de $H(e^{jw})$.

Capítulo 4 – Amostragem de Sinais Contínuos

1. Considere o sinal contínuo:

$$x_c(t) = 2\sin(2\pi.200t + \frac{\pi}{4})$$

a. Indique um valor razoável para a frequência de amostragem do sinal, próximo da frequência mínima de amostragem. Justifique.

b. Escreva a expressão do sinal x[n], amostrado à frequência indicada na alínea anterior.

c. Verifique se o sinal resultante x[n], é periódico, e em caso afirmativo, qual o período.

2. Considere o sinal contínuo $x_c(t) = sen(5000\pi t)$

a. Indique o valor da frequência, f_0, do sinal.

b. Indique o valor da frequência angular do sinal, Ω_0.

c. O sinal é amostrado com um período de amostragem de 1/6000 s. Qual a frequência angular de amostragem, Ω_s?

d. Qual a expressão do sinal amostrado resultante?

e. Diga se foi cumprido o teorema da amostragem e porquê.

f. Explique o fenómeno de aliasing, indicando quando ocorre e em que consiste.

Capítulo 5 – Transformada Z

1. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2)}{2}$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n) e a sua transformada z, H(z).

b. Determine e represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

2. Considere o seguinte sistema discreto

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.1z^{-3}}$$

a. Escreva a equação às diferenças que implementa o sistema.

b. Determine a resposta y(n) (com n até 10) à entrada x(n) = [2 –1 0 1 –1]

3. A resposta de um sistema discreto à entrada x(n)=[1 0 1] é y(n)=[1 2 2 2 1].

a. Determine a sua resposta em frequência H(z).

b. Determine a sua resposta impulsional h(n).

c. Determine a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente $H(e^{jw})$ em módulo e fase.

4. Considere o sistema com a seguinte resposta impulsional: h(n) = [1 0 0 2 0]

a. Determine a resposta do sistema à entrada x(n) = [1 0 0 1].

b. Determine a transformada z H(z).

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

5. Considere o seguinte sistema discreto

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine e represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

c. Determine a sua função de transferência H(z) e localize no plano z os seus pólos e zeros.

6. Considere o sistema com a seguinte resposta impulsional: h(n) = [1 1 0 2 2]

a. Determine a resposta do sistema à entrada x(n) = [1 0 0 1].

b. Determine a transformada z H(z).

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

7. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{0.5}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Indique um algoritmo, ou as linhas de código em Matlab, que implementam o sistema.

8. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{0.5}{z^2 - \frac{5}{6}z - \frac{1}{6}}$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Este sistema tem Transformada de Fourier? Justifique.

9. A resposta de um sistema à entrada x[n]=[1, 1] é y[n]=[1, 1, 1, 1].

a. Determine a função de transferência do sistema H[z].

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Determine a resposta em frequência do sistema $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente, módulo e fase, de $H(e^{jw})$.

10. Considere o sistema discreto

$$y(n) = 2x(n-1) - 2x(n-5)$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine a sua transformada z, H(z).

c. Determine a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

d. Represente graficamente (módulo e fase) a sua resposta em frequência, $H(e^{jw})$.

11. Considere o seguinte sistema estável:

$$H(z) = \frac{2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

a. Represente no plano z os seus polos e a respectiva região de convergência (justifique).

b. Determine a sua resposta impulsional, h(n), pelo método da decomposição em fracções simples.

c. Diga, justificando, se o sistema é causal.

12. Considere o seguinte sistema discreto

$$H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.4z^{-2} - 0.2z^{-3}}$$

a. Escreva a equação às diferenças que implementa o sistema.

b. Determine a resposta y(n) (com n=0 até 5) à entrada: x(n) = [2 –1 0 1]

13. A função de transferência de um sistema discreto causal é:

$$H[z] = \frac{2z^{-1}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

a. Represente no plano z os pólos, zeros e ROC do sistema. Diga se o sistema é estável.

b. Determine a resposta impulsional do sistema, h[n].

c. Escreva a equação às diferenças do sistema.

d. Indique um algoritmo, ou as linhas de código em Matlab, que implementam o sistema.

Capítulo 6 – DFT – Transformada Discreta de Fourier

1. Considere o sinal discreto de comprimento 4.

x(n) = [1 1 0 0]

a. Determine a sua DFT, X(k) e represente-a graficamente em módulo e fase.

b. A partir de X(k) e <u>usando as propriedades da DFT</u>, determine a DFT Y(k) do sinal discreto de comprimento 8: y(n) = [0 0 0 1 1 0 0 0]

2. Considere os sinais:

x(n)=[1 0 –1 0]
y(n)=[0 2 0 -2]

a. Determine a DFT de x(n), X(k).

b. Determine a DTF de y(n) a partir da DFT de x(n) e das propriedades da DFT (sem aplicar a expressão da DFT ao sinal y(n)).

c. Determine a DFT da convolução circular dos sinais x(n) e y(n).

3. Considere os sinais:

x(n)=[1 1 0 0]

y(n)=[0 0 2 2]

a. Determine a DFT de x(n), X(k).

b. Determine a DTF de y(n) a partir da DFT de x(n) e das propriedades da DFT (sem aplicar a expressão da DFT ao sinal y(n)).

c. Determine a DFT da convolução circular dos sinais x(n) e y(n). Se não determinou as alíneas anteriores considere que $X[k]=[2,\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},0,\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}]$ e $Y[k]=[4,2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}},0,2\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}]$.

4. Considere os sinais:

h(n)=[0 0 2 3]

x(n)=[1 1]

a. Determine a convolução linear dos dois sinais, y(n)=h(n)*x(n), recorrendo à operação convolução. (Faça a representação gráfica).

b. Determine a convolução circular dos dois sinais com N=4, y(n)=h(n)$\circledast$x(n), recorrendo à operação convolução circular. (Faça a representação gráfica).

c. Compare os dois resultados e justifique as eventuais diferenças.

d. Sabendo que a multiplicação das DFT's corresponde à convolução circular dos respectivos sinais, como poderia realizar a convolução linear recorrendo às DFT's?

5. O algoritmo raiz 2, decimação no tempo, baseia-se na consideração do sinal x(n), de comprimento par, decomposto em g(n) e h(n) da seguinte forma:

g(n)=x(2n)
h(n)=x(2n+1), n=0...N/2-1

resultando
X(k)=G(k)+ W_N^k H(k)
X(k+N/2)=G(k)- W_N^k H(k) com k=0...N/2-1

Em que G(k) e H(k) são as DFT de comprimento N/2 de g(n) e h(n), respectivamente.

a. Mostre, recorrendo-se de borboletas, como é realizado o cálculo de uma DFT de comprimento 8 (não precisa mostrar o diagrama de borboletas para o cálculo das DFT de comprimentos 4 e 2).

b. No caso anterior, mas, considerando agora as DFT de comprimento 4 e 2, determine, justificando, o numero de adições e multiplicações necessárias.

c. Compare, do ponto de vista do número de adições e multiplicações, os algoritmos de raiz 2, raiz 4 e raiz dupla.

d. Escreva o código em Matlab para determinar e representar módulo e fase da FFT de comprimento 1024, do sinal x com comprimento 900 amostras.

6. Pretende-se calcular a convolução linear de um sinal de comprimento 60 com um sinal de comprimento 1242, usando a DFT e iDFT de comprimento 128.

a. Determine o número de DFT e iDFT necessárias, se usar o método overlap-add.

b. Determine o número de adições e de multiplicações realizadas neste cálculo, sabendo que foi usado um algoritmo raiz 2 na determinação das DFT. A iDFT é determinada com o mesmo número de adições e multiplicações que a DFT.

7. Pretende-se filtrar um sinal discreto x(n), de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 65, utilizando a convolução rápida, pelo método "overlap add".

a. Indique as operações que estão envolvidas neste processo e mostre, recorrendo-se de uma figura, a sobreposição usada neste método.

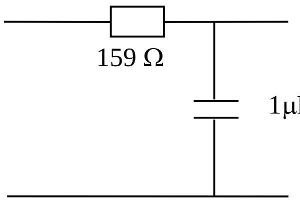
b. Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações a realizar por amostra do sinal de saída. Considere que N não pode exceder 512 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

8. Pretende-se usar DFT e DFT inversas de comprimento 128 para efectuar, através do método *overlap-save*, a convolução linear entre um sinal de comprimento 320 e um filtro de comprimento 49.

- **a.** Supondo que a transformada do filtro é conhecida, diga justificando, qual o número de DFT e DFT inversas necessário para implementar a convolução desejada.
- **b.** Supondo que as DFT e DFT inversas são determinadas com o mesmo número de operações de multiplicação e adição, e que são determinadas com um algoritmo raiz 2, quantas adições e multiplicações serão realizadas nesta filtragem?

Capítulo 7 – Filtros

1. Considere o seguinte filtro RC passa-baixo.



a. Indique a frequência de corte, f_c, do filtro analógico.

b. Indique a frequência angular de corte, Ω_c, do mesmo filtro.

c. Determine a função de transferência, H(s), do filtro analógico.

d. Usando o método da Invariância da Resposta Impulsional, obtenha H(z) do filtro, supondo que a frequência de amostragem é de 20 kHz.

e. Escreva a equação às diferenças y(n) que implementa o filtro pretendido (Se não resolveu a alínea anterior suponha $H(z) = \dfrac{0.1\pi}{1 - e^{-0.1\pi} z^{-1}}$).

f. Escreva o código em matlab que implementaria o filtro projectado.

2. Compare dos pontos de vista da função do sistema, da resposta impulsional, características da fase, estabilidade, complexidade e estrutura os filtros FIR com os filtros IIR.

3. Indique sucintamente as diferentes etapas por que deve passar o processo de projecto de um filtro sendo dadas as suas especificações.

4. Pretende-se amostrar um sinal analógico à frequência de amostragem de 20 Khz e realizar uma filtragem digital passa baixo com frequência de corte de 1 Khz com um filtro obtido, pelo método da transformação bilinear, a partir de um filtro analógico RC elementar.

a. Qual deverá ser a frequência de corte do filtro analógico Ω_C.

b. Escreva a função de transferência $H_a(s)$ do filtro analógico.

c. Obtenha a transformada z, H(z) do filtro digital pretendido.

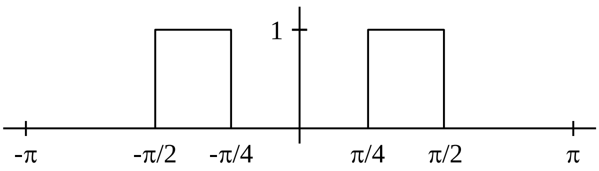
d. Escreva a equação às diferenças que implementa o filtro.

5. Apresente as linhas de código em MATLAB necessárias para realizar as seguintes tarefas:

- **a.** Criar uma amostragem do sinal $x(t)=5\text{sen}(\Omega t)+3\text{sen}(3\Omega t)$ com Ω=2pi*10 rad/s, com uma frequência de amostragem de 1000Hz.
- **b.** Determinar e representar a DFT, com comprimento 1024, do sinal x. Use o eixo horizontal para indicar os valores da frequência.
- **c.** Filtre o sinal x com o filtro causal dado e represente o sinal à saída do filtro.

  $y(n)= x(n)+2x(n-1)-y(n-1)-0.5y(n-2)$

6. Pretende-se projectar um filtro digital com a resposta em frequência indicada.



- **a.** Determine a resposta impulsional $h_d(n)$ do filtro pretendido.
- **b.** Utilizando uma janela de Hamming, projecte um filtro FIR, causal, de fase linear, com comprimento 5, que aproxime o filtro pretendido.
- **c.** Represente graficamente a amplitude da resposta em frequência do filtro obtido.

7. Pretende-se amostrar um sinal analógico com fa=50KHz, e realizar uma filtragem passa baixo com frequência de corte fc=2KHz com um filtro de 1ª ordem obtido a partir de um filtro RC analógico.

- **a.** Implemente o referido filtro utilizando o método da invariância da resposta impulsional.
- **b.** Represente graficamente o módulo da resposta em frequência, $|H(e^{jw})|$. Comente o resultado.
- **c.** Utilizando as transformações no domínio das frequências, determine, a partir do filtro passa baixo anterior, um filtro passa alto com fc=8KHz.

8. Pretende-se filtrar um sinal x[n], amostrado a uma frequência de 11025 Hz, com um filtro passa-baixo, sendo dadas as seguintes especificações:

Limite da banda de passagem – f_c=1000 Hz

Limite da banda de rejeição – f_p=2500 Hz

Ripple admitido na banda de passagem – A_M=3 dB

Ripple admitido na banda de rejeição – A_m=40 dB

a. Indique as linhas de código que usaria em Matlab para determinar os coeficientes deste filtro e a posterior filtragem do sinal x.

b. Suponha que no vector B=[B_1, B_2, B_3,..] tem os coeficientes do numerador do filtro e que no vector A=[1, A_2, A_3,...]tem os coeficientes do denominador do filtro. Escreva a equação às diferenças que lhe permite implementar o filtro. (Suponha que o filtro tem ordem 4).

c. Escreva as linhas de código em Matlab que lhe permitem implementar o filtro usando a equação às diferenças.

9. Pretende-se gravar um sinal de fala x(t). Esse sinal deve ser amostrado a uma frequência de amostragem de 22.050 kHz.

a. Para se evitar a ocorrência de *aliasing*, o sinal será previamente filtrado com um filtro anti-*aliasing*. Indique as características desse filtro (tipo de filtro e frequência de corte).

b. Suponha agora que já dispõe do sinal amostrado, x(n). Pretende-se remover de x(n) as componentes de frequência acima de 3400 Hz (a 3 dB). A atenuação mínima a 6800 Hz deverá ser de 40 dB. Represente graficamente a especificação do filtro.

c. Usando o nomograma em anexo determine a ordem mínima do filtro de Butterworth que garante as especificações.

d. Escreva as linhas de código em matlab que implementariam o filtro projectado.

10. Filtros FIR

a. Diga quais as técnicas que conhece para o projecto de filtros digitais do tipo FIR.

b. Refira-se à importância da escolha da janela para projecto destes filtros. Refira as principais janelas.

c. Projecte e escreva as linhas de código em Matlab que implementam o seguinte filtro passa baixo : A_M=3dB, A_m=60 dB, limite da banda de passagem Fp=5 KHz, limite da banda de corte, Fc=7 KHz. Sabendo que a frequência de amostragem foi de 25 KHz.

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Processamento (Digital) de Sinal
FORMULÁRIO

Formulas de Euler: $\cos w = \dfrac{e^{jw} + e^{-jw}}{2}$ $\quad senw = \dfrac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}$

Seno Cardinal: $\sin c(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$ $\quad \sin c(x) = \dfrac{sin(\pi x)}{\pi x}$ (normalizada)

Filtro RC passa baixo $H_a(s) = \dfrac{\Omega_c}{\Omega_c + s}$ $\quad \Omega_c = 2\pi f_c$ $\quad H_a(s) = \dfrac{1/\tau}{1/\tau + s}$ $\quad f_c = \dfrac{1}{2\pi\tau}$

$\tau = RC$

Convolução discreta $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$

Transformada de Fourier $X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$ $\quad x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{jwn}dw$

Amostragem de Sinais $x(n) = x_c(n\Delta t)$ $\quad \Omega_a = \dfrac{2\pi}{\Delta t} = 2\pi f_a$ $\quad f_N = \dfrac{f_a}{2}$

$\Omega = \dfrac{w}{\Delta t}$

Transformada z $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ $\quad x(n) = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$

Pares de Transformadas z:

$x(n) = a^n u(n)$ $\quad X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$

$x(n) = -a^n u(-n-1)$ $\quad X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

Transformada de Fourier Discreta $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$ $\quad x(n) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Filtros:

Invariância da Resposta Impulsional

$$H_a(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k} \qquad H(z) = T\sum_{K=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Filtros:

Transformação Bilinear

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \qquad z = \frac{2 + sT}{2 - sT}$$

$$w = 2arctg(\frac{\Omega T}{2}) \qquad \Omega = \frac{2}{T} tg\,\frac{w}{2} \qquad w = \frac{2\pi f}{f_a}$$

Algoritmo FFT raiz 2

nº de andares = $\log_2 N$ nº de borboletas = N/2

adições/borb.=2 multiplicações/borb.=1

Somatórios de Séries Geométricas

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}; |a| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{n1} a^k = \frac{1 - a^{n1+1}}{1-a} \qquad \sum_{k=n1}^{\infty} a^k = \frac{a^{n1}}{1-a}; |a| < 1$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}; a < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} = \frac{1}{1-a^{-1}}; |a| > 1$$